Funktionenfolgen und Konvergenz

Wir befassen uns hier mit Folgen, deren Glieder Funktionen sind. Diese kann man lokal oder global betrachten.

Definition 1. (f_n) heißt *punktweise konvergent* gegen eine Funktion $f : X \to \mathbb{R}$, wenn folgendes gilt:

$$\forall x \in X \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N(\varepsilon, x) \in \mathbb{N} \quad \forall n > N(\varepsilon, x) :$$

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Beispiel 1. Sei $E = [0, 1]$ und $f_n(x) = x^n$. Dann konvergiert f_n punktweise gegen die Funktion f mit $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad x \in [0, 1), \\ 1 & \text{für} \quad x = 1 \end{cases}$.

Heuristik: Sei $x \in [0, 1)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon &\Leftrightarrow x^n < \varepsilon \\ &\Leftrightarrow n \ln x < \ln \varepsilon \\ &\Leftrightarrow n > \frac{\ln \varepsilon}{\ln x} \end{aligned}$$

und wählt daher

$$N(\varepsilon, x) = \left\lfloor \frac{\ln \varepsilon}{\ln x} \right\rfloor + 1.$$

Definition 2. (f_n) heißt *gleichmäßig konvergent* gegen eine Funktion $f : X \to \mathbb{R}$, wenn folgendes gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n > N \quad \forall x \in X : \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Bemerkung 1. • Beim Vergleich von Definition 1 und 2 beachte man, dass bei punktweiser Konvergenz die Schranke N auch von x abhängen darf.
• Das Cauchy-Konvergenz-Kriterium für gleichmäßige Konvergenz lautet

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : \forall n, m > N : ||f_n - f_m||_\infty < \varepsilon.$$

• Der einzige Unterschied zwischen den Aussagen (gleichm. und punktw.) besteht also darin, dass die beiden Quantoren $(\forall x \in X)$ und $(\exists N(\varepsilon, x) \in \mathbb{N})$ die Plätze vertauscht haben. Wenn es aber ein $N(\varepsilon, x)$ gibt, das für alle x funktioniert, so gibt es sicherlich zu jedem x ein passendes $N(\varepsilon, x)$. Die Umkehrung ist falsch, wie die Folge $f_n(x) = x^n$ zeigt.

Praktisches Vorgehen: Man soll eine Funktionenfolge $(f_n)_n$ auf Konvergenz untersuchen. Zunächst kann man die Punkte x bestimmen, für die die Zahlenfolge $(f_n(x))_n$ konvergiert und evtl. sogar die Grenzfunktion f angeben. Man untersucht die Folge zunächst also auf punktweise Konvergenz. Um die gleichmäßige Konvergenz zu überprüfen, schätzt man anschließend das Supremum der Abstände $|f_n(x) - f_m(x)|$ bzw. $|f_n(x) - f(x)|$

ab (Extremwertaufgabe lösen). Man kann aber auch geplanter vorgehen mit vielleicht einem der folgenden Kriterien:

Kriterien für gleichmäßige Konvergenz

Satz 1 (Cauchysches Konvergenzkri. f. glm. K.) Die Aussagen sind äquivalent:

i) Die Funktionenfolge (f_n) konvergiert gleichmäßig,

ii) Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $N := N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ mit

$$||f_n - f_m||_\infty < \varepsilon, \qquad n, m \geq N.$$

Für Funktionenreihen gilt: $s_n := \sum_{k=0}^{\infty} f_k$ konvergiert gleichmäßig auf X gdw. $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq m$: $\sup_{x \in X} |\sum_{k=m}^{n} f_k(x)| < \varepsilon$.

Die Funktionenreihe $\sum f_k$ heißt
- punktweise konvergent $:\Leftrightarrow \sum f_k(x)$ konvergiert in E für alle $x \in X$.
- absolut konvergent $:\Leftrightarrow \sum |f_k(x)| < \infty$ für jedes $x \in X$.
- gleichmäßig konvergent $:\Leftrightarrow (s_n)$ konvergiert gleichmäßig.
- normal konvergent $:\Leftrightarrow \sum ||f_k||_\infty < \infty$.

Es gelten die folgenden Aussagen:

i) $\sum f_k$ konvergiert absolut $\Rightarrow \sum f_k$ konvergiert punktweise.

ii) $\sum f_k$ konvergiert gleichmäßig $\not\Rightarrow$ $\sum f_k$ konvergiert absolut.

iii) $\sum f_k$ konvergiert absolut $\not\Rightarrow$ $\sum f_k$ konvergiert gleichmäßig.

Bei der Untersuchung von Funktionenreihen ist in der Praxis oft nützlich:

Satz 2 (Weierstraß Kriterium) Gibt es eine in $\mathbb{R}$ konvergente Reihe $\sum \alpha_k$ mit $||f_k||_\infty \leq \alpha_k$ für fast alle $k \in \mathbb{N}$, so ist $\sum f_k$ normal, also insbesondere absolut und gleichmäßig, konvergent.

Satz 3 (Dini) Sei $K \subset X$ eine kompakte Teilmenge des metrischen Raumes (X, d). Jede monoton wachsende (bzw. fallende) Folge stetiger Funktionen $f_n(x) : K \to \mathbb{R}$, die auf K punktweise gegen eine stetige Funktion $f(x) : K \to \mathbb{R}$ konvergiert, konvergiert auf K gleichmäßig gegen $f(x)$.

Satz 4 (Majr.kriterium f. glm. Konvergenz) Für alle Indizes $n > N_0$ und für alle $x \in E$ gelte $|f_n(x)| \leq b$. Ferner sei die Zahlenreihe $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ konvergent. Dann konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ auf E absolut und gleichmäßig.