§ 30 Die Gammafunktion und die Stirlingsche Formel

Die Gammafunktion Γ ist eine der wichtigsten nicht elementaren Funktionen der Analysis. Sie interpoliert stetig die Fakultäten $t \to t!$ unter Beibehaltung der Funktionalgleichung $t! = t(t-1)!$. Man bezeichnet allerdings nicht $t!$, sondern $(t-1)!$ mit $\Gamma(t)$ für $t \in \mathbb{N}$. Daher lautet die Funktionalgleichung der gesuchten Funktion $\Gamma : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$

$$\Gamma(t+1) = t\,\Gamma(t).$$

Wegen des Zusammenhangs mit den Fakultäten spielt die Gammafunktion auch eine Rolle in der Kombinatorik und Wahrscheinlichkeitstheorie. Sie wird ferner benutzt zur Berechnung von Integralen (30.7(ii) ist ein Beispiel dafür), und dient in diesem Paragraphen auch zur asymptotischen Berechnung der Binomialkoeffizienten (siehe 30.11). Die Kenntnis des asymptotischen Verhaltens der Binomialkoeffizienten ermöglicht auch eine Untersuchung der Binomialreihe in den Randpunkten -1 und 1 (siehe 30.12).

Ein Zusammenhang von Gammafunktion und Zetafunktion wird schließlich in 30.8 dargestellt. Die folgende Definition der Gammafunktion geht auf Euler aus dem Jahre 1729 zurück. Die in 30.6 gegebene Darstellung der Gammafunktion stammt von Gauß aus dem Jahre 1812.

30.1 Die Gammafunktion

Für $t \in \mathbb{R}_+$ existiert

$$\Gamma(t) := \int_{0+}^{\infty} x^{t-1} e^{-x}\, dx.$$

$\Gamma(t)$ heißt *Gammafunktion* (an der Stelle t).

Beweis. Sei $t \in \mathbb{R}_+$ fest. Dann ist $f := x^{t-1}e^{-x}$ auf $]0,\infty[$ stetig. Zum Nachweis der Konvergenz des angegebenen Integrals soll 29.15 angewandt werden mit $g_1 := x^{t-1}|]0,1]$ und $g_2(x) := \frac{c}{x^2}[1,\infty[$ mit einem noch zu wählendem $c \in \mathbb{R}_+$. Es sind $\int_0^1 g_1\,dx$ und $\int_1^\infty g_2\,dx$ konvergent (siehe 29.4(i) und 29.1(ii)). Somit ist die Bedingung (I) von 29.15 erfüllt.

Es ist $|f| \le g_1$ auf $]0,1]$. Da $\lim_{u\to\infty} u^{t+1}e^{-u} = 0$ ist (siehe 19.8(iii)), folgt $u^{t+1}e^{-u} \le 1$ für genügend große u. Somit erhalten wir wegen der Stetigkeit von $x^{t+1}e^{-x}$ die Existenz eines $c \in \mathbb{R}_+$ mit $x^{t+1}e^{-x} \le c$ auf $[1,\infty[$. Also ist $|f| \le \frac{c}{x^2} = g_2$ auf $[1,\infty[$. Daher ist auch Bedingung (II) von 29.15 erfüllt, und wir erhalten die Konvergenz des Integrals nach 29.15. □

Die folgende Überlegung zeigt, daß die Jensensche Ungleichung nicht nur aus der Konvexität der Funktion folgt, sondern sogar äquivalent zur Konvexität ist.

30.2 Äquivalente Bedingung zur Konvexität

Sei I ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$. Dann ist f genau dann konvex, wenn für beliebige $t_1, t_2 \in I$ und beliebiges $0 < \lambda < 1$ gilt:

$$f(\lambda t_1 + (1-\lambda)t_2) \le \lambda f(t_1) + (1-\lambda)f(t_2).$$

Beweis. „$\Rightarrow$" Die angegebene Bedingung folgt aus der Jensenschen Ungleichung für $n = 2$, wenn man $\lambda := \lambda_1$ setzt und somit $\lambda_2 = 1 - \lambda_1 = 1 - \lambda$ (siehe 23.7).

„$\Leftarrow$" Seien zur Rückrichtung $t_1, t_2 \in I$ und $t_1 < t < t_2$ gegeben. Es ist zu zeigen (siehe Definition 23.1):

(1) $$f(t) \le f(t_1) + \tfrac{f(t_2)-f(t_1)}{t_2-t_1}(t-t_1).$$

Wegen $t_1 < t < t_2$ gibt es ein $\lambda \in]0,1[$ mit $t = \lambda t_1 + (1-\lambda)t_2$ (siehe 2.5). Also ist

(2) $$f(t) \le \lambda f(t_1) + (1-\lambda)f(t_2) = f(t_1) + (1-\lambda)(f(t_2) - f(t_1))$$

nach Voraussetzung. Aus (2) folgt nun aber (1) wegen $1 - \lambda = \frac{t-t_1}{t_2-t_1}$. □

Die Gammafunktion Γ ist nicht nur selbst konvex, sondern es ist sogar $ln \circ \Gamma$ konvex. Man spricht in einem solchen Fall von logarithmischer Konvexität.

