17 Die Gammafunktion

Die Gammafunktion ist eine der wichtigsten Funktionen der Analysis. Sie interpoliert die Fakultät $s \mapsto s! = 1 \cdot 2 \cdots s$ unter Beibehaltung der Funktionalgleichung $s! = s \cdot (s-1)!$. Infolge eines unglücklichen historischen Umstandes bezeichnet man nicht $s!$, sondern $(s-1)!$ mit $\Gamma(s)$; entsprechend lautet die Funktionalgleichung der gesuchten Funktion $\Gamma(s+1) = s \cdot \Gamma(s)$.

Bereits 1729 hat Euler Definitionen in Gestalt eines unendlichen Produktes und eines uneigentlichen Integrals angegeben. Besonders zweckmäßig ist die Definition von Gauß (1812).

17.1 Die Gammafunktion nach Gauß

Wir stellen $(s-1)!$ in einer Weise dar, die nicht voraussetzt, daß s eine natürliche Zahl ist. Mit $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\begin{aligned}(s-1)! &= \frac{(n+s)!}{s(s+1)\cdots(s+n)} \\ &= \frac{n!\, n^s}{s(s+1)\cdots(s+n)} \cdot \left(\frac{n+1}{n} \cdot \frac{n+2}{n} \cdots \frac{n+s}{n}\right).\end{aligned}$$

Daraus erhalten wir durch Grenzübergang $n \to \infty$

$$(1) \qquad (s-1)! = \lim_{n\to\infty} \frac{n!\, n^s}{s(s+1)\cdots(s+n)}.$$

Wir zeigen, daß der Limes (1) auch für beliebiges reelles $s \neq 0, -1, -2, \ldots$ existiert. Sei

$$(2) \qquad \Gamma_n(x) := \frac{n!\, n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)}.$$

Hilfssatz 1: *Die Folge (Γ_n) konvergiert gleichmäßig auf jedem kompakten Intervall $[a;b]$, das keine der Stellen $0, -1, -2, \ldots$ enthält. Die Grenzfunktion hat keine Nullstelle.*

Beweis: Wir betrachten für $x \in [a;b]$ die Quotienten

$$\frac{\Gamma_{n-1}(x)}{\Gamma_n(x)} = \frac{(x+n)(n-1)^x}{n \cdot n^x} = \left(1+\frac{x}{n}\right)\left(1-\frac{1}{n}\right)^x.$$

Für $n > 2R$ mit $R := \max\left\{|a|, |b|, 1\right\}$ liefert die Logarithmusreihe

$$\left|\ln\frac{\Gamma_{n-1}(x)}{\Gamma_n(x)}\right| = \left|\ln\left(1+\frac{x}{n}\right) + x\cdot\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)\right|$$
$$< \sum_{k=2}^{\infty}\left|\frac{x}{n}\right|^k + |x|\cdot\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{n^k} < 2\frac{R^2}{n^2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k = 4\frac{R^2}{n^2}.$$

Die Reihe $\sum_{k=p}^{\infty}\ln\Gamma_{k-1}/\Gamma_k$ mit $p := [R]+1$ konvergiert also gleichmäßig auf $[a;b]$. Wegen

$$\Gamma_n = \Gamma_{p-1}\cdot\prod_{k=p}^{n}\frac{\Gamma_k}{\Gamma_{k-1}} = \Gamma_{p-1}\cdot\exp\left(\sum_{k=p}^{n}\ln\frac{\Gamma_k}{\Gamma_{k-1}}\right)$$

konvergiert auch die Folge (Γ_n) gleichmäßig auf $[a;b]$. Die Grenzfunktion $\Gamma_{p-1}\cdot\exp\left(\sum_{k=p}^{\infty}\ln\Gamma_k/\Gamma_{k-1}\right)$ hat offensichtlich keine Nullstellen. □

Definition der Gammafunktion nach Gauß:

$$(3)\qquad \boxed{\Gamma(x) := \lim_{n\to\infty}\frac{n!\,n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)}, \qquad x \in \mathbb{R}\setminus\{0,-1,-2,\ldots\}.}$$

