Goniometrische Beziehungen

$\tan x = \sin x / \cos x \qquad \cot x = \cos x / \sin x$

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \qquad \tan x \cdot \cot x = 1$

$\sec^2 x - \tan^2 x = 1 \qquad \sin x \cdot \mathrm{cosec}\, x = 1$

$1 + \tan^2 x = 1/\cos^2 x \qquad 1 + \cot^2 x = 1/\sin^2 x$

$\sin^2 x = \tan^2 x / (1 + \tan^2 x) = 1 / (1 + \cot^2 x)$

Addition zweier Winkel

$\sin(x \pm y) = \sin x \cdot \cos y \pm \cos x \cdot \sin y$

$\cos(x+y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y$

$\cos(x-y) = \cos x \cdot \cos y + \sin x \cdot \sin y$

$\tan(x+y) = (\tan x + \tan y) / (1 - \tan x \cdot \tan y)$

$\tan(x-y) = (\tan x - \tan y) / (1 + \tan x \cdot \tan y)$

$\cot(x+y) = (\cot x \cdot \cot y - 1) / (\cot x + \cot y)$

$\cot(x-y) = (\cot x \cdot \cot y + 1) / (\cot x - \cot y)$

Summe und Differenz zweier Winkelfunktionen

$\sin x + \sin y = 2 \sin((x+y)/2) \cdot \cos((x-y)/2)$

$\sin x - \sin y = 2 \cos((x+y)/2) \cdot \sin((x-y)/2)$

$\cos x + \cos y = 2 \cos((x+y)/2) \cdot \cos((x-y)/2)$

$\cos x - \cos y = -2 \sin((x+y)/2) \cdot \sin((x-y)/2)$

$\cos x + \sin x = \sqrt{2} \cdot \sin(45° + x) = \sqrt{2} \cdot \cos(45° - x)$

$\cos x - \sin x = \sqrt{2} \cdot \sin(45° - x) = \sqrt{2} \cdot \cos(45° + x)$

$\tan x \pm \tan y = \sin(x \pm y) / (\cos x \cdot \cos y)$

$\cot x \pm \cot y = \pm \sin(x \pm y) / (\sin x \cdot \sin y)$

$\tan x + \cot y = \cos(x-y) / (\cos x \cdot \sin y)$

$\cot x - \tan y = \cos(x+y) / (\sin x \cdot \cos y)$

Auflösung doppelter Winkel

$\sin 2x = 2 \sin x \cos x = 2 \tan x / (1 + \tan^2 x)$

$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x = 2\cos^2 x - 1$

$\tan 2x = 2 \tan x / (1 - \tan^2 x) = 2(\cot x - \tan x)$

$\cot 2x = (\cot^2 x - 1) / (2 \cot x) = (\cot x - \tan x)/2$

Auflösung Vielfacher Winkel

$\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x$

$\cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$

$\sin 4x = 8 \cos^3 x \cdot \sin x - 4 \cos x \cdot \sin x$

$\cos 4x = 8 \cos^4 x - 8 \cos^2 x + 1$

$\sin 5x = 16 \sin x \cos^4 x - 12 \sin x \cos^2 x + \sin x$

$\cos 5x = 16 \cos^5 x - 20 \cos^3 x + 5 \cos x$

$\sin nx = n \sin x \cos^{n-1} x - \binom{n}{3} \sin^3 x \cos^{n-3} x +$
$\quad + \binom{n}{4} \sin^4 x \cos^{n-4} x - + \ldots$

$\cos nx = \cos^n x - \binom{n}{2} \sin^2 x \cos^{n-2} x +$
$\quad + \binom{n}{5} \sin^5 x \cos^{n-5} x - + \ldots$