30.3 Logarithmische Konvexität

Sei I ein Intervall und $F : I \to \mathbb{R}_+$. Dann heißt F *logarithmisch konvex,* wenn eine der beiden äquivalenten Bedingungen gilt:

(i) $ln \circ F$ ist konvex.

(ii) Für beliebige $t_1, t_2 \in I$ und beliebiges $0 < \lambda < 1$ gilt:

$$F(\lambda t_1 + (1-\lambda)t_2) \le (F(t_1))^\lambda (F(t_2))^{1-\lambda}.$$

Beweis. ***(i)⇒(ii)*** Nach Voraussetzung gilt für $t_1, t_2 \in I$ und $0 < \lambda < 1$ (siehe 30.2):

$ln(F(\lambda t_1 + (1-\lambda)t_2) \leq \lambda ln(F(t_1)) + (1-\lambda) ln(F(t_2)) = ln[(F(t_1))^{\lambda}(F(t_2))^{1-\lambda}]$.

Anwendung der monoton wachsenden Exponentialfunktion auf diese Ungleichung liefert (ii).

(ii)⇒(i) Seien t_1, t_2 und $0 < \lambda < 1$ gegeben.

Es ist zu zeigen (vgl. 30.2)

(1) $$ln(F(\lambda t_1 + (1-\lambda)t_2)) \leq \lambda ln(F(t_1)) + (1-\lambda) ln(F(t_2)).$$

Wendet man die monoton wachsende Logarithmusfunktion auf die nach Voraussetzung gültige Ungleichung in (ii) an, so erhält man

$ln(F(\lambda t_1 + (1-\lambda)t_2)) \leq ln[((F(t_1))^{\lambda}(F(t_2))^{1-\lambda}] = \lambda ln(F(t_1)) + (1-\lambda) ln(F(t_2))$,

also die zu beweisende Beziehung in (1). □

30.4 Eigenschaften der Gammafunktion

Es ist Γ eine Funktion von $\mathbb{R}_+$ in $\mathbb{R}_+$ mit

(i) $\Gamma(1) = 1$;

(ii) $\Gamma(t+1) = t\Gamma(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}_+$;

(iii) Γ ist logarithmisch konvex;

(iv) $\Gamma(n) = (n-1)!$ für $n \in \mathbb{N}$.

Beweis. Wegen $\Gamma(t) \geq \int_1^2 x^{t-1} e^{-x}\,dx \underset{28.6}{>} 0$ ist $\Gamma(t) \in \mathbb{R}_+$.

(ii) Seien $a < b$ aus $\mathbb{R}_+$. Dann folgt mit partieller Integration (siehe 27.16)

$$\int_a^b x^t e^{-x}\,dx = -x^t e^{-x}|_a^b + t\int_a^b x^{t-1} e^{-x}\,dx.$$

Mit $a \downarrow 0$ folgt (benutze 17.5(iv) für $\lim_{a\downarrow 0} a^t = 0$)

$$\int_0^b x^t e^{-x}\,dx = -b^t e^{-b} + t\int_{0+}^b x^{t-1} e^{-x}\,dx.$$

Somit liefert $b \uparrow \infty$ (siehe die Definition der Gammafunktion in 30.1 und berücksichtige hierzu 29.9(iii), benutze ferner 19.8(iii) für $\lim_{b\to\infty} b^t e^{-b} = 0$)

$$\int_0^\infty x^t e^{-x}\,dx = t\Gamma(t).$$

Wegen $\Gamma(t+1) = \int_{0+}^\infty x^t e^{-x}\,dx \underset{29.12(\mathrm{i})}{=} \int_0^\infty x^t e^{-x}\,dx$ folgt die Behauptung.

(i) $\Gamma(1) = \int_{0+}^\infty e^{-x}\,dx = \lim_{b\to\infty}(\lim_{a\downarrow 0}\int_a^b e^{-x}\,dx) = \lim_{b\to\infty}(1 - e^{-b}) = 1$.

(iv) Der Beweis erfolgt durch Induktion nach $n \in \mathbb{N}$:

(A) ist nach (i) erfüllt. (S) $\Gamma(n+1) \underset{(\mathrm{ii})}{=} n\Gamma(n) \underset{(\mathrm{I.V.})}{=} n(n-1)! = n!$.