Die Gammafunktion ist stetig, hat keine Nullstellen und erfüllt die Identitäten:

$$(4)\qquad \Gamma(x) = (x-1)! \qquad \textit{für } x \in \mathbb{N},$$

$$(5)\qquad \Gamma(x+1) = x\cdot\Gamma(x) \qquad \textit{(Funktionalgleichung).}$$

Die Interpolationseigenschaft (4) wurde schon bei der Herleitung von (1) gezeigt; die Funktionalgleichung folgt aus $\Gamma_n(x+1) = \dfrac{n}{x+1+n}\cdot x\Gamma_n(x)$. □

Beispiel: Berechnung von $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$:

$$\Gamma_n\left(\tfrac{1}{2}\right) = \frac{2^{n+1}n!\sqrt{n}}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n+1)}.$$

Mit dem Wallisschen Produkt 11.5.II. erhält man

$$(6)\qquad \boxed{\Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.}$$

Eine mehrmalige Anwendung der Funktionalgleichung ergibt

$$\Gamma(x+n+1) = (x+n)(x+n-1)\cdots x\cdot\Gamma(x). \tag{7}$$

Danach ist die Gammafunktion durch ihre Werte im Intervall $(0;1]$ festgelegt. Weiter folgt aus (7) für $x \to -n$, $n \in \mathbb{N}_0$, die Asymptotik

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+n+1)}{x(x+1)\cdots(x+n)} \simeq \frac{(-1)^n}{n!}\cdot\frac{1}{x+n}.$$

Weierstraß hat der definierenden Formel (3) noch eine andere, bedeutsame Gestalt gegeben. Zunächst ist

$$\frac{1}{\Gamma_n(x)} = x\cdot\exp\left(x\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \ln n\right)\right)\cdot\prod_{k=1}^{n}\frac{x+k}{k}\cdot \mathrm{e}^{-x/k}.$$

Für $n \to \infty$ folgt mit der Eulerschen Konstanten $\gamma = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \ln n\right)$, siehe 11.9 (22), die

Weierstraßsche Produktdarstellung

$$\boxed{\frac{1}{\Gamma(x)} = x\cdot \mathrm{e}^{\gamma x}\cdot\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{x}{k}\right)\mathrm{e}^{-x/k}.} \tag{8}$$

Die Gammafunktion erfüllt eine weitere wichtige Funktionalgleichung. Diese folgt leicht aus (8) und dem Eulerschen Sinusprodukt. Mit ihrer Hilfe kann die Berechnung der Funktionswerte in $(0;1)$ auf die Berechnung in $(0;\frac{1}{2}]$ zurückgeführt werden.

Ergänzungssatz der Gammafunktion:

$$\boxed{\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin\pi x}.} \qquad \text{(Euler)} \tag{9}$$

Beweis: (8) ergibt

$$\frac{1}{\Gamma(x)\Gamma(1-x)} = \frac{1}{(-x)\Gamma(x)\Gamma(-x)} = x\cdot\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{k^2}\right).$$

Rechts steht das Sinusprodukt 16.2 (9). Damit folgt (9). □

Beispiel: Für $x = \frac{1}{2}$ erhält man erneut $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.

Konvexitätseigenschaften

Eine positive Funktion $g : I \to \mathbb{R}$ heißt *logarithmisch konvex*, wenn $\ln g$ konvex ist. Eine logarithmisch konvexe Funktion ist konvex: Da die Exponentialfunktion monoton wächst und konvex ist, gilt nämlich für $x, y \in I$ und $t \in [0;1]$

$$\begin{aligned} g\bigl(tx + (1-t)y\bigr) &= \mathrm{e}^{\ln g(tx+(1-t)y)} \le \mathrm{e}^{t\ln g(x)+(1-t)\ln g(y)} \\ &\le tg(x) + (1-t)g(y). \end{aligned}$$

