Binomialkoeffizient: $\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!}$

Bernoullische Ungleichung: Ist $x \geq -1$, so gilt $(1+x)^n \geq 1 + nx \ \forall\ n \in \mathbb{N}$

Der binomische Satz: $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}b^k \ \forall\ n \in \mathbb{N}$

Monotoniekriterium für Folgen:

- (a_n) sei monoton wachsend und nach oben beschränkt. Dann ist (a_n) konvergent und $lim_{n\to\infty} a_n = \sup_{n=1}^{\infty} a_n$
- (a_n) sei monoton fallend und nach unten beschränkt. Dann ist (a_n) konvergent und $lim_{n\to\infty} a_n = \inf_{n=1}^{\infty} a_n$

Wichtige Folgen:

- $\sqrt[n]{n} \to 1\ (n \to \infty),\ \sqrt[n]{c} \to 1\ (n \to \infty)$
- $(1 + \frac{x}{n})^n \to e^x\ (n \to \infty)$

Satz von Bolzano-Weierstraß: (a_n) sei eine beschränkte Folge. Dann: $H(a_n) \neq \emptyset$

Cauchyfolge (CF): $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ n_0 \in \mathbb{N} : |a_n - a_m| < \varepsilon\ \forall\ n > m \geq n_0$

Cauchy-Kriterium: (a_n) ist konvergent $:\Leftrightarrow$ (a_n) ist eine CF.

Unendliche Reihen:

- Harmonische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ist divergent
- Geometrische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} x^n\ (x \in \mathbb{R})$ konvergiert für $|x| < 1$. Dann: $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$
- $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ konvergiert gegen e
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ konvergiert gegen 1
- $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ konvergiert absolut $\ \forall\ x \in \mathbb{R}$

Cauchy-Kriterium: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert $:\Leftrightarrow\ \forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} : |\underbrace{\sum_{k=m+1}^{n} a_k}_{=s_n - s_m}| < \varepsilon\ \forall\ n > m \geq n_0$

Monotonie-Kriterium: Sind alle $a_n \geq 0$ und ist (s_n) beschränkt $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert.

Notwendige Bedingung für Konvergenz: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sei konvergent. Dann: $a_n \to 0\ (n \to \infty)$

Leibnitzkriterium: Sei (b_n) eine monoton fallende Nullfolge und $a_n = (-1)^{n+1} b_n$. Dann ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent.

Majorantenkriterium: Gilt $|a_n| \leq b_n$ ffa $n \in \mathbb{N}$ und ist $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konv. $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert absolut.

Minorantenkriterium: Gilt $a_n \geq b_n \geq 0$ ffa $n \in \mathbb{N}$ und ist $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergent $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist divergent.

Wurzelkriterium: Sei (a_n) eine Folge und $\alpha = \limsup \sqrt[n]{|a_n|}$ ($\alpha = \infty$ ist zugelassen).

(1) Ist $\alpha < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert absolut

(2) Ist $\alpha > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergiert

(3) Ist $\alpha = 1$, so ist keine allgemeine Aussage möglich

Quotientenkriterium: Sei (a_n) eine Folge in $\mathbb{R}$ und $a_n \neq 0$ ffa $n \in \mathbb{N}$. $\alpha_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$ ffa $n \in \mathbb{N}$.
Es sei α_n beschränkt, $\beta := \liminf(\alpha_n)$ und $\alpha := \limsup |\alpha_n|$

(1) Ist $\beta > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergiert

(2) Ist $\alpha < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert absolut

(3) Ist $\alpha = \beta = 1$, so ist keine allgemeine Aussage möglich.

Produktreihen: Sind $\sum a_n$ und $\sum b_n$ absolut konvergent, so ist die Produktreihe $\sum p_n$ von beiden absolut konvergent.

Cauchyprodukt: Setze $c_n := \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + ... + a_n b_0 (n \in \mathbb{N}_0)$. $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ heißt Cauchyprodukt

Sind $\sum a_n$ und $\sum b_n$ absolut konvergent, so konvergiert ihr Cauchyprodukt $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ gegen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n$.

Sinus und Cosinus: $\cos x := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ $\quad \sin x := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

Potenzreihe: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ...$

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ sei eine PR, $\varrho := \limsup \sqrt[n]{|a_n|}$ und $r := \frac{1}{\varrho}$ (also $r = 0$, falls $\varrho = \infty$ und $r = \infty$, falls $\varrho = 0$)

(1) Ist $r = 0$, so konvergiert die PR nur für x=0

(2) Ist $r = \infty$, so konvergiert die PR absolut $\forall x \in \mathbb{R}$

(3) Ist $0 < r < \infty$, so konvergiert die PR absolut für $|x| < r$ und sie divergiert für $|x| > r$ (im Falle $|x| = r$, also für $x = r$ und $x = -r$, ist keine Aussage möglich.