(iii) Seien $t_1, t_2 \in \mathbb{R}_+$ und $0 < \lambda < 1$. Setze $p := 1/\lambda$ und $q := 1/(1-\lambda)$. Dann gilt:

(1) $$\tfrac{1}{p} + \tfrac{1}{q} = 1.$$

Zur Anwendung der Hölderschen Ungleichung (siehe 28.5(iv)) setze

(2) $$f(x) := x^{\frac{t_1-1}{p}} e^{-\frac{x}{p}}, g(x) := x^{\frac{t_2-1}{q}} e^{-\frac{x}{q}}.$$

Dann folgt für $0 < a < b$

(3) $$\int_a^b f \cdot g \, dx \underset{28.5(\text{iv})}{\leq} |\int_a^b f^p \, dx|^{1/p} |\int_a^b g^q \, dx|^{1/q}.$$

Wegen (2) und (1) gilt:

(4) $$f(x)g(x) = x^{\frac{t_1}{p}+\frac{t_2}{q}-1} e^{-x},$$

(5) $$f^p(x) = x^{t_1-1}e^{-x}, g^q(x) = x^{t_2-1}e^{-x}.$$

Aus (3)–(5) erhält man

(6) $$\int_a^b x^{\frac{t_1}{p}+\frac{t_2}{q}-1} e^{-x} \, dx \leq [\int_a^b x^{t_1-1}e^{-x} \, dx]^{1/p} [\int_a^b x^{t_2-1}e^{-x} \, dx]^{1/q}.$$

Läßt man zunächst $a \downarrow 0$ und dann $b \to \infty$ streben, so folgt

$$\Gamma(\tfrac{t_1}{p} + \tfrac{t_2}{q}) \leq (\Gamma(t_1))^{1/p} (\Gamma(t_2))^{1/q},$$

also

$$\Gamma(\lambda t_1 + (1-\lambda)t_2) \leq (\Gamma(t_1))^{\lambda} (\Gamma(t_2))^{1-\lambda}.$$

Somit ist Γ logarithmisch konvex (siehe 30.3). □

Die Gammafunktion Γ ist nicht die einzige Funktion von $\mathbb{R}_+$ in $\mathbb{R}_+$ mit

$$\Gamma(1) = 1 \text{ und } \Gamma(t+1) = t\Gamma(t) \text{ für } t \in \mathbb{R}_+.$$

Ist nämlich $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ eine Funktion mit $f(1) = 1$ und der Periode 1, d.h. mit $f(t+1) = f(t)$ für $t \in \mathbb{R}_+$, so ist $f \cdot \Gamma$ ebenfalls eine Funktion von $\mathbb{R}_+$ in $\mathbb{R}_+$ mit

$$(f \cdot \Gamma)(1) = 1 \text{ und } (f \cdot \Gamma)(t+1) = t(f \cdot \Gamma)(t);$$

ein Beispiel für eine solche beliebig oft differenzierbare Funktion ist etwa $f = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\cos(2\pi x)$. Um so bemerkenswerter ist, daß mit der zusätzlichen Forderung der logarithmischen Konvexität die Gammafunktion eindeutig festgelegt ist.

30.5 Charakterisierung der Gammafunktion (Satz von Bohr-Mollerup 1922)

Die Gammafunktion ist die einzige Funktion $F : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ mit

(i) $F(1) = 1$;

(ii) $F(t+1) = tF(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}_+$;

(iii) F ist logarithmisch konvex.

Beweis. Nach 30.4 ist die Gammafunktion Γ eine Abbildung von $\mathbb{R}_+$ in $\mathbb{R}_+$, die (i)–(iii) erfüllt. Es genügt daher zu zeigen, daß eine Funktion $F : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ durch die drei Bedingungen (i)–(iii) eindeutig bestimmt ist:
Zunächst folgt aus der Funktionalgleichung (ii) induktiv:

(1) $$F(t+n) = (t+n-1)\dots(t+1) \cdot t \cdot F(t) \text{ für } t \in \mathbb{R}_+, n \in \mathbb{N}$$

und somit insbesondere wegen $F(1) = 1$:

(2) $$F(n) = (n-1)! \text{ für } n \in \mathbb{N}.$$

Wegen (1) und $F(1) = 1$ genügt es zu zeigen, daß $F(t)$ für $t \in]0,1[$ durch die angegebenen Bedingungen eindeutig bestimmt ist. Wir zeigen hierzu, daß aus (i)–(iii) folgt:

(3) $$F(t) = \lim_{n\to\infty} \tfrac{(n-1)!n^t}{t(t+1)\dots(t+n-1)} \text{ für } t \in]0,1[.$$

Wir benutzen die logarithmische Konvexität von F. Sei hierzu $t \in]0,1[$ fest. Dann gilt für $n \in \mathbb{N}$
$$n + t = t(n+1) + (1-t)n$$
und somit folgt aus der logarithmischen Konvexität (setze in 30.3(ii) für $\lambda := t$, $t_1 := n+1$ und für $t_2 := n$):

(4) $$F(n+t) \le (F(n+1))^t (F(n))^{1-t} \underset{(2)}{=} (n!)^t [(n-1)!]^{1-t} = (n-1)!n^t.$$

Entsprechend folgt aus $\quad n+1 = t(n+t) + (1-t)(n+1+t)$:

(5) $$n! = F(n+1) \le (F(n+t))^t (F(n+1+t))^{1-t} \underset{\text{(ii)}}{=} (n+t)^{1-t} F(n+t).$$