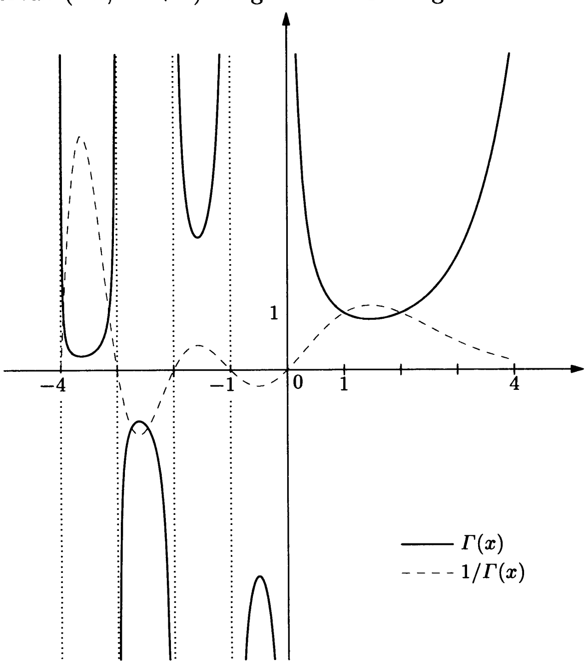
Wir zeigen: *Die Gammafunktion ist auf* $(0;\infty)$ *logarithmisch konvex.*

Beweis: Die Logarithmen der Approximierenden Γ_n sind auf $(0;\infty)$ konvex wegen

$$(\ln \Gamma_n)''(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(x+k)^2} > 0.$$

Folglich ist auch die Grenzfunktion $\ln \Gamma = \lim\limits_{n\to\infty} \ln \Gamma_n$ konvex auf $(0;\infty)$. □

Mit Hilfe von (7) folgert man nun leicht, daß die Gammafunktion in jedem Intervall $(-k; -k+1)$ für gerades $k \in \mathbb{N}$ logarithmisch konvex ist.



17.2 Charakterisierung der Γ-Funktion nach Bohr-Mollerup. Die Eulersche Integraldarstellung

Die Funktion Γ ist nicht die einzige Funktion mit der Interpolationseigenschaft (4) und der Funktionalgleichung (5). Für jede Funktion f auf $\mathbb{R}$ mit $f(1) = 1$ und der Periode 1 erfüllt auch $f \cdot \Gamma$ die Identitäten (4) und (5). Bemerkenswert ist nun, daß die weitere Eigenschaft der logarithmischen Konvexität die Gammafunktion eindeutig festlegt.

Satz von Bohr-Mollerup (1922): *Eine Funktion* $G : (0; \infty) \to \mathbb{R}_+$ *ist dort die* Γ*-Funktion, wenn sie folgende drei Eigenschaften hat:*

a) $G(n) = (n-1)!$ *für* $n \in \mathbb{N}$,

b) $G(x+1) = x \cdot G(x)$,

c) G *ist logarithmisch-konvex.*

Beweis: Mehrmalige Anwendung von b) ergibt

$$(\mathrm{b}_n) \qquad G(x+n) = (x+n-1)\cdots(x+1)x \cdot G(x), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Demnach ist G bereits durch seine Werte im Intervall $(0;1]$ bestimmt. Zu zeigen bleibt: $G(x) = \Gamma(x)$ für $0 < x < 1$.

Wegen der logarithmischen Konvexität gilt für $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} G(n+x) &= G\big(x \cdot (n+1) + (1-x) \cdot n\big) \\ &\le \big(G(n+1)\big)^x \cdot \big(G(n)\big)^{1-x} = n!\, n^{x-1}. \end{aligned}$$

Andererseits ist

$$\begin{aligned} n! = G(n+1) &= G\big(x \cdot (n+x) + (1-x) \cdot (n+x+1)\big) \\ &\le \big(G(n+x)\big)^x \cdot \big(G(n+x+1)\big)^{1-x} \\ &= \big(G(n+x)\big)^x \cdot (n+x)^{1-x}\big(G(n+x)\big)^{1-x} \\ &= (n+x)^{1-x} G(n+x). \end{aligned}$$

Wir erhalten damit die Einschließung

$$n!\,(n+x)^{x-1} \le G(n+x) \le n!\, n^{x-1}.$$

Mittels (b_n) ergibt sich daraus

$$\frac{n!\, n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)} \cdot \left(\frac{n+x}{n}\right)^x \le G(x) \le \frac{n!\, n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)} \cdot \frac{x+n}{n}.$$

Schließlich führt der Grenzübergang $n \to \infty$ zu $\Gamma(x) \le G(x) \le \Gamma(x)$. □

Mit Hilfe der gewonnenen Charakterisierung der Gammafunktion stellen wir nun die Verbindung zu dem in 11.9 betrachteten Gammaintegral her.

