Formelsammlung

zu den Vorlesungen

Mathematik I - III

in den Studiengängen

Technische Informatik

und

Nachrichtentechnik

der FHTE

Vorwort zur 2. Auflage

Diese Formel- und Verfahrenssammlung ist entstanden aus den Vorlesungen von Prof. Dr.-Ing. Bernhard Bauer im Zeitraum WS 94/95 - WS 95/96. Sie hat zum Ziel, den behandelten Stoff in kurzer, prägnanter Form zusammenzufassen, und erhebt keinen Anspruch auf Vollständigkeit. Als ideale Ergänzung empfiehlt sich die "Mathematische Formelsammlung für Ingenieure und Naturwissenschaftler" von Lothar Papula.
Aufgrund der guten Resonanz der 1. Auflage habe ich die vorliegende 2. Auflage im Stoff von Mathe I um die Kapitel Differential- und Integralrechnung und um den Stoff von Mathe III erweitert. Verbesserungsvorschläge bitte per e-mail an: tiw4frfl@rz.fht-esslingen.de.

Inhaltsverzeichnis

Mathematik I

Mathematik II

Mathematik III

1. Vektorrechnung

1.1 Allgemeines

Betrag: $|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}} = \sqrt{\vec{a}^2}$

$$|\vec{a}|^2 = \vec{a}\cdot\vec{a} = \vec{a}^2$$

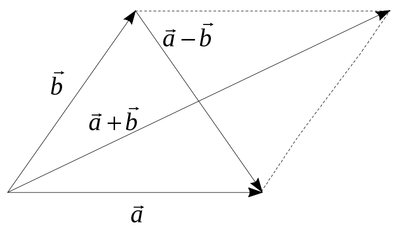
Richtungswinkel: $\cos\alpha = \dfrac{a_x}{|\vec{a}|}$ $\quad\cos\beta = \dfrac{a_y}{|\vec{a}|}$ $\quad\cos\gamma = \dfrac{a_z}{|\vec{a}|}$

$$a_x = |\vec{a}|\cdot\cos\alpha \qquad a_y = |\vec{a}|\cdot\cos\beta \qquad a_z = |\vec{a}|\cdot\cos\gamma$$

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

Addition, Subtraktion:

$$\vec{a} \pm \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x \pm b_x \\ a_y \pm b_y \\ a_z \pm b_z \end{pmatrix}$$



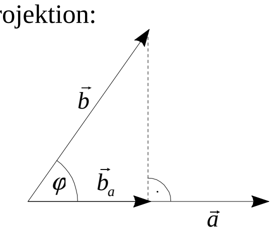
S-Multiplikation: $\lambda\cdot\vec{a} = \begin{pmatrix} \lambda\cdot a_x \\ \lambda\cdot a_y \\ \lambda\cdot a_z \end{pmatrix}$

1.2 Skalarprodukt

Berechnung: $\vec{a}\cdot\vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = a_x\cdot b_x + a_y\cdot b_y + a_z\cdot b_z$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\varphi$$

Projektion:



Orthogonalität: $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0 \;\Leftarrow\; \vec{a}\perp\vec{b}$

Schnittwinkel: $\cos\varphi = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$

Projektion: $\vec{b}_a = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|^2}\cdot\vec{a}$ $\qquad b_a = |\vec{b}|\cdot\cos\varphi = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|}$ Vorzeichen → Richtung!

1.3 Kreuzprodukt

Berechnung: $\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}=\vec{i}\cdot\left(a_yb_z-a_zb_y\right)-\vec{j}\cdot\left(a_xb_z-a_zb_x\right)+\vec{k}\cdot\left(a_xb_y-a_yb_x\right)$

$\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\sin\varphi \qquad \vec{a}\times\vec{b}\perp\vec{a} \;\wedge\; \vec{a}\times\vec{b}\perp\vec{b}$

Besonderheiten:

$\vec{a}\times\vec{a}=\vec{0}$

$\vec{a}\times\vec{b}=-\left(\vec{b}\times\vec{a}\right)$

$\lambda\cdot\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)=\left(\lambda\cdot\vec{a}\right)\times\vec{b}=\vec{a}\times\left(\lambda\cdot\vec{b}\right)$

$\times$	$\vec{i}$	$\vec{j}$	$\vec{k}$
$\vec{i}$	$\vec{0}$	$\vec{k}$	$-\vec{j}$
$\vec{j}$	$-\vec{k}$	$\vec{0}$	$\vec{i}$
$\vec{k}$	$\vec{j}$	$-\vec{i}$	$\vec{0}$

Kollinearität: $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0} \Leftarrow \vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$ oder $\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{b}$

Anwendungen:

$A_{Parallelogramm}=\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=\frac{1}{2}\cdot\left|\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\times\left(\vec{a}-\vec{b}\right)\right|$

$A_{Dreieck}=\frac{1}{2}\cdot\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|$

1.4 Spatprodukt

Berechnung: $\left[\vec{a}\;\vec{b}\;\vec{c}\right]=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\times\vec{c}\right|\cdot\cos\varphi \qquad \varphi=\angle\,\vec{a},\vec{b}\times\vec{c}$

besser Berechnung über Determinante (siehe Kreuzprodukt)!