$\tan 3x = (3 \tan x - \tan^3 x) / (1 - 3 \tan^2 x)$

$\tan 4x = (4 \tan x - 4 \tan^3 x) / (1 - 6 \tan^2 x + \tan^4 x)$

$\cot 3x = (-3 \cot x + \cot^3 x) / (3 \cot^2 x - 1)$

$\cot 4x = (1 - 6 \cot^2 x + \cot^4 x) / (-4 \cot x + 4 \tan^3 x)$

Auflösung halber Winkel

$\sin x/2 = \sqrt{(1 - \cos x)/2}$

$\mathrm{cox}\, x/2 = \sqrt{(1 + \cos x)/2}$

$\tan x/2 = \sqrt{(1 - \cos x) / (1 + \cos x)} =$
$\quad = \sin x / (1 + \cos x) = (1 - \cos x) / \sin x$

$\cot x/2 = \sqrt{(1 + \cos x) / (1 - \cos x)} =$
$\quad = \sin x / (1 - \cos x)$

$2 \sin^2 (x/2) = 1 - \cos x$

$2 \cos^2 (x/2) = 1 + \cos x$

Produkt trigonometrischer Funktionen

$\sin(x+y) \cdot \sin(x-y) = \cos^2 y - \cos^2 x$

$\cos(x+y) \cdot \cos(x-y) = \cos^2 y - \sin^2 x$

$\sin x \cdot \sin y = 1/2\, [\cos(x-y) - \cos(x+y)]$

$\sin x \cdot \cos y = 1/2\, [\sin(x-y) + \sin(x+y)]$

$\cos x \cdot \cos y = 1/2\, [\cos(x-y) + \cos(x+y)]$

$\tan x \cdot \tan y = (\tan x + \tan y) / (\cot x + \cot y)$

$\cot x \cdot \cot y = (\cot x + \cot y) / (\tan x + \tan y)$

$\tan x \cdot \cot y = (\tan x + \cot y) / (\cot x + \tan y)$

$\sin x \cdot \sin y \cdot \sin z = [\sin(x+y-z) +$
$\quad + \sin(y+z-a) + \sin(z+x-y) - \sin(x+y+z)]/4$

$\cos x \cdot \cos y \cdot \cos z = [\cos(x+y-z) +$
$\quad + \cos(y+z-a) + \cos(z+x-y) + \cos(x+y+z)]/4$

$\sin x \cdot \sin y \cdot \cos z = [-\cos(x+y-z) +$
$\quad + \cos(y+z-a) + \cos(z+x-y) - \cos(x+y+z)]/4$

$\sin x \cdot \cos y \cdot \cos z = [\sin(x+y-z) -$
$\quad - \sin(y+z-a) + \sin(z+x-y) + \sin(x+y+z)]/4$

Potenzen trigonometrischer Funktionen

$\sin^2 x = 1/2\, (1 - \cos 2x)$

$\cos^2 x = 1/2\, (1 + \cos 2x)$

$\tan^2 x = (1 - \cos 2x) / (1 + \cos 2x)$

$\sin^3 x = 1/4\, (3 \sin x - \sin 3x)$

$\cos^3 x = 1/4\, (3 \cos x + \cos 3x)$

$\sin^4 x = 1/8\, (\cos 4x - 4 \cos 2x + 3)$

$\cos^4 x = 1/8\, (\cos 4x + 4 \cos 2x + 3)$

$\sin^5 x = 1/16\, (10 \sin x - 5 \sin 3x + \sin 5x)$

$\cos^5 x = 1/16\, (10 \cos x + 5 \cos 3x + \cos 5x)$

$\sin^6 x = 1/32\, (10 - 15 \cos 2x + 6 \cos 4x - \cos 6x)$

$\cos^6 x = 1/32\, (10 + 15 \cos 2x + 6 \cos 4x + \cos 6x)$

Goniometrische Gleichung

$a \cos x + b \sin x = c$

Ansatz $y = \tan(x/2)$, d.h.

$\quad \cos x = (1-y^2)/(1+y^2)$ und $\sin x = 2y/(1+y^2)$

$\quad$ ergibt $y = \tan(x/2) = 1/(a+c)\, [b \pm \sqrt{a^2+b^2-c^2}]$

Ansatz $y = \tan(x/2)$ und

$\quad \alpha = (a+c)/b$ und $\beta = (a-c)/b$

$\quad$ ergibt $y = 1/\alpha\, [1 \pm \sqrt{1 + \alpha\beta}]$

Zahlenfolgen

Eine Zahlenfolge ist eine Funktion aus der Menge der natürlichen Zahlen in die Menge der reellen Zahlen.

