Analysis I Merkl
2. Klausur 04/05

Aufgabe 1 (6 = 2 + 4 Punkte). (a) Formulieren Sie eine Version des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung.
(b) Berechnen Sie

$$\frac{d}{dt}\int_{t^2}^{t^3} e^{-x^2}\,dx$$

a) Sei $F:[a,b]\to\mathbb{C}$ stetig differenzierbar auf $]a,b[$, $a<b$. Dann gilt

$$\int_a^b F'(x)\,dx = F(b)-F(a)$$

2

b) Sei $F(x)=\int e^{-x^2}dx + C$. D.g. $\int_{t^2}^{t^3} e^{-x^2}dx = [F(x)]_{t^2}^{t^3} = F(t^3)-F(t^2)$.

D.g. $\left(\int_{t^2}^{t^3} e^{-x^2}dx\right)' = \left(F(t^3)-F(t^2)\right)' = e^{-(t^3)^2}\cdot 3t^2 - e^{-(t^2)^2}\cdot 2t = \cancel{2}t\cdot e^{-t^4}(3t\cdot e^{-t}$

4

0

Aufgabe 2 (6 Punkte). Leiten Sie die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(t) = \frac{t}{\sqrt{1+e^t}}$ nach t ab.

$$f(t)' = \left(\frac{t}{\sqrt{1+e^t}}\right)' = \frac{\sqrt{1+e^t}\cdot 1 - t\cdot \frac{1}{2\sqrt{1+e^t}}\cdot e^t}{\sqrt{1+e^t}^{\,2}} \cancel{\left(\frac{1}{\sqrt{1+e^t}} - \frac{t\cdot e^t}{2(1+e^t)^{3/2}}\right)}$$

$$= \frac{2(1+e^t) - t\cdot e^t}{2\cdot(1+e^t)^{3/2}} = \frac{e^t(2-t)+2}{2\cdot(1+e^t)^{3/2}}$$

✓6

0

Aufgabe 3 (7 Punkte). Finden Sie eine Konstante $c \in \mathbb{R}$, sodass für $x \to 0$ gilt:

$$\cot(x) = \frac{1}{x} + c \cdot x + o(x)$$

(Mit Beweis!)

Wir ~~berechn~~ haben zu zeigen: $\cot(x) - \frac{1}{x} - c \cdot x = o(x)$.

Wir berechnen zunächst: $\lim_{x \to 0} \frac{\cot(x) - \frac{1}{x} - c\cdot x}{x}$.

~~Da $x \xrightarrow{x \to 0} 0$ ist~~

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cot(x) - \frac{1}{x} - c\cdot x}{x} = \cancel{\lim_{x\to 0} \frac{\cot(x)}{x} - \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} - \lim_{x\to 0} \frac{c\cdot x}{x}}$$

$$\cancel{= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{e^{ix}-e^{-ix}} - \frac{1}{x}}{x} - \lim_{x\to 0} \frac{c\cdot x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\overbrace{x(e^{ix}+e^{-ix})}^{\to 0} - \overbrace{(e^{ix}-e^{-ix})}^{\to 0}}{\underbrace{x^2(e^{ix}-e^{-ix})}_{\to 0}}} - c =$$

~~l'Hopital $e^{ix} + e^{-ix}$~~

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\cos x}{\sin x} - \frac{1}{x}}{x} - \lim_{x\to 0} \frac{c\cdot x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\overbrace{x(\cos(x))}^{\to 0} - \overbrace{\sin x}^{\to 0}}{\underbrace{\sin(x)\cdot x^2}_{\to 0}} - c =$$

$$\overset{\text{l'Hop}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x) + x(-\sin x) - \cos(x)}{x^2\cdot\cos(x) + 2x\cdot\sin x} - c = \lim_{x\to 0} \frac{\overbrace{-\sin x}^{\to 0}}{\underbrace{2\sin x}_{\to 0} + \underbrace{x\cdot\cos(x)}_{\to 0}} - c =$$

$$\cancel{\overset{\text{l'Hop}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-\cos x}{2\cdot\cos x + \cos x + \sin x} - c = \lim_{x\to 0} \frac{\overbrace{\cos x}^{\to 1}}{\underbrace{\cos x + \sin x}_{\to 1}} - c = 1 - c}$$

~~Da $\cot(x) - \frac{1}{x} - c\cdot x = o(x)$ gdw. $\lim_{x\to 0} \frac{\cot(x) - \frac{1}{x} - c\cdot x}{x} = 0$ folgt $1 - c = 0 \Rightarrow c = 1$~~

$$\overset{\text{l'Hop}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-\cos x}{2\cos x + \cos x - x\cdot\sin x} - c = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{x\cdot\sin x - 3\cos x} - c = \frac{1}{-3} - c = -\left(c + \frac{1}{3}\right).$$

7

Da $\cot(x) - \frac{1}{x} - c\cdot x = o(x)$ gdw. $\lim \frac{\cot(x) - \frac{1}{x} - c\cdot x}{x} = 0$ folgt $c = -\frac{1}{3}$

2

Aufgabe 4 (6 = 2 + 4 Punkte). (a) Definieren Sie für eine Folge $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von Funktionen $g_k\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ und eine Funktion $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ die Aussage

„(g_k) konvergiert gleichmäßig gegen f für $k\to\infty$."