Besonderheiten: $\left[\vec{a}\;\vec{b}\;\vec{c}\right]=\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)=\left[\vec{b}\;\vec{c}\;\vec{a}\right]=\vec{b}\cdot\left(\vec{c}\times\vec{a}\right)=\left[\vec{c}\;\vec{a}\;\vec{b}\right]=\vec{c}\cdot\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)$

(zyklische Vertauschung)

$\left[\vec{a}\;\vec{b}\;\vec{c}\right]=-\left[\vec{b}\;\vec{a}\;\vec{c}\right]$ (Vertauschung von benachbarten Vektoren

$\left[\vec{a}\;\vec{b}\;\vec{c}\right]=-\left[\vec{a}\;\vec{c}\;\vec{b}\right]$ ändert das Vorzeichen des Vektorprodukts!)

Komplanarität: $\left[\vec{a}\;\vec{b}\;\vec{c}\right]=0 \Leftrightarrow \vec{a},\vec{b},\vec{c}$ liegen in einer Ebene!

Anwendungen:

$V_{Spat}=\left|\left[\vec{a}\;\vec{b}\;\vec{c}\right]\right|$

$V_{Tetraeder}=\frac{1}{6}\cdot\left|\left[\vec{a}\;\vec{b}\;\vec{c}\right]\right|$

	2 Vektoren	3 Vektoren	
senkrecht	$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$		$\vec{a}\cdot\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\cos\varphi$
parallel	$\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$		$\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\sin\varphi$
in einer Ebene		$\left[\vec{a}\;\vec{b}\;\vec{c}\right]=0$	$\left[\vec{a}\;\vec{b}\;\vec{c}\right]=\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)$
linear abhängig	$\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$	$\left[\vec{a}\;\vec{b}\;\vec{c}\right]=0$	$\left[\vec{a}\;\vec{b}\;\vec{c}\right]=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\times\vec{c}\right|\cdot\cos\varphi$
linear unabhängig	$\vec{a}\times\vec{b}\neq\vec{0}$	$\left[\vec{a}\;\vec{b}\;\vec{c}\right]\neq 0$	$\left[\vec{a}\;\vec{b}\;\vec{c}\right]=-\left[\vec{b}\;\vec{a}\;\vec{c}\right]$

1.5 Anwendungen: analytische Geometrie

1.5.1 Darstellung von Geraden und Ebenen

Gerade: $\vec{x} = \vec{x}_0 + \lambda \cdot \vec{a}$ Parameterdarstellung (PAR)

$A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0$ (Gerade als Schnitt zwischen 2 Ebenen)
$A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0$ Parameterfreie Darstellung (PARFREI)

Ebene: $\vec{x} = \vec{x}_0 + \mu_1 \cdot \vec{a} + \mu_2 \cdot \vec{b}$ Parameterdarstellung (PAR)

$Ax + By + Cz + D = 0$ Parameterfreie Darstellung (PARFREI)

1.5.2 Umwandlung: PAR → PARFREI

Gerade: **Prinzip:** 3 skalare Gleichungen mit 4 Unbekannten werden auf 2 Gleichungen mit 3 Unbekannten zurückgeführt.
(eine Gleichung nach λ auflösen und in die anderen einsetzen!)

Bsp: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} x = 2 + 2\lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = -\lambda \ \Rightarrow \ \lambda = -z \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} x = 2 - 2z \\ y = 1 - z \end{array}$

Ebene: $\vec{x} = \vec{x}_0 + \mu_1 \cdot \vec{a} + \mu_2 \cdot \vec{b} \quad \Rightarrow \quad \vec{a} \times \vec{b} = \vec{n} \quad \Rightarrow \quad n_x \cdot x + n_y \cdot y + n_z \cdot z + d = 0$
Punktprobe mit $\vec{x}_0$ ergibt d!