Eulersche Integraldarstellung: *Für* $x > 0$ *gilt*

$$\boxed{\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}\, \mathrm{e}^{-t}\, \mathrm{d}t.} \tag{10}$$

Beweis: Die Konvergenz des Integrals wurde bereits in 11.9 gezeigt; bei 0 mit der Majorante t^{x-1} und bei ∞ mit der Majorante $\mathrm{e}^{-t/2}$.

Es bezeichne $G(x)$ den Wert des Integrals (10). Wir zeigen, daß die Funktion G die drei Voraussetzungen im Satz von Bohr-Mollerup erfüllt. a) und b) haben wir bereits im Anschluß an 11.9 (20) gezeigt. Zum Nachweis von c) müssen wir zeigen, daß für $\lambda \in (0;1)$ und $x, y > 0$ gilt:

$$G\big(\lambda x + (1-\lambda)y\big) \le \big(G(x)\big)^\lambda \cdot \big(G(y)\big)^{1-\lambda}. \tag{$*$}$$

Wir benützen dazu die Höldersche Ungleichung für Integrale 11.8 (19):

$$\int_\varepsilon^R f(t)g(t)\, \mathrm{d}t \le \left(\int_\varepsilon^R |f|^p\, \mathrm{d}t\right)^{1/p} \cdot \left(\int_\varepsilon^R |g|^q\, \mathrm{d}t\right)^{1/q} \qquad (0 < \varepsilon < R < \infty).$$

Seien $p := \dfrac{1}{\lambda}$, $q := \dfrac{1}{1-\lambda}$ und $f(t) := t^{(x-1)/p}\, \mathrm{e}^{-t/p}$, $g(t) := t^{(y-1)/q}\, \mathrm{e}^{-t/q}$. Die Höldersche Ungleichung ergibt dafür

$$\int_\varepsilon^R t^{\lambda x + (1-\lambda)y - 1}\, \mathrm{e}^{-t}\, \mathrm{d}t \le \left(\int_\varepsilon^R t^{x-1}\, \mathrm{e}^{-t}\, \mathrm{d}t\right)^\lambda \cdot \left(\int_\varepsilon^R t^{y-1}\, \mathrm{e}^{-t}\, \mathrm{d}t\right)^{1-\lambda}.$$

Mit $\varepsilon \downarrow 0$ und $R \to \infty$ erhält man die behauptete Ungleichung $(*)$.

G erfüllt somit die Bedingungen des Satzes von Bohr-Mollerup; also ist $G(x) = \Gamma(x)$. □

Folgerung: $\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x^2}\, \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$.

Beweis: Die Substitution $x = \sqrt{t}$ ergibt

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x^2}\, \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}\, \mathrm{d}t = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$ □

Bemerkung: Das Integral $\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x^2}\, \mathrm{d}x$ spielt eine wichtige Rolle in der Wahrscheinlichkeitstheorie. Man kann es auch nach Poisson durch Rückführung auf ein Doppelintegral über $\mathbb{R}^2$ berechnen (siehe Band 2).

Als weitere Anwendung des Satzes von Bohr-Mollerup leiten wir die Legendresche Verdopplungsformel her.

Legendresche Verdopplungsformel: *Für* $x > 0$ *gilt*

$$\boxed{\Gamma\left(\frac{x}{2}\right)\Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{x-1}}\Gamma(x).}$$

Beweis: Für $G(x) := 2^x\Gamma\left(\frac{x}{2}\right)\Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right)$ gilt

$$G(x+1) = 2^{x+1}\Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{x}{2}+1\right) = 2^{x+1}\Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right)\cdot\frac{x}{2}\cdot\Gamma\left(\frac{x}{2}\right) = xG(x).$$

G erfüllt also die Funktionalgleichung der Gammafunktion. Ferner ist G logarithmisch-konvex, da jeder Faktor dieses ist. Nach dem Satz von Bohr-Mollerup ist daher $G(x) = G(1)\cdot\Gamma(x) = 2\sqrt{\pi}\cdot\Gamma(x)$. □