(b) Zeigen Sie, dass die Folge der Funktionen $g_k\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$$g_k(x)=\frac{x}{2+(kx)^2}$$

für $k\to\infty$ gleichmäßig gegen 0 konvergiert.

a) Sei $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Funktionen ~~ab~~ mit $g_k:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ und $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

(g_k) konv. glm. gegen f für $k\to\infty$ wenn gilt:

$\forall\varepsilon>0\ \exists m\in\mathbb{N}\ \forall n\geq m\ \forall x\in\mathbb{R}: |f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$

g_n

a) 2-

b) $g_k=\frac{x}{2+(kx)^2}$, $f=0$. ~~Bzg. ...~~

~~Sei $\varepsilon>0$.~~

~~Nach dem Arch. Axiom gibt es ein $k\in\mathbb{N}^*$ mit $\frac{1}{m}<\varepsilon$.~~

~~Zu zeigen:~~ ~~$\forall\varepsilon>0$~~

Wir zeigen zunächst: $|g_k(x)-0|=|g_k(x)|=\frac{|x|}{2+(kx)^2}<\frac{1}{k}$.

Bew: Wir setzen $y=|x|$ und betrachten die nach unten geöffnete Parabel $(y\geq 0)$ $p(y)=-k^2y^2+k\cdot y-2$. Diese Parabel ist nach oben beschränkt. Sie hat keinen SNP mit der x-Achse, da die Diskriminante $k^2-4\cdot(-k^2)(-2)=-7k^2<0$.

Also gilt: $p(y)<0$, d.h. $-k^2y^2+ky-2<0 \Rightarrow ky<k^2y^2+2 \Rightarrow \frac{y}{2+(ky)^2}<\frac{1}{k}\Rightarrow$

$\frac{|x|}{2+(kx)^2}<\frac{1}{k}$ ✓ gute Idee!

Sei nun $\varepsilon>0$. D.g. es ein $m\in\mathbb{N}^*$ mit $\frac{1}{m}<\varepsilon$. Dann gilt:

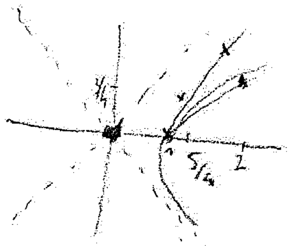
~~$|g_k(x)-0|=|g_k(x)|=\frac{|x|}{2+(kx)^2}<\frac{1}{k}$~~ $|g_n(x)-0|=|g_n(x)|=\frac{|x|}{2+(nx)^2}<\frac{1}{n}<\frac{1}{m}<\varepsilon$ □

gut!

b) 4

0

Aufgabe 5 (7 Punkte). Berechnen Sie die Gleichung der Tangente an die Hyperbel $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 = 1\}$ im Punkt $(\frac{5}{4}, \frac{3}{4})$. Das Ergebnis sollte die Form $y = ax + b$ haben.



Wir stellen beide Äste der Hyperbel durch $f_\pm(x) = \pm\sqrt{x^2-1}$ dar ✓

D.g. $f_\pm'(x) = \pm \frac{1}{2\sqrt{x^2-1}} \cdot 2x = \pm \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$ ✓

$P(5/4, 3/4) \in f_+$, da $f_+(\frac{5}{4}) = \sqrt{\frac{25}{16}-1} = \sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{3}{4}$ ✓

$P(5/4, 3/4) \in f_+$, da $f_+(\frac{5}{4}) = \sqrt{\frac{25}{16}-1} = \sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{3}{4}$ ✓

$\frac{5}{3}x + b$ ✓

$\frac{25}{12} = -\frac{16}{12} = -\frac{4}{3}$ ✓ $\Rightarrow$

$t: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (Tangente) mit $t(x) = ax + b$

(I) $a = 5/3$ (II) $P \in t$. Also

$\frac{5}{3} \cdot \frac{5}{4} + b = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{3 \cdot 3}{12} - \frac{5 \cdot 5}{12} = b \Rightarrow b =$

$t(x) = \frac{5}{3}x - \frac{4}{3}$. ✓

7+

0

Aufgabe 6 (6 Punkte). Berechnen Sie

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3(t)\,dt$$

$$\int \cos^3(t)\,dt = \int \left(\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}\right)^3 dt = \frac{1}{8}\cdot \int \left(e^{it}+e^{-it}\right)^3 dt =$$

$$= \frac{1}{8}\cdot \int \sum_{k=0}^{3} \binom{3}{k}\cdot \left(e^{it}\right)^k \cdot \left(e^{-it}\right)^{3-k} dt = \frac{1}{8}\cdot \sum_{k=0}^{3} \binom{3}{k} \cdot \int e^{itk} \cdot e^{it(k-3)}\, dt =$$

$$= \frac{1}{8}\cdot \sum_{k=0}^{3} \binom{3}{k} \cdot \int e^{it(2k-3)}\, dt = *$$