Aus (4) und (5) ergibt sich
$$n!\,(n+t)^{t-1} \le F(n+t) \le (n-1)!\,n^t.$$

Zusammen mit (1) erhalten wir daher

(6) $$a_n := \tfrac{n!(n+t)^{t-1}}{t(t+1)\dots(t+n-1)} \le F(t) \le \tfrac{(n-1)!n^t}{t(t+1)\dots(t+n-1)} =: b_n.$$

Also gilt $\frac{a_n}{b_n} \le \frac{F(t)}{b_n} \le 1$. Somit folgt nach dem Sandwichsatz $\lim_{n\to\infty} \frac{F(t)}{b_n} = 1$. Daher ist auch $\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{F(t)} = 1$, d.h. es gilt (3). □

Mit Hilfe von 30.5 erhalten wir auch

30.6 Darstellung der Gammafuntion

Für jedes $t \in \mathbb{R}_+$ ist
$$\Gamma(t) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!\,n^t}{t\cdot(t+1)\dots(t+n)} .$$

Beweis. Nach (3) in 30.5 gilt für $t \in]0,1[$

(1) $$\Gamma(t) = \lim_{n\to\infty} \tfrac{(n-1)!n^t}{t(t+1)\dots(t+n-1)}.$$

Wegen $\frac{n}{t+n} \to 1$ für $n \to \infty$ folgt aus (1) die Behauptung für $t \in]0,1[$. Wegen $\Gamma(1) = 1$ gilt die Behauptung auch für $t = 1$.

Es reicht daher zu zeigen: Gilt die Behauptung für t, so auch für $t+1$.

Dies folgt aber aus

$$\begin{aligned}\Gamma(t+1) = t\Gamma(t) &= t \cdot \lim_{n\to\infty} \tfrac{n!n^t}{t(t+1)\dots(t+n)} = \lim_{n\to\infty} \tfrac{n!n^{t+1}}{(t+1)\dots(t+n)\cdot n} \\ &= \lim_{n\to\infty} \tfrac{n!n^{t+1}}{(t+1)\dots(t+n)(t+1+n)}.\end{aligned}$$
□

Diese zwei verschiedenen Darstellungen der Gammafunktion — einerseits als Integral in 30.1 und andererseits als Limes einer Folge in 30.6 — können oft zur Berechnung von Integralen verwandt werden:

30.7 Korollar

(i) $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$;

(ii) $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx = 1$.

Beweis. ***(i)*** Mit der in 30.6 angegebenen Darstellung von Γ folgt

(1) $$\Gamma(\tfrac{1}{2}) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!\sqrt{n}}{\frac{1}{2}[(1+1/2)\cdot(2+1/2)\cdot\ldots\cdot(n+1/2)]},$$

oder in äquivalenter Schreibweise

(2) $$\Gamma(\tfrac{1}{2}) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!\sqrt{n}}{[(1-1/2)(2-1/2)(3-1/2)\ldots(n-1/2)](n+1/2)} :$$

Multiplikation von (1) und (2) ergibt

$$\begin{aligned}\Gamma^2(1/2) &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n}{n+1/2}\right) \cdot \frac{(n!)^2}{(1+1/2)\cdot(1-1/2)\cdot(2+1/2)\cdot(2-1/2)\cdot\ldots\cdot(n+1/2)(n-1/2)} \\ &= 2\lim_{n\to\infty} \frac{\prod\limits_{k=1}^{n} k^2}{\prod\limits_{k=1}^{n}(k^2-1/4)} = 2\prod_{k=1}^{\infty}\frac{4k^2}{4k^2-1} \underset{27.18}{=} 2\cdot\frac{\pi}{2} = \pi.\end{aligned}$$

Also ist $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.

(ii) Für $0 < a < b$ liefert die Substitution $x = \varphi(u) = \sqrt{2}\sqrt{u}$ mit $\varphi'(u) = \frac{1}{2}\sqrt{2}u^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{2}}u^{-1/2}$ zunächst

$$\int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_{a^2/2}^{b^2/2} e^{-u}u^{-1/2}du.$$

Läßt man nun $a \downarrow 0$ und anschließend $b \to \infty$ streben, so erhält man

(1) $$\int_0^\infty e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_{0+}^{\infty} e^{-u}u^{-1/2}du = \frac{1}{\sqrt{2}}\Gamma(\tfrac{1}{2}) \underset{(i)}{=} \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\pi} = \frac{1}{2}\sqrt{2\pi}.$$

Wegen $\int_{-b}^{-a} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx = \int_a^b e^{-\frac{u^2}{2}} du$ (betrachte die Substitution $x = \varphi(u) = -u$) folgt:

(2) $$\int_{-\infty}^0 e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx = \int_0^\infty e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx = \frac{1}{2}\sqrt{2\pi}.$$

Also folgt die Behauptung aus (1) und (2), da nach Definition des uneigentlichen Riemann-Integrals (siehe 29.9) gilt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x}{2}^2}\, dx = \int_{-\infty}^0 e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx + \int_0^\infty e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx. \qquad \square$$