Sinus- und Cosinushyperbolicus:

- $\cosh x := \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ $(x \in \mathbb{R})$, $\cosh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$
- $\sinh x := \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ $(x \in \mathbb{R})$, $\sinh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ $(x \in \mathbb{R})$

Grenzwerte bei Funktionen: $\lim_{x \to x_0} f(x)$ existiert $:\Leftrightarrow$ $\exists\, a \in \mathbb{R}$ mit: für jede Folge (x_n) in $D \backslash \{x_0\}$ mit $x_n \to x_0$ gilt: $f(x) \to a$.

Cauchykriterium: $\lim_{x \to x_0} f(x)$ existiert $:\Leftrightarrow$ $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : |f(x) - f(x')| < \varepsilon\ \forall\, x, x' \in \dot{D}_\delta(x_0)$

Exponentialfunktion: $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ $(x \in \mathbb{R})$

Stetigkeit: f heißt stetig in x_0 $:\Leftrightarrow$ für jede Folge (x_n) in D mit $x_n \to x_0$ gilt: $f(x_n) \to f(x_0)$

Beispiele:

(1) $e^x, \sin(x), \cos(x)$ sind auf $\mathbb{R}$ stetig

(2) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

(3) $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

(4) $\lim_{h \to 0} \frac{e^{x_0 + h} - e^{x_0}}{h} = e^{x_0}\ \forall\, x_0 \in \mathbb{R}$

Zwischenwertsatz: Sei $a < b$ und $f \in C[a, b] := C([a, b])$. Weiter sei $y_0 \in \mathbb{R}$ und $f(a) \leq y_0 \leq f(b)$ oder $f(b) \leq y_0 \leq f(a)$. Dann existiert ein $x_0 \in [a, b] : f(x_0) = y_0$

Nullstellensatz von Bolzano: Sei $f \in C[a, b]$ und $f(a)f(b) < 0$. Dann existiert ein $x_0 \in [a, b] : f(x_0) = 0$

Offene / abgeschlossene Mengen:

(1) $A \subseteq \mathbb{R}$ heißt abgeschlossen $:\Leftrightarrow$ für jede konvergente Folge (x_n) in A gilt: $\lim x_n \in A$

(2) $B \subseteq \mathbb{R}$ heißt offen $:\Leftrightarrow$ $\forall\, x \in B\ \exists\, \delta = \delta(x) > 0 : U_\delta(x) \subseteq B$

Funktionenfolgen und -Reihen:

- (f_n) heißt auf D punktweise konvergent $:\Leftrightarrow$ für jedes $x \in D$ ist $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$ konvergent.
- $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ heißt auf D punktweise konvergent $:\Leftrightarrow$ für jedes $x \in D$ ist $(s_n(x))_{n=1}^{\infty}$ konvergent.
- (f_n) heißt auf D gleichmäßig (glm) konvergent $:\Leftrightarrow$ $\exists$ Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ mit: $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon\ \forall\, n \geq n_0\ \forall\, x \in D$

- Kriterium nach Weierstraß: Sei (c_n) eine Folge in $\mathbb{R}$, sei $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ konvergent, sei $m \in \mathbb{N}$ und es gelte $|f_n(x)| \leq c_n \ \forall \ n \geq m \ \forall \ x \in D$. Dann konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ auf D glm.

Gleichmäßige Stetigkeit: $\forall \ \varepsilon > 0 \ \exists \ \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : |f(x) - f(z)| < \varepsilon \ \forall \ x, z \in D$ und $|x - z| < \delta$

- Ist D beschränkt und abgeschlossen, und f auf D stetig, dann ist f auf D glm. stetig.

Libschitzstetigkeit: $\exists \ L \geq 0 : |f(x) - f(z)| \leq L|x - z| \ \forall \ x, z \in D$

Ableitung / Differenzierbarkeit in x_0: $\exists \ \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)$ und ist $\in \mathbb{R}$

Produktregel: $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$

Quotientenregel: $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0)-f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}$

Kettenregel: $(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0)) \ g'(x_0)$

Ableitung der Umkehrfunktion: $f \in C(I)$ sei streng monoton, f sei db in $x_0 \in I$ und $f'(x_0) \neq 0$.
Dann ist $f^{-1} : f(I) \to \mathbb{R}$ db in $y_0 := f(x_0)$ und $(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$

Satz von Rolle: es sei $f(a) = f(b)$, f stetig und db. Dann existiert $\xi \in (a, b) : f'(\xi) = 0$

Mittelwertsatz (MWS) der Differentialrechnung: f stetig und db $\Rightarrow \ \exists \ \xi \in (a, b) : \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi)$

Erweiterter Mittelwertsatz: f, g stetig und db und $g(b) \neq g(a) \Rightarrow \ \exists \ \xi \in (a, b) : \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$

Die Regeln von de l'Hospital:
$f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ seien auf (a, b) db und es sei $g'(x) \neq 0 \ \forall \ x \in (a, b)$ ($a = -\infty$ oder $b = \infty$ zugelassen).
Weiter existiere $L := \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ ($L = \pm\infty$ zugelassen) und es gelte

(I) $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = 0$ oder

(II) $\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty$.