$$\cancel{NR: \int_a^b e^0\,dt = \int_a^b 1\,dt = b-a,\quad \int_a^b e^{ikt}\,dt = \left[\frac{e^{ikt}}{ik}\right]_a^b = \frac{e^{ika}-e^{ikb}}{ik} \quad k \neq 0}$$

$$\cancel{Also: \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^0 = \frac{\pi}{2},\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{ikt}\,dt = \frac{e^{ik\cdot\frac{\pi}{2}} - e^0}{ik} =}$$

$$\Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 t\,dt = \frac{1}{8}\cdot\left[\binom{3}{0}\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{it(-3)}dt + \binom{3}{1}\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{it(-1)}dt + \binom{3}{2}\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{it\cdot 1}dt + \binom{3}{3}\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{it\cdot 3}dt\right]$$

$$= \frac{1}{8}\cdot\left[\frac{e^{it(-3)}}{-3i} + 3\frac{e^{it(-1)}}{-i} + 3\cdot\frac{e^{it}}{i} + \frac{e^{it3}}{3i}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{24i}\left[-e^{it(-3)} - 9e^{it(-1)} + 9\cdot e^{it} + e^{it\cdot 3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \frac{1}{24i}\left[9\left(e^{it}-e^{-it}\right) + \left(e^{it\cdot 3} - e^{-it\cdot 3}\right)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{12}\cdot\left[9\sin t + \sin(3t)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \frac{1}{12}\left(9\cdot\sin\frac{\pi}{2} + \sin\left(\frac{3}{2}\pi\right) - 9\cdot\sin 0 - \sin 0\right) = \frac{1}{12}\cdot(9\cdot 1 - 1)\cancel{\pi} = \frac{8}{12}\cancel{\pi} = \frac{2}{3}\cancel{\pi}$$

6

Aufgabe 7 (6 = 2 + 4 Punkte). (a) Formulieren Sie den Mittelwertsatz der Integralrechnung (allgemeine Version).
(b) (*) Sei $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig. Zeigen Sie:

$$\int_{-1}^{1} h(\varepsilon t)\, t^2\, dt \to \tfrac{2}{3} h(0)$$

für $\varepsilon \to 0$.

a) Seien $g:[a,b] \to \mathbb{R}$, $h:[a,b] \to \mathbb{R}$, $a<b$ stetig und $g \geq 0$. ~~Dan~~

Dann gibt es ein $\xi \in]a,b[$ sodass gilt:

$$\int_a^b f(x) \cdot g(x)\, dx = f(\xi) \cdot \int_a^b g(x)\, dx$$

✓ a/2

~~b/ Nach (a) gibt es ein $\xi \in]-1,1[$, so dass~~

$\cancel{\int_{-1}^{1} h(\varepsilon t) \cdot t^2\, dt}$ $\cancel{\int_{-1}^{1} g(t) \cdot t^2\, dt = g(\xi) \cdot \int_{-1}^{1} t^2\, dt \quad \text{mit } g(x) = h(\varepsilon x).}$

$\cancel{\Rightarrow \xi \in]-1,1[\Rightarrow \varepsilon}$ $\cancel{\varepsilon\delta = \xi,\ \text{d.h. } \varepsilon \cdot \delta \in]-1,1[,\ \text{d.h.}}$

b) Wir setzen $g(x) := h(\varepsilon x)$. D.g. nach (a): $\exists \gamma_{(\varepsilon)} \in]-1,1[$, sodass

$$\int_{-1}^{1} h(\varepsilon t) \cdot t^2\, dt = \int_{-1}^{1} g(t) \cdot t^2\, dt = g(\gamma) \cdot \int_{-1}^{1} t^2\, dt = g(\gamma) \cdot \left[\frac{t^3}{3}\right]_{-1}^{1} = g(\gamma) \cdot \left(\frac{1}{3} - \frac{-1}{3}\right) = \frac{2}{3} g(\gamma)$$

$= \frac{2}{3} \cdot h(\varepsilon \cdot \gamma)$. ~~Da $\gamma \in]-1,1[$ ist $\lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon \cdot \gamma = 0$. Also folgt Behauptung.~~

$\cancel{\frac{2}{3} \cdot h(\varepsilon \cdot \gamma) \xrightarrow{\varepsilon \to 0} \frac{2}{3} h(0)}$, da :

Wir setzen $\delta = \varepsilon\gamma$. D.g. $\cancel{\delta \in]-\varepsilon,\varepsilon[}$ $\delta \in]-\varepsilon,\varepsilon[$. Wie früher bewiesen, ist $\{0\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} (]-\varepsilon_n, \varepsilon_n[)$ für $\varepsilon_n \xrightarrow{n \to \infty} 0$, d.h. $\delta \xrightarrow{\varepsilon \to 0} 0$, d.h.

$$\frac{2}{3} h(\delta) = \frac{2}{3} h(\varepsilon \cdot \gamma) \xrightarrow{\varepsilon \to 0} \frac{2}{3} h(0)$$

✓

b) 4