Nicht nur die Gammafunktion, sondern auch die Riemannsche Zetafunktion läßt sich durch uneigentliche Integrale definieren. Zwischen beiden Funktionen besteht die folgende Relation:

30.8 Beziehung zwischen der Gammafunktion und der Zetafunktion

Für jedes $s > 1$ gilt:

$$\Gamma(s) \cdot \zeta(s) = \int_{0+}^{\infty} \frac{x^{s-1}}{e^x - 1}\, dx.$$

Also ist $\zeta(s) = \int_{0+}^{\infty} \frac{x^{s-1}e^{-x}}{1-e^{-x}}\, dx \cdot (\int_{0+}^{\infty} x^{s-1}e^{-x}\, dx)^{-1}$.

Beweis. Sei $0 < a < b$. Dann gilt für $t \in [a, b]$ wegen $e^{-t} \leq e^{-a} < 1$

$$\frac{t^{s-1}}{e^t - 1} = t^{s-1}e^{-t}\frac{1}{1-e^{-t}} = t^{s-1}e^{-t}\sum_{n=0}^{\infty}(e^{-t})^n = \sum_{n=1}^{\infty} t^{s-1}e^{-nt}.$$

Wegen $\| x^{s-1}e^{-nx} \|_{[a,b]} \leq b^{s-1} \| e^{-nx} \|_{[a,b]} = b^{s-1}(e^{-a})^n$ ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} x^{s-1}e^{-nx}$ normal und somit gleichmäßig konvergent (siehe 20.8(ii)) gegen $x^{s-1}/(e^x - 1)$. Daher erhalten wir (benutze 26.12(ii) und setze hierzu $f_n := \sum_{k=1}^{n} x^{s-1}e^{-kx}$):

$$(1) \qquad \begin{cases} \int_a^b \frac{x^{s-1}}{e^x-1}\, dx \underset{26.12\text{(ii)}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b x^{s-1}e^{-nx}\, dx \\ \qquad \overset{x=u/n}{\underset{27.11}{=}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \int_{na}^{nb} u^{s-1}e^{-u}du \leq \zeta(s)\Gamma(s). \end{cases}$$

Also existiert $\int_{0+}^{\infty} \frac{x^s-1}{e^x-1}\, dx$ nach 29.13, und es gilt daher (siehe 29.9(iii)):

$$\int_{0+}^{\infty} \frac{x^{s-1}}{e^x-1}\, dx \leq \zeta(s)\Gamma(s).$$

Es bleibt zu zeigen:

$$(2) \qquad \int_{0+}^{\infty} \frac{x^{s-1}}{e^x-1}\, dx \geq \zeta(s)\Gamma(s).$$

Nun gilt für $0 < a < b$ und jedes $N \in \mathbb{N}$ (benutze die Gleichung in (1)):

$$\int_a^b \frac{x^{s-1}}{e^x-1}\, dx \geq \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^s} \int_{na}^{nb} u^{s-1}e^{-u}du.$$

Mit $a \downarrow 0$ erhalten wir für jedes $N \in \mathbb{N}$

$$\int_{0+}^{b} \frac{x^{s-1}}{e^x-1}\, dx \geq \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^s} \int_{0+}^{nb} u^{s-1}e^{-u}du.$$

$b \to \infty$ liefert daher für jedes $N \in \mathbb{N}$

$$\int_{0+}^{\infty} \frac{x^{s-1}}{e^x-1}\, dx \geq (\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^s}) \int_{0+}^{\infty} u^{s-1}e^{-u}du = (\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^s})\Gamma(s).$$

$N \to \infty$ liefert dann (2). □

30.9 Asymptotische Äquivalenz

Zwei Folgen $(a_n), (b_n)$ mit $a_n, b_n \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ heißen *asymptotisch äquivalent,* wenn gilt:

$$\lim_{n\to\infty} a_n/b_n = 1.$$

Man schreibt hierfür $(a_n) \sim (b_n)$ oder kürzer $a_n \sim b_n$.

Die Festsetzungen $a_n := n,\ b_n := n + \sqrt{n}$ liefern zwei asymptotisch äquivalente Folgen, für die $a_n - b_n$ nicht konvergent ist. Umgekehrt sind $a_n := \frac{1}{n}$ und $b_n := \frac{1}{n^2}$ zwei Folgen mit $a_n - b_n \to 0$, aber $\frac{a_n}{b_n} = n$ liefert eine divergente Folge, also sind (a_n) und (b_n) nicht äquivalent.

Eine Kenntnis des asymptotischen Verhaltens von $n!$ liefert die Stirlingsche Formel — eine Formel, die auch für die Wahrscheinlichkeitstheorie von Nutzen ist. Der Beweis der Stirlingschen Formel beruht auf einer Anwendung von Sehnentrapezregel und Wallisschem Produkt.