Dann $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = L$ (gilt auch für $x \to b$)

Additionstheoreme: $\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y \qquad \cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$

Wichtige Ableitungen:

- $(\tan x)' = 1 + \tan^2 x$
- $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$
- $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad |x| < 1$
- $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad |x| < 1$
- $(\ln |x|)' = \frac{1}{x}$

Abelscher Grenzwertsatz: $\log(1 + x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$ für $x \in [-1, 1]$

Höhere Ableitungen: Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ eine PR mit KR $r > 0, I := (x_0 - r, x_0 + r)$

- $f \in C^{\infty}(I)$
- $\forall \ x \in I \ \forall \ k \in \mathbb{N} : f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)...(n-k+1)a_n(x - x_0)^{n-k}$

Taylorreihe: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$

Taylorpolynom: $T_n(x, x_0) := \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$

Satz von Taylor: Sei $f \in C^n \Rightarrow \ \exists \ \xi \in [x, x_0] : f(x) = T_n(x, x_0) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$

1. Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung:
Es sei $f \in R[a, b]$ und f besitze auf $[a, b]$ die SF F.
Dann $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) =: F(x)|_a^b =: [F(x)]_a^b$

MWS der Integralrechnung:
Es seien $f, g \in R[a, b], g \geq 0$ auf $[a, b], m := \inf f([a, b]), M := \sup f([a, b])$

(1) $\exists\ \mu \in [m,M] : \int_a^b fg dx = \mu \int_a^b g dx$

(2) Ist $f \in C[a,b] \Rightarrow\ \exists\ \xi \in [a,b] : \int_a^b f dx = f(\xi)(b-a)$

2. Hauptsatz der Differential- und Integralrechung:
Sei $f \in R[a,b]$ und $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ sei definiert durch $F(x) := \int_a^x f(t)dt$

(1) F ist auf $[a,b]$ Lipschitzstetig, insbesondere $F \in C[a,b]$

(2) Ist f in x_0 stetig $\Rightarrow$ F ist in x_0 db und $F'(x_0) = f(x_0)$

(3) Ist $f \in C[a,b] \Rightarrow F \in C^1[a,b]$ und $F' = f$ auf $[a,b]$

Partielle Integration: $\int_a^b f'g dx = f(x)g(x)|_a^b - \int_a^b fg' dx$

Substitutionsregel: $\int f(g(t))g'(t)dt = \int f(x)dx|_{x=g(t)}$

Integrale:

- $\int \frac{1}{x-x_0} dx = \log|x-x_0|$
- $\int \log x\ dx = x\log x - x$
- $\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = \text{arcsinh}\ x$
- $\int \frac{1}{1-x^2} dx = \text{arctanh}\ x$

Cauchy-Kriterium: $\int_a^\beta f dx$ konv. $:\Leftrightarrow\ \forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ c = c(\varepsilon) \in (a,\beta) : |\int_u^v f dx| < \varepsilon\ \forall\ u,v \in (c,\beta)$

Majorantenkriterium: Ist $|f| \leq g$ auf $[a,\beta)$ und $\int_a^\beta g dx$ konv. $\Rightarrow \int_a^\beta f dx$ konvergiert absolut

Minorantenkriterium: Ist $|f| \geq g \geq 0$ auf $[a,b)$ und $\int_a^\beta gfx$ div. $\Rightarrow \int_a^\beta f dx$ div.

Funktionen von beschränkter Variation:

- Ist f auf $[a,b]$ Lipschitzstetig $\Rightarrow f \in BV[a,b]$
- Ist f db auf $[a,b]$ und f' beschränkt auf $[a,b] \Rightarrow f \in BV[a,b]$
- Ist f monoton auf $[a,b] \Rightarrow f \in BV[a,b]$ und $v_f[a,b] = |f(b)-f(a)|$
- Ist $f \in C^1[a,b] \Rightarrow v_f[a,b] = \int_a^b |f'| dx$

Partielle RS-Integration: Ist $f \in R_g[a,b] \Rightarrow g \in R_f[a,b]$ und $\int_a^b f dg = f(x)g(x)|_a^b - \int_a^b g df$

Riemann-Stieltjes-Integral:

- Sei $f \in R[a,b]$, g sei db auf $[a,b]$ und $g' \in R[a,b]$. Dann $f \in R_g[a,b]$ und $\int_a^b f dg = \int_a^b fg' dx$
- Ist $f \in C[a,b]$ und $g \in BV[a,b] \Rightarrow f \in R_g[a,b]$