Anhang: Existenz von Nullstellen von Polynomen über $\mathbb{C}$

Der analytische Gehalt des Fundamentalsatzes der Algebra besteht darin, dass jedes Polynom $p(X) \in \mathbb{C}[X]$ vom Grad $n = \deg p \geq 1$ <u>mindestens eine</u> Nullstelle $a \in \mathbb{C}$ besitzt. Spaltet man den zugehörigen Linearfaktor $(X-a)$ von $p(X)$ ab, so erhält man rekursiv schließlich die Linearfaktorzerlegung von $p(X)$.

<u>Satz</u>: Es sei $p(X) = \sum_{k=0}^{n} c_k X^k \in \mathbb{C}[X]$ ein Polynom vom Grad $n \geq 1$, $c_n \neq 0$.
Dann gibt es ein $a \in \mathbb{C}$ mit $p(a) = 0$.

<u>Beweis</u>: Es gilt für $x \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$:

$$p(x) = \underbrace{x^n}_{\xrightarrow{n\to\infty} \infty} \Big(\underbrace{c_n}_{\neq 0} + \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} \frac{c_k}{x^{n-k}}}_{\xrightarrow{n\to\infty} 0} \Big) \xrightarrow{n\to\infty} \infty.$$

Wir finden also ein $M > 0$, sodass für alle $x \in \mathbb{C}$ mit $|x| \geq M$ gilt: $|p(x)| > |c_0| = |p(0)|$.
Nun ist die Kreisscheibe $K = \{x \in \mathbb{C} \mid |x| \leq M\}$ abgeschlossen und beschränkt, also kompakt, und nicht leer wegen $0 \in K$. Die stetige Funktion $|p| : K \to \mathbb{R}_0^+$, $x \mapsto |p(x)|$ nimmt also ein Minimum an, sagen wir an einer Stelle $a \in K$. Es gilt $|p(a)| \leq |p(0)| = |c_0| < |p(x)|$ für alle $x \in K$ mit $|x| = M$; also ist $|a| \neq M$ und daher $|a| < M$, d.h. a liegt im Inneren von K.

Wir finden also ein $\varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon^{\mathbb{C}}(a) \subseteq K$. Wir unterscheiden nun 2 Fälle:

<u>1. Fall</u>: $|p(a)| = 0$. Dann ist a eine Nullstelle von p.

<u>2. Fall</u>: $|p(a)| > 0$. Wir führen diesen Fall zu einem Widerspruch:

Wir Taylor-entwickeln $p(X)$ um a: $p(X) = q(X-a)$
mit einem Polynom $q(Y) = \sum_{k=0}^{n} b_k Y^k \in \mathbb{C}[Y]$.

Man beachte, dass kein Restterm auftritt, weil p ein Polynom vom Grad n ist, also seine $n+1$-te Ableitung gleich 0 ist. Weil p den Grad n besitzt, ist $b_n = c_n \neq 0$, und nach Fallannahme gilt auch $q(0) = b_0 = p(a) \neq 0$.
Wir nehmen das kleinste $l \in \{1, \dots, n\}$ mit $b_l \neq 0$. Es gilt dann

$$q(y) = b_0 + b_l y^l + \sum_{k=l+1}^{n} b_k \underbrace{y^k}_{= o(|y|^l) \text{ für } y \to 0} = b_0 + b_l y^l + o(|y|^l) \text{ für } y \to 0.$$

Nun nehmen wir eine l-te Wurzel $w \in \mathbb{C}$ von $-\frac{b_0}{b_l} \in \mathbb{C}$, d.h. eine Lösung der Gleichung $w^l = -\frac{b_0}{b_l}$. Dass so eine Lösung w existiert, sieht man so: Schreiben wir $-\frac{b_0}{b_l} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ in Polarkoordinaten:

$-\frac{b_0}{b_\ell} = re^{i\varphi}$ mit $r>0$ und $\varphi \in \mathbb{R}$, so gilt für $w := r^{\frac{1}{\ell}} e^{i\frac{\varphi}{\ell}}$:

$$w^\ell = (r^{\frac{1}{\ell}})^\ell \, (e^{i\frac{\varphi}{\ell}})^\ell = r \, e^{i\frac{\varphi}{\ell}\cdot \ell} = re^{i\varphi} = -\frac{b_0}{b_\ell}.$$

Nun betrachten wir $|p(a+tw)|$ für $t>0$ in der Asymptotik $t\downarrow 0$:

Es gilt: $|p(a+tw)| = |q(tw)| = |b_0 + b_\ell (tw)^\ell + o(|tw|^\ell)|$

$$= |b_0 + b_\ell t^\ell \underbrace{w^\ell}_{= -\frac{b_0}{b_\ell}} + o(t^\ell)| = |b_0 - b_0 t^\ell + o(t^\ell)|$$

$$= |b_0(1-t^\ell)| + o(t^\ell) \underset{\text{für } 0<t<1}{=} |b_0|(1-t^\ell) + o(t^\ell) \underset{\text{für } t>0 \text{ genügend nahe bei } 0}{<} |b_0| = |p(a)|$$

Die Funktion $|p|$ nimmt also nahe bei a auch Werte kleiner als $|p(a)|$ an, im Widerspruch dazu, dass a eine Minimumstelle von $|p|$ ist. $\square$