30.10 Stirlingsche Formel

Die Folge der Fakultäten $(n!)$ ist asymptotisch äquivalent zur Folge $\sqrt{2\pi n}\ n^n e^{-n}$. Genauer gilt für $n \geq 2$ die Fehlerabschätzung

$$\sqrt{2\pi n}\ n^n e^{-n} < n! < \sqrt{2\pi n}\ n^n e^{-n} e^{\frac{1}{12(n-1)}}.$$

Beweis. Wendet man die Sehnentrapezregel (s. 28.10) auf $f := ln(k+x)|[0,1]$ mit $k \in \mathbb{N}$ an, so erhält man wegen $f'' = -\frac{1}{(k+x)^2}$:

$$(1)\quad \begin{cases} \int_k^{k+1} ln(x)\,dx \underset{27.12(\mathrm{i})}{=} \int_0^1 ln(k+x)\,dx \\ \qquad\qquad \underset{28.10}{=} \frac{1}{2}(ln(k) + ln(k+1)) + \frac{1}{12}\cdot\frac{1}{\xi_k^2} \text{ mit einem } \xi_k \in [k, k+1]. \end{cases}$$

Summiert man in (1) von $k = 1$ bis $n-1$, so erhält man:

$$(2)\qquad \int_1^n ln(x)\,dx = \sum_{k=1}^n ln(k) - \frac{1}{2}ln(n) + \frac{1}{12}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{\xi_k^2}\ .$$

Nach 27.17(i) gilt ferner:

$$(3)\qquad \int_1^n ln(x)\,dx = n(ln(n) - 1) + 1.$$

Aus (2) und (3) erhält man

$$(4)\quad \begin{cases} \sum_{k=1}^n ln(k) = n(ln(n)-1) + 1 + \frac{1}{2}ln(n) - \frac{1}{12}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{\xi_k^2} \\ \qquad\qquad = (n+\frac{1}{2})ln(n) - n + r_n \quad\text{mit}\quad r_n := 1 - \frac{1}{12}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{\xi_k^2}. \end{cases}$$

Setze $c_n := e^{r_n}$ und wende die Exponentialfunktion auf (4) an (beachte $ln(n!) = \sum_{k=1}^n ln(k)$), dann ergibt sich:

$$(5)\qquad n! = n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n} c_n.$$

Wegen $0 < \frac{1}{\xi_k^2} \leq \frac{1}{k^2}$ existiert

$$(6)\qquad r := \lim_{n\to\infty} r_n = 1 - \frac{1}{12}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\xi_k^2},$$

und somit auch

$$(7)\qquad c := \lim_{n\to\infty} c_n = e^r.$$

Für die Aussage über die asymptotische Äquivalenz reicht es wegen (5) und (7) zu zeigen, daß $c = \sqrt{2\pi}$ ist. Nun gilt:

(8) $$\frac{c_n^2}{c_{2n}} = \frac{(n!)^2 e^{2n}}{n^{2n+1}} \frac{(2n)^{2n+\frac{1}{2}} e^{-2n}}{(2n)!} = \frac{\sqrt{2}\; 2^{2n}(n!)^2}{\sqrt{n}(2n)!},$$

(9) $$\lim_{n\to\infty} \frac{c_n^2}{c_{2n}} \underset{(7)}{=} \frac{c^2}{c} = c.$$

Das Wallissche Produkt (siehe 27.18) liefert

(10) $$\pi \underset{27.18}{=} \lim_{n\to\infty} 2 \cdot \prod_{k=1}^n \frac{(2k)^2}{(2k-1)(2k+1)} = \lim_{n\to\infty} 2 \frac{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4\cdot \ldots \cdot 2n\cdot 2n}{(1\cdot 3)\cdot(3\cdot 5)\cdot\ldots\cdot(2n-1)(2n+1)}.$$

Nun ist

$$\Big[2\prod_{k=1}^n \frac{(2k)^2}{(2k-1)(2k+1)}\Big]^{1/2}$$
$$= \sqrt{2}\frac{2\cdot 4\cdot \ldots \cdot 2n}{3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)\sqrt{2n+1}} = \frac{1}{\sqrt{n+1/2}} \frac{2^2\cdot 4^2\cdot \ldots\cdot (2n)^2}{2\cdot 3\cdot \ldots \cdot (2n-1)(2n)} = \frac{1}{\sqrt{n+1/2}} \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!}.$$

Also folgt aus (10) und der Stetigkeit der Wurzelfunktion:

(11) $$\sqrt{\pi} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1/2}} \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{2n}(n!)^2}{\sqrt{n}(2n)!}.$$

Somit erhalten wir:

$$c \underset{(8),(9)}{=} \sqrt{2}\lim_{n\to\infty} \frac{2^{2n}(n!)^2}{\sqrt{n}(2n)!} \underset{(11)}{=} \sqrt{2}\sqrt{\pi} = \sqrt{2\pi}.$$