1.5.3 Umwandlung: PARFREI → PAR

Gerade: **Prinzip:** Parameter einführen

Bsp. 1: $x = z + 5 \ , \ y = 4 - 2z \ \Rightarrow \ z = \lambda \ \Rightarrow \ \begin{array}{l} x = 5 + \lambda \\ y = 4 - 2\lambda \\ z = \lambda \end{array} \ \Rightarrow \ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Bsp. 2: $\dfrac{x - x_0}{a_x} = \dfrac{y - y_0}{a_y} = \dfrac{z - z_0}{a_z} = \lambda \ \Rightarrow \ \begin{array}{l} x = x_0 + \lambda \cdot a_x \\ y = y_0 + \lambda \cdot a_y \\ z = z_0 + \lambda \cdot a_z \end{array}$

Ebene: **Prinzip:** 2 Parameter einführen

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} x = -\dfrac{D}{A} - \dfrac{B}{A} y - \dfrac{C}{A} z \\ y = \mu_1 \\ z = \mu_2 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dfrac{D}{A} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu_1 \cdot \begin{pmatrix} -\dfrac{B}{A} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu_2 \cdot \begin{pmatrix} -\dfrac{C}{A} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1.5.4 Schnitte

Gerade - Gerade: geg: g: $\vec{x}_g = \vec{x}_1 + \lambda \cdot \vec{a}_1$, h: $\vec{x}_h = \vec{x}_2 + \mu \cdot \vec{a}_2$

Annahme: g, h liegen in einer Ebene $\rightarrow$ $\vec{x}_g = \vec{x}_h \Rightarrow \vec{x}_1 + \lambda \cdot \vec{a}_1 = \vec{x}_2 + \mu \cdot \vec{a}_2$

$\rightarrow$ 3 Gleichungen für 2 Unbekannte (λ, μ)

$\Rightarrow$ LGS muß *komplett* lösbar sein, sonst sind Geraden windschief!!!

(Anmerkung: PARFREI in PAR umwandeln)

Gerade - Ebene: 1. Weg: Gerade und Ebene in PAR:

$g = E \Rightarrow \vec{x}_0 + \lambda \cdot \vec{a} = \vec{x}_1 + \mu_1 \cdot \vec{b} + \mu_2 \cdot \vec{c}$

$\rightarrow$ 3 Gleichungen für 3 Unbekannte (λ, μ_1, μ_2)

$\Rightarrow$ LGS nach λ auflösen und in g einsetzen $\Rightarrow$ Schnittpunkt

2. Weg: Gerade in PAR, Ebene in PARFREI: (Seite 63 Bsp. 38)

g in 3 skalare Gleichungen zerlegen und in E einsetzen

$\rightarrow$ nach λ auflösen und in g einsetzen $\Rightarrow$ Schnittpunkt

(gilt für beide Wege: falls LGS nicht lösbar $\rightarrow$ kein Schnittpunkt! $\rightarrow$ g parallel E!)

Ebene - Ebene: 1. Weg: E_1, E_2 in PARFREI: (Seite 65)

stellt bereits die Schnittgarade dar falls Darstellung in PAR verlangt: Parameter einführen (z = λ). Man erhält ein LGS $(x = f_{(\lambda)}, y = f_{(\lambda)}, z = \lambda) \Rightarrow$ Gerade in PAR

2. Weg: E_1: $\vec{x}_{E1} = \vec{x}_1 + \mu_1 \cdot \vec{a} + \mu_2 \cdot \vec{b}$, E_2: $\vec{x}_{E2} = \vec{x}_2 + \lambda_1 \cdot \vec{c} + \lambda_2 \cdot \vec{d}$

gleichsetzen: $E_1 = E_2$ (Seite 66 Bsp. 40)

$\rightarrow$ 3 Gleichungen für 4 Unbekannte

$\Rightarrow$ Lösung des LGS in Abhängigkeit einer Unbekannten (z.B. λ_2) setzt man nun λ_1 und $\lambda_2 = p$ in E_2 ein, erhält man g in PAR

1.5.5 Abstände

Punkt - Ebene: HNF: $d = \left| \frac{A \cdot P_x + B \cdot P_y + C \cdot P_z + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \right|$

Punkt - Ebene mit Lotfußpunkt:
1.) g ermitteln aus Normalenvektor von E und Punkt P
2.) Q durch Schnitt g, E (siehe oben 2. Weg)
3.) $d = |\vec{Q} - \vec{P}|$

Punkt - Gerade:
1.) $E \perp g$ durch P (Richtungsvektor = Normalenvektor + Punktprobe P)
2.) Q durch Schnitt g, E (siehe oben 2. Weg)
3.) $d = |\vec{Q} - \vec{P}|$

1.5.6 Winkel

Gerade - Gerade: Winkel zwischen den Richtungsvektoren: $\cos\varphi = \frac{\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2}{|\vec{a}_1| \cdot |\vec{a}_2|}$

Gerade - Ebene: Gegenwinkel (zu 90°) zwischen Richtungsvektor der Geraden und Normalenvektor der Ebene: $\sin\varphi = \left| \frac{\vec{a} \cdot \vec{n}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{n}|} \right|$

Ebene - Ebene: Winkel zwischen