Symbol: $(a_k) = (a_1; a_2; ...; a_k; ...)$

Partialsumme: $s_n = a_1 + a_2 + ... + a_n = \Sigma a_k$

G heißt obere Grenze ⇔

⇔ kleinste obere Schranke

G heißt untere Grenze ⇔

⇔ größte untere Schranke

ε-Umgebung von a ⇔

⇔ offenes Intervall $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$

Grenzwert

Grenzwert g von (a_k) ⇔ Für jedes positive ε gilt für fast alle a_n:

$a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$ bzw. $| a_n - g | < \varepsilon$

(a_k) heißt konvergent ⇔ Grenzwert existiert

(a_k) heißt divergent ⇔ Grenzwert existiert nicht

Nullfolge ⇔ Grenzwert = 0

Divergenz

bestimmt divergent ⇔ Grenzwert ∞ oder $-\infty$

unbestimmt divergent ⇔ Grenzwert existiert nicht

Arithmetische Zahlenfolgen

Form: $a, a+d, a+2d, a+3d, ..., a+ (k-1)d$,

d... Differenz

$a_k = a_1 + (k - 1) \cdot d$ $\qquad a_{k+1} - a_k = d$

$s_n = n/2 \cdot (a_1 + a_n) = n \cdot a_1 + d/2 \cdot n \cdot (n-1)$

d<0 fallende, d=0 konstante,

d>0 wachsende Folge

Differenzenfolge

Zu (a_k) ist (d_k) die Differenzenfolge, wenn

$d_k = a_{k+1} - a_k$

Arithmetische Folge n.Ordnung

..., wenn erst die n.te Differenzfolge konstant ist

Bildungsgesetz

$a_k = b_2(k - 1)^2+b_1(k-1)+b_0$ ... 2.Ordnung

$a_k = b_3(k - 1)^3+b_2(k - 1)^2+b_1(k-1)+b_0$ ... 3.Ordn.

Geometrische Zahlenfolgen

Form: $a, aq, aq^2, aq^3, ..., a \cdot q^{n-1}$, q... Quotient

$a_k = a_1 \cdot q^{k-1}$ $\qquad a_{k+1} / a_k = q$

$a_n = \sqrt{[a_{n-1} \cdot a_{n+1}]}$

Summenformel für q<>1

$s_n = a_1 \cdot (q^n - 1) / (q - 1) = (a_n q - a_1) / (q - 1)$

$q = (s_n - a_1) / (s_n - a_n)$

0<q<1 fallende, q=1 konstante, q>1 wachsende

q<0 alternierende Folge

Grenzwertsätze

Alle Grenzübergänge erfolgen $n \to \infty$

$\lim (a_n \pm b_n) = \lim a_n \pm \lim b_n$

$\lim (a_n \cdot b_n) = \lim a_n \cdot \lim b_n$

$\lim (a_n / b_n) = \lim a_n / \lim b_n$,

falls $\lim b_n <>0$

Grenzwerte (alle $n \to \infty$)

$\lim 1/n = 0$ $\qquad \lim \sqrt[n]{n} = 1$

$\lim a^n/n! = 0$ $\qquad \lim (1+1/n)^n = e$

$\lim n^k/a^n = 0$, für a>1, $k \in N$

$\lim k^n = 0$ für |k|<1, = 1 für k=1,

divergent für |k|>1

$\lim 1/(1+a^n) = 1$ für |a|<1, = 1/2 für a=1,

0 für |a|>1, divergent für a= -1

Grenzwert einer Funktion

Eine Funktion f(x) hat an der Stelle x_0 einen Grenzwert $g \in R$ ⇔ für jede gegen x_0 konvergierende Folge (x_n) die Folge der Funktionswerte $(f(x_n))$ gegen g strebt.