17.3 Die Stirlingsche Formel

Wir wollen $\Gamma(x)$ für $x > 0$ durch eine elementare Funktion approximieren. Als Anhaltspunkt behandeln wir $\ln n!$ für natürliche Zahlen n mit Hilfe der Eulerschen Summationsformel. Die Anwendung von 11.10 (23) auf $f(x) = \ln x$ ergibt

$$\begin{aligned}\ln n! &= \int_1^n \ln t\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\ln n + \int_1^n \frac{H(t)}{t}\,\mathrm{d}t \\ &= \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln n - n + 1 + \underbrace{\int_1^\infty \frac{H(t)}{t}\,\mathrm{d}t}_{=:\,\alpha} - \int_n^\infty \frac{H(t)}{t}\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Dabei ist H die 1-periodische Funktion mit $H(t) = t - \frac{1}{2}$ für $t \in (0;1)$ und $H(0) = 0$. (Zur Existenz der uneigentlichen Integrale: Mit einer Stammfunktion Φ zu H ergibt partielle Integration

$$\int_1^A \frac{H(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \left.\frac{\Phi(t)}{t}\right|_1^A + \int_1^A \frac{\Phi(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Da jede Stammfunktion zu H beschränkt ist, existieren für $A \to \infty$ Grenzwerte.) Die Substitution $t = n + \tau$ führt unter Beachtung der Periodizität von H zu

$$\ln n! = \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln n - n + 1 + \alpha - \int_0^\infty \frac{H(\tau)}{\tau+n}\,\mathrm{d}\tau.$$

Diese Darstellung legt es nahe, $x^{x-1/2}\,\mathrm{e}^{-x}$ als wesentlichen Bestandteil eines Näherungswertes für $\Gamma(x)$ für große x heranzuziehen.

Unser Ziel ist es, nachzuweisen, daß die auf $(0;\infty)$ durch

$$G(x) := x^{x-1/2}\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{e}^{\mu(x)} \quad \text{mit} \quad \mu(x) := -\int_0^\infty \frac{H(t)}{t+x}\,\mathrm{d}t$$

definierte Funktion mit der Gammafunktion bis auf einen konstanten Faktor übereinstimmt, und schließlich diesen Faktor zu berechnen.

Vorweg leiten wir eine Reihendarstellung der Funktion μ her. Da H die Periode 1 hat, gilt

$$\mu(x) = -\sum_{n=0}^{\infty}\int_n^{n+1} \frac{H(t)}{t+x}\,\mathrm{d}t = -\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^1 \frac{H(t)}{t+n+x}\,\mathrm{d}t.$$

Mit

$$g(x) := -\int_0^1 \frac{t-\frac{1}{2}}{t+x}\,\mathrm{d}t = \left(x+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - 1$$

folgt also die Reihendarstellung

$$\mu(x) = \sum_{n=0}^{\infty} g(x+n). \tag{11}$$

Wir zeigen jetzt, daß G die Voraussetzungen b) und c) des Satzes von Bohr-Mollerup erfüllt.

Nachweis der Funktionalgleichung: Eine einfache Umformung zeigt, daß $G(x+1) = xG(x)$ genau dann erfüllt ist, wenn

$$\mu(x) - \mu(x+1) = \left(x+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - 1$$

gilt. Das ist nach der Reihendarstellung für $\mu(x)$ tatsächlich der Fall.

Nachweis der logarithmischen Konvexität: Wegen

$$\left(\ln x^{x-1/2}\,\mathrm{e}^{-x}\right)'' = \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} > 0 \quad \text{für } x > 0$$

ist der Faktor $x^{x-1/2}\,\mathrm{e}^{-x}$ logarithmisch-konvex. Ferner sind wegen $g'' > 0$ alle Funktionen $g(x+n)$ und damit die Funktion μ konvex. G ist also logarithmisch-konvex.