Zur Fehlerabschätzung beachte, daß für $n \geq 2$ gilt:

$$0 < r_n - r \underset{(4),(6)}{=} \frac{1}{12}\sum_{k=n}^\infty \frac{1}{\xi_k^2} \leq \frac{1}{12}\sum_{k=n}^\infty \frac{1}{k^2} < \frac{1}{12}\int_{n-1}^\infty \frac{1}{x^2}\,dx = \frac{1}{12(n-1)}\ .$$

Also ist wegen $c_n = e^{r_n}$ und $c = e^r$

$$1 < c_n/c = e^{r_n - r} < \exp(\tfrac{1}{12(n-1)}).$$

Daher folgt aus (5) zusammen mit $c = \sqrt{2\pi} < c_n < \sqrt{2\pi}\exp(\frac{1}{12(n-1)})$:

$$n^{n+1/2}e^{-n}\sqrt{2\pi} \underset{(5)}{<} n! < n^{n+1/2}e^{-n}\sqrt{2\pi}\exp(\tfrac{1}{12(n-1)}). \qquad \square$$

30.11 Asymptotisches Verhalten von $|\binom{b}{n}|$

Sei $b \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{N}_0$. Dann gibt es eine Konstante $c = c(b) \in \mathbb{R}_+$ mit

$$|\tbinom{b}{n}| \sim c/n^{1+b}\ .$$

Beweis. Sei zunächst $b < 0$. Setze $t := -b$. Dann ist $t \in \mathbb{R}_+$, und es gilt:

$$|\tbinom{-t}{n}| = \frac{|-t(-t-1)\ldots(-t-n+1)|}{n!} = \frac{t(t+1)\ldots(t+n)}{n!(t+n)}.$$

Also ist

$$n^{1+b}|\tbinom{b}{n}| = n^{1-t}|\tbinom{-t}{n}| = \frac{t(t+1)\ldots(t+n)}{n!n^t(1+t/n)},$$

und somit gilt nach 30.6

(1) $$\lim_{n\to\infty} n^{1+b}|\tbinom{b}{n}| = \frac{1}{\Gamma(-b)}.$$

Daher gilt die Behauptung mit $c = \frac{1}{\Gamma(-b)}$. Es verbleibt der Fall $b \geq 0$ und $b \notin \mathbb{N}_0$. Also gibt es ein $k \in \mathbb{N}$ mit

$$k - 1 < b < k.$$

Daher folgt für $b' := b - k$ aus (1)

$$\lim_{n\to\infty} |\tbinom{b-k}{n}| n^{1+(b-k)} = \tfrac{1}{\Gamma(-b+k)}.$$

Also gilt $\lim_{n\to\infty} |\tbinom{b-k}{n-k}| (n-k)^{1+(b-k)} = \frac{1}{\Gamma(-b+k)}$ und durch Multiplikation mit $(\frac{n}{n-k})^{1+(b-k)} \to 1$ auch

(2) $$\lim_{n\to\infty} |\tbinom{b-k}{n-k}| n^{1+(b-k)} = \tfrac{1}{\Gamma(-b+k)}.$$

Es ist

(3) $$\tbinom{b}{n} = \tfrac{b(b-1)\ldots(b-k+1)}{n(n-1)\ldots(n-k+1)} \tbinom{b-k}{n-k}.$$

Also gilt:

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} |\tbinom{b}{n}| n^{1+b} &\underset{(3)}{=} \lim_{n\to\infty} \tfrac{n^k b(b-1)\ldots(b-k+1)}{n(n-1)\ldots(n-k+1)} |\tbinom{b-k}{n-k}| \cdot n^{1+b-k} \\ &\underset{(2)}{=} \tfrac{b(b-1)\ldots(b-k+1)}{\Gamma(-b+k)} \quad =: \; c(b). \end{aligned}$$

□

30.12 Konvergenz der Binomialreihe in den Randpunkten

(i) Für $b \geq 0$ ist die Binomialreihe $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{b}{n} x^n$ gleichmäßig konvergent in $[-1,1]$, und es gilt für alle $t \in [-1,1]$:

$$(1+t)^b = \textstyle\sum_{n=0}^{\infty} \binom{b}{n} t^n.$$

(ii) Für $-1 < b < 0$ ist die Binomialreihe für $t = 1$ konvergent und für $t = -1$ divergent. Es gilt für alle $t \in]-1,1]$:

$$(1+t)^b = \textstyle\sum_{n=0}^{\infty} \binom{b}{n} t^n.$$

(iii) Für $b \leq -1$ divergiert die Binomialreihe sowohl in $t = 1$ als auch in $t = -1$. Es gilt für alle $t \in]-1,1[$:

$$(1+t)^b = \textstyle\sum_{n=0}^{\infty} \binom{b}{n} t^n.$$

Beweis. Die Gültigkeit der angegebenen Potenzreihenentwicklung von $(1+t)^b$ folgt für $t \in]-1,1[$ in allen drei Fälle aus 21.14(i).

(i) Der Fall $b \in \mathbb{N}_0$ ist trivial (siehe auch 21.14(i)). Sei also $0 \leq b$ und $b \notin \mathbb{N}_0$. Nun ist $g : [-1,1] \to \mathbb{R}$, definiert durch

(1) $$g(t) := (1+t)^b, t \in [-1,1], \text{ stetig}$$

(siehe 17.5(iv)). Setzt man dann

(2) $$f(t) := \textstyle\sum_{n=0}^{\infty} \binom{b}{n} t^n,$$

so gilt nach der Vorbemerkung:

(3) $$f(t) = g(t) \text{ für } t \in]-1,1[.$$

Wegen $b \notin \mathbb{N}_0$ gibt es nach 30.11 eine Konstante K mit

$$|\tbinom{b}{n}| \leq \tfrac{K}{n^{1+b}} \text{ für } n \geq 1.$$

Somit haben wir für $n \geq 1$

(4) $$\| \tbinom{b}{n} x^n \|_{[-1,1]} \leq \tfrac{K}{n^{1+b}}.$$

Wegen $1+b>1$ ist $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{K}{n^{1+b}}$ konvergent, also $\sum_{n=0}^{\infty}\binom{b}{n}x^n$ normal konvergent auf $[-1,1]$ und somit gleichmäßig konvergent auf $[-1,1]$ (benutze 20.8(ii)). Daher ist die in (2) definierte Funktion f stetig auf $[-1,1]$ (benutze 20.13(i)). Hieraus und aus (1) und (3) folgt $f(t)) = g(t)$ für $t \in [-1,1]$, also die Darstellung von $(1+t)^b$ durch die angegebene Binomialreihe auch noch für $t=-1$ und $t=1$.

(ii) Für $-1<b<0$ gilt wiederum (benutze 30.11)

$$|\tbinom{b}{n}| \leq \tfrac{K}{n^{1+b}} \to 0.$$

Nun ist $\binom{b}{n} = (-1)^n|\binom{b}{n}|$ und $|\binom{b}{n+1}/\binom{b}{n}| = \frac{n-b}{n+1} < 1$. Also folgt die Konvergenz von $\sum_{n=0}^{\infty}\binom{b}{n}1^n$ (benutze das Leibnizsche Kriterium 9.14). Also ist die Binomialreihe an der Stelle 1 konvergent und daher auf $[0,1]$ gleichmäßig konvergent (siehe 20.12). Daher ist die durch die Binomialreihe definierte Funktion f auch an der Stelle 1 stetig (benutze 20.13(i)). Setzt man nun wieder

$$g(t) := (1+t)^b \text{ für } t \in\,]-1,1],$$

so gilt nach Vorbemerkung $f(t) = g(t)$ für $t \in\,]-1,1[$ und, wegen der Stetigkeit von f und g in 1, dann auch $f(1) = g(1)$, also die Darstellung von $(1+t)^b$ durch die angegebene Binomialreihe auch noch für $t=1$.

Es ist

$$\sum_{n=0}^{\infty}\tbinom{b}{n}(-1)^n = \sum_{n=0}^{\infty}|\tbinom{b}{n}|, \tag{5}$$

und es gilt $|\binom{b}{n}| \sim \frac{c}{n^{1+b}}$ (siehe 30.11). Da $1+b<1$ ist, ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c}{n^{1+b}}$ divergent, und somit auch die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}|\binom{b}{n}|$ (benutze z.B. 10.2). Wegen (5) ist daher die Binomialreihe an der Stelle -1 divergent.

(iii) Für $b \leq -1$ konvergiert $|\binom{b}{n}|$ wegen 30.11 nicht gegen Null. Also muß die Binomialreihe an den Stellen -1 und 1 divergent sein. □

Das folgende Beispiel zeigt, daß eine gleichmäßig konvergente Reihe, deren Gliederfolge aus differenzierbaren Funktionen besteht, gegen eine nicht differenzierbare Grenzfunktion konvergieren kann. (Zusammen mit Beispiel 22.11(ii) belegt dies die Bemerkungen vor 20.17). Genauer kann man sogar eine gleichmäßig konvergente Reihe finden, deren Gliederfolge aus Polynomen besteht, ohne daß die Grenzfunktion differenzierbar sein muß.

30.13 Beispiel

Setze $f_n := \sum_{k=0}^{n}\binom{1/2}{n}x^k|[-1,1]$. Dann konvergiert f_n gleichmäßig auf $[-1,1]$ gegen $\sqrt{1+x}$ (siehe 30.12(i)). Wegen $|t^2-1| \leq 1$ für $t \in [-1,1]$ konvergiert also $\sum_{k=0}^{n}\binom{1/2}{n}(x^2-1)^k$ gleichmäßig auf $[-1,1]$ gegen $\sqrt{1+(x^2-1)} = |x|$.

Also ist die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty}\tbinom{1/2}{k}(x^2-1)^k,$$

deren Gliederfolge aus Polynomen besteht, eine gleichmäßig auf $[-1,1]$ konvergente Reihe, deren Grenzfunktion $|x|$ im Nullpunkt nicht differenzierbar ist.