linksseitiger Grenzw. ... Konvergenz von links

rechtsseitiger Grenzw. ... Konvergenz von rechts

Grenzwertsätze für Funktionen

Alle Grenzübergänge erfolgen $x \to x_0$

$\lim [c \cdot u(x)] = c \cdot \lim u(x)$

$\lim [u(x) \pm v(x)] = \lim u(x) \pm \lim v(x)$

$\lim [u(x) \cdot v(x)] = \lim u(x) \cdot \lim v(x)$

$\lim [u(x) / v(x)] = \lim u(x) / \lim v(x)$,

falls $\lim v(x) <>0$

$\lim [\sqrt[n]{u(x)}] = \sqrt[n]{[\lim u(x)]}$

$\lim [u(x)^n] = [\lim u(x)]^n$

$\lim c^{u(x)} = c^{\lim u(x)}$; c...reell

$\lim \log_c u(x) = \log_c \lim u(x)$

Spezielle Grenzwerte

Grenzübergang $x \to 0$

$\lim \sin x / x =1$

$\lim \tan x / x =1$

$\lim \arctan 1/x = \pi/2$ (rechtsseitiger Grenzwert)

$\lim \arctan 1/x = - \pi/2$ (linksseitiger Grenzwert)

$\lim (a^x -1)/x = \ln a$ (a>0)

Maskelynsche Regel $\lim \sin x /(x \sqrt[3]{(\cos x)}) = 1$

Grenzübergang $x \to 1$

$\lim \ln x / (x-1) =1$

Grenzübergang $x \to a$

$\lim (x^n - a^n)/(x - a) = na^{n-1}$

Grenzübergang $x \to \infty$

$\lim x^n / a^n =0$; für a>1

$\lim x^n / e^n =0$

$\lim (1+1/x)^x = e$

$\lim \sin x / x = 0$

Differentiationsregeln für f(x)=...

Konstante	$f(x)=c$	$f'(x)=0$
Faktor	$f(x)=c\cdot v(x)$	$f'(x)=c\cdot v'(x)$
Summe	$f(x)=v(x)\pm u(x)$	$f'(x)=v'(x)\pm u'(x)$
Produkt	$f(x)=v(x)\cdot u(x)$	
	$f'(x)=v'(x)\cdot u(x)+v(x)\cdot u'(x)$	
3erProdukt	$f(x)=u(x)\cdot v(x)\cdot w(x)$	
	$f'(x)=u'(x)\cdot v(x)\cdot w(x)+u(x)\cdot v'(x)\cdot w(x)+$ $+u(x)\cdot v(x)\cdot w'(x)$	
Quotient	$f(x)=v(x)/u(x)$	
	$f'(x)=[v'(x)\cdot u(x)-v(x)\cdot u'(x)]/(u^2(x))$	
Kettenregel	$f(x)=u[v(x)]$	$f'(x)=u'[v(x)]\cdot v'(x)$

Ableitungsfunktionen

f(x)	f'(x)
x^n	$n\cdot x^{n-1}$
$1/x^n$	$-n/x^{n+1}$
$\sqrt{x}$	$1/(2\cdot\sqrt{x})$
$\sqrt[n]{x}$	$\sqrt[n]{x}/(nx)$
$\sqrt[n]{x^m}$	$m/n\cdot\sqrt[n]{x^{m-n}}$
x^x	$x^x\cdot(\ln x+1)$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$1/\cos^2 x = 1+\tan^2 x$
$\cot x$	$-1/\sin^2 x = -1-\cot^2 x$
e^x	e^x
a^x	$a^x\cdot\ln a$
f(x)	f'(x)
$\ln x$	$1/x$
$\log_a x$	$1/(x\cdot\ln a)$
$\arcsin x$	$1/\sqrt{(1-x^2)}$
$\arccos x$	$-1/\sqrt{(1-x^2)}$
$\arctan x$	$1/(1+x^2)$ für $\lvert x\rvert<1$
$\text{arccot}\, x$	$-1/(1+x^2)$ für $\lvert x\rvert<1$
$\sinh x$	$\cosh x$
$\cosh x$	$\sinh x$
$\tanh x$	$1/\cosh^2 x = 1-\tanh^2 x$
$\coth x$	$-1/\sinh^2 x = 1-\coth^2 x$
$\text{arsinh}\, x$	$1/\sqrt{[1+x^2]}$
$\text{arcosh}\, x$	$1/\sqrt{[x^2-1]}$
$\text{artanh}\, x$	$1/(1-x^2)$ für $\lvert x\rvert<1$
$\text{arcoth}\, x$	$1/(1-x^2)$ für $\lvert x\rvert>1$
$\ln(f(x))$	$f'(x)/f(x)$

Differentiation der Umkehrfunktion

Ist $x=g(y)$ Umkehrfunktion von $y=f(x)$

$\Rightarrow f'(x)\cdot g'(y)=1$

Logarithmische Differentiation

$y=u(x)^{v(x)} \Rightarrow \ln y = v(x)\ln u(x) \Rightarrow$

$\Rightarrow y'/y = v'(x)\ln u(x) + v(x)\,u'(x)/u(x) \Rightarrow$

$\Rightarrow y' = u(x)^{v(x)}\,[\,v'(x)\ln u(x) + v(x)\,u'(x)/u(x)\,]$

Differentiation impliziter Funktionen f(x,y)=0

$dy/dx = y' = -(\partial f/\partial x)/(\partial f/\partial y) = -f_x/f_y$

$y'' = -(f_{xx}f_y^2 - 2f_{xy}f_xf_y + f_{yy}f_x^2)/f_y^3$

Integrationsregeln

	f(x)	F(x)
Konstante	a	$a\cdot x+c$
Faktor	$a\cdot f(x)$	$a\cdot F(x)+c$
Summe	$v(x)\pm u(x)$	$\int v(x)\,dx \pm \int u(x)\,dx$
	$f(ax+b)$	$\int f(x)\,dx = 1/a\int f(t)\,dt$ mit $t=ax+b$
Substitution	$f[g(x)]\cdot g'(x)$	$\int f(u)\,du$, mit $u=g(x)$
	$f'(x)/f(x)$	$\ln\lvert f(x)\rvert + c$
	$f(x)\cdot f'(x)$	$f^2(x)/2$

Partielle Integration

$\int u'(x)\,v(x)\,dx = u(x)\,v(x) - \int u(x)\,v'(x)\,dx$

Stammfunktion von Funktionen

f(x)	F(x) + c
1	x
x^n	$1/(n+1)\,x^{n+1}$, $n\neq-1$
$(ax+b)^n$	$1/[a(n+1)]\,(ax+b)^{n+1}$, $n\neq-1$
$1/x$	$\ln\lvert x\rvert$
$1/(ax+b)$	$\ln(ax+b)/a$
$1/(x\cdot\ln a)$	$1/\ln a\cdot\ln x = \log_a x$
$\sin x$	$-\cos x$
$\sin^2 x$	$1/2\,(x-\sin x\cos x)$
$\cos x$	$\sin x$
$\cos^2 x$	$1/2\,(x+\sin x\cos x)$
$1/\cos^2 x$	$\tan x$
$1/\sin^2 x$	$-\cot x$
$\tan x$	$-\ln\lvert\cos x\rvert$
$\cot x$	$\ln\lvert\sin x\rvert$
a^x	$a^x/\ln a$
e^x	e^x
$\sqrt{x}$	$2/3\,\sqrt{x^3}$
$1/\sqrt{x}$	$2\sqrt{x}$
$1/\sqrt{[x^2\pm a^2]}$	$\ln\lvert x+\sqrt{(x^2\pm a^2)}\rvert$
$\sinh x$	$\cosh x$
$\cosh x$	$\sinh x$
$\tanh x$	$\ln\cosh x$
$\coth x$	$\ln\lvert\sinh x\rvert$
$1/\cosh^2 x$	$\tanh x$
$1/\sinh^2 x$	$-\coth x$
$1/(a^2+x^2)$	$1/a\arctan x/a$
$1/(a^2-x^2)$	$1/a\,\text{artanh}\,x/a =$ $= 1/(2a)\ln[(a+x)/(a-x)]$, $\lvert x\rvert<a$
$1/(x^2-a^2)$	$-1/a\,\text{arcoth}\,x/a =$ $= 1/(2a)\ln[(x-a)/(x+a)]$, $\lvert x\rvert>a$
$1/\sqrt{(a^2-x^2)}$	$\arcsin x/a$
$1/\sqrt{(a^2+x^2)}$	$\text{arsinh}\,x/a = \ln[x+\sqrt{(a^2+x^2)}]$
$1/\sqrt{(x^2-a^2)}$	$\text{arcosh}\,x/a = \ln[x+\sqrt{(x^2-a^2)}]$

Häufig vorkommende Substitutionen

$t = ax+b$	$dx = 1/a\ dt$
$t = x/a$	$dx = a\ dt$
$t = a/x$	$dx = -a/t^2\ dt$
$t = a^x$	$dx = dt/(t \ln a)$
$t = \sqrt{x}$	$dx = 2t\ dt$
$t = e^x$	$dx = 1/t\ dt$
$t = \ln x$	$dx = e^t\ dt$
$t = a+bx$	$dx = dx = 1/b\ dt$
$t = a^2+x^2$	$dx = dt/[2\sqrt{(t - a^2)}]$
$t = \sqrt{(a+bx)}$	$dx = 2t\ dt/b$
$t = a+bx^2$	$dx = dt/[2\sqrt{(bt - ab)}]$
$t = \sqrt{(a^2+x^2)}$	$dx = t\ dt/\sqrt{(t^2 - a^2)}$
$t = \sqrt{(a^2-x^2)}$	$dx = -t\ dt/\sqrt{(a^2 - t^2)}$
$t = \sqrt{(x^2-a^2)}$	$dx = t\ dt/\sqrt{(t^2 + a^2)}$

Integration durch Substitution

$\int f(x)\,dx = \int f[\phi(t)] \cdot \dot\phi(t)\,dt$ mit $x = \phi(x)$ und $dx = \dot\phi(t)\,dt$

R(x) sei rationale Funktion

1. $\int R(x, \sqrt{(a^2 - x^2)})\,dx$
Substitution $x = a \sin t$ $\quad dx = a \cos t\,dt$
$\Rightarrow \int R(a \sin t, a \cos t)\, a \cos t\,dt$
$\sin t = x/a$ und $\cos t = \sqrt{(a^2 - x^2)}/a$

2. $\int R(x, \sqrt{(a^2 - x^2)})\,dx$
Substitution $x = a \tanh t$ $\quad dx = a\,dt/\cosh^2 t$
$\Rightarrow \int R(a \tanh t, a/\cosh t)\, a\,dt/\cosh^2 t$
$\sinh t = x/\sqrt{(a^2-x^2)}$ und $\cosh t = a/\sqrt{(a^2-x^2)}$

3. $R(x, \sqrt{(a^2 + x^2)})\,dx$
Substitution $x = a \tan t$ $\quad dx = a\,dt/\cos^2 t$
$\Rightarrow \int R(a \tan t, a/\cos^2 t)\, a/\cos^2 t\,dt$
$\sin t = x/\sqrt{(a^2+x^2)}$ und $\cos t = a/\sqrt{(a^2+x^2)}$

4. $\int R(x, \sqrt{(a^2 + x^2)})\,dx$
Substitution $x = a \sinh t$ $\quad dx = a \cosh t\,dt$
$\Rightarrow \int R(a \sinh t, a \cosh t)\, a \cosh t\,dt$
$\sinh t = x/a$ und $\cosh t = \sqrt{(a^2+x^2)}/a$

5. $\int R(x, \sqrt{(x^2 - a^2)})\,dx$
Substitution $x = a/\cos t$ $\quad dx = a \sin t\,dt/\cos^2 t$
$\Rightarrow \int R(a/\cos t, a \tan t)\, a \sin t/\cos^2 t\,dt$
$\sin t = \sqrt{(x^2-a^2)}/x$ und $\cos t = a/x$

6. $\int R(x, \sqrt{(x^2 - a^2)})\,dx$
Substitution $x = a \cosh t$ $\quad dx = a \sinh t\,dt$
$\Rightarrow \int R(a \cosh t, a \sinh t)\, a \sinh t\,dt$
$\sinh t = \sqrt{(x^2-a^2)}/a$ und $\cosh t = x/a$

7. $\int R(\sin x, \cos x, \tan x, \cot x)\,dx$
Substitution $\tan x/2 = t$ $\quad dx = 2/(1+t^2)\,dt$
$\Rightarrow \int R(2t/(1+t^2), (1-t^2)/(1+t^2), 2t/(1-t^2), (1-t^2)/(2t))$
$2\,dt/(1+t^2)$

8. $\int R(\sinh x, \cosh x, \tanh x, \coth x)\,dx$
Substitution $\tanh x/2 = t$ $\quad dx = 2/(1-t^2)\,dt$
$\Rightarrow \int R(2t/(1-t^2), (1+t^2)/(1-t^2), 2t/(1+t^2), (1+t^2)/(2t))$
$2\,dt/(1-t^2)$

9. $\int f(e^x)\,dx$
Substitution $e^x = t$ $\quad dx = dt/t$
$\Rightarrow \int f(t)\,dt$

10. $\int f(x, \sqrt[k]{(ax+b)})\,dx$
Substitution $ax+b = t$ $\quad dx = kt^{k-1}/a\ /t$
$\Rightarrow \int f(t)\,dt$

Integration durch Partialbruchzerlegung

Partialbruchzerlegung von $f(x)/g(x)$

1. $g(x) = 0$ hat nur einfache reelle Wurzeln x_i
$f(x)/g(x) = A/(x-x_1) + B/(x-x_2) + C/(x-x_3) + \ldots$
mit $A = f(x_1)/g'(x_1)$, $B = f(x_2)/g'(x_2)$, ...
2. ... reelle aber mehrfache auftretende Wurzeln
x_1 α mal, x_2 β mal, x_3 γ mal ...
$f(x)/g(x) = A_1/(x-x_1)^\alpha + A_2/(x-x_1)^{\alpha-1} + \ldots +$
$+ A_\alpha/(x-x_1) + B_1/(x-x_2)^\beta + \ldots + B_\alpha/(x-x_2) + \ldots$
3. ... neben reellen auch einfache konjugiert komplex auftretende Wurzeln
x_1 und x_2 sind zueinander konjugiert komplex
$\Rightarrow f(x)/g(x) = (Px + Q) / [(x-x_1)(x+x_{12})] =$
$= (Px + Q) / (x^2 + px + q)$
$\Rightarrow \int (Px+Q)/(x^2+px+q)\,dx = P/2 \cdot \ln |x^2 + px + q|$
4. ... neben reellen auch mehrfache komplexe Wurzeln, z.B. bei einer dreifachen reellen und zweifach auftretenden konjugiert komplexen Wurzeln
$f(x)/g(x) = A_1/(x-x_1)^3 + A_2/(x-x_1)^2 + A_2/(x-x_1) +$
$+ (P_1x + Q_1) / (x^2 + px + q)^2 +$
$+ (P_2x + Q_2) / (x^2 + px + q)$

Standardfälle

Bezeichnung $X=a+bx$ und $Y=f+gx$
$1/(XY) = 1/(fb-ag)\,(b/X - g/Y)$
Bezeichnung $X=a+x$, $Y=b+x$ und $Z=c+x$
$1/(XYZ) = A/X + B/Y + C/Z$ mit
$A = 1/[(b-a)(c-a)]$, $B = 1/[(a-b)(c-b)]$ und
$C = 1/[(a-c)(b-c)]$
Bezeichnung $X=a+bx^2$ und $Y=f+gx^2$
$1/(XY) = 1/(fb-ag)\,(b/X - g/Y)$

Arkusfunktionen

Zusammenhang zu trigonometrischen Funktionen

$\sin(\operatorname{arccos} x) = \cos(\arcsin x) = \sqrt{(1 - x^2)}$
$\tan(\operatorname{arccot} x) = \cot(\arctan x) = 1/x$
$\arctan(\cot x) = \operatorname{arccot}(\tan x) = \pi/2 - x$
$\cos(\arctan x) = 1/\sqrt{(1 + x^2)}$
$\sin(\arctan x) = x/\sqrt{(1 + x^2)}$