Zwischenergebnis: *Die Funktion G erfüllt die Voraussetzungen b) und c) des Satzes von Bohr-Mollerup; es gibt also eine Konstante c mit*

$$\Gamma(x) = c\,G(x), \quad x > 0.$$

Bevor wir c berechnen, leiten wir noch eine wichtige Abschätzung der Funktion μ her. Wir gehen aus von der für $|y| < 1$ gültigen Entwicklung

$$\frac{1}{2}\ln\frac{1+y}{1-y} = y + \frac{y^3}{3} + \frac{y^5}{5} + \ldots$$

Wir setzen $y = 1/(2x+1)$, multiplizieren die entstandene Identität mit $2x+1$, bringen das erste Glied der rechten Seite nach links und erhalten

$$g(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right)\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - 1 = \frac{1}{3(2x+1)^2} + \frac{1}{5(2x+1)^4} + \frac{1}{7(2x+1)^6} + \ldots$$

In der rechts stehenden Reihe ersetzen wir die Faktoren $5, 7, 9, \ldots$ durch 3 und erhalten eine geometrische Reihe mit dem Wert

$$\frac{1}{3(2x+1)^2} \cdot \frac{1}{1 - \dfrac{1}{(2x+1)^2}} = \frac{1}{12x(x+1)} = \frac{1}{12x} - \frac{1}{12(x+1)}.$$

Damit folgt $0 < g(x) < \dfrac{1}{12x} - \dfrac{1}{12(x+1)}$ und weiter mit (11)

$$0 < \mu(x) < \frac{1}{12x}.$$

Wir kommen jetzt zur Berechnung der Konstanten c. Wegen $\mu(x) \to 0$ für $x \to \infty$ gilt

$$c = \lim_{x\to\infty} \frac{\Gamma(x)}{x^{x-1/2}\,\mathrm{e}^{-x}}.$$

Mit $x = n \in \mathbb{N}$ bzw. $x = 2n$ folgt

$$\begin{aligned} c = \frac{c^2}{c} &= \lim_{n\to\infty} \frac{(n-1)!^2}{n^{2n-1}\,\mathrm{e}^{-2n}} \cdot \frac{(2n)^{2n-1/2}\,\mathrm{e}^{-2n}}{(2n-1)!} \\ &= 2\lim_{n\to\infty} \frac{2\cdot 4\cdots(2n-2)\sqrt{2n}}{1\cdot 3\cdots(2n-1)} = \sqrt{2\pi}. \end{aligned}$$

Zuletzt wurde das Wallissche Produkt 11.5.II. verwendet.

Wir fassen zusammen:

Stirlingsche Formel: *Für $x > 0$ gilt*

$$\boxed{\Gamma(x) = \sqrt{2\pi}x^{x-1/2}\,\mathrm{e}^{-x+\mu(x)} \quad \textit{mit } 0 < \mu(x) < \frac{1}{12x}.}$$

In den Anwendungen wird häufig $\sqrt{2\pi}x^{x-\frac{1}{2}}\,\mathrm{e}^{-x}$ als Näherungswert für $\Gamma(x)$ bei großem Argument herangezogen. Wegen $\mu(x) > 0$ ist dieser Wert zu klein. Der relative Fehler aber ist kleiner als $\exp\left(\dfrac{1}{12x}\right) - 1$; schon für $x > 10$ ist er kleiner als 1 Prozent.

17.4 Aufgaben

1. Man berechne $\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)$ für $n \in \mathbb{N}$.

2. Sei a eine reelle Zahl $\neq 0,1,2,\ldots$. Man zeige

$$\left|\binom{a}{n}\right| n^{a+1} \to \left|\frac{1}{\Gamma(-a)}\right| \quad \text{für } n \to \infty.$$

Anwendung: Im Fall $a \geq 0$ konvergiert die Binomialreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \binom{a}{n} x^n$ normal auf $[-1;1]$.

3. Die *Betafunktion*. Diese wird für $(x,y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ definiert durch

$$B(x,y) := \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$

Man zeige, daß sie folgende Integraldarstellung besitzt:

$$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t.$$

4. Man setze in 3. $x = \dfrac{m}{n}$ $(m,n \in \mathbb{N})$ und $y = \dfrac{1}{2}$ und zeige

$$\int_0^1 \frac{t^{m-1}}{\sqrt{1-t^n}}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{m}{n}\right)}{n\Gamma\left(\frac{m}{n}+\frac{1}{2}\right)}.$$

Man folgere mit dem Ergänzungssatz und der Verdopplungsformel:

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^4}} = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)^2}{\sqrt{32\pi}}, \qquad \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^3}} = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)^3}{\sqrt{3}\sqrt[3]{16\pi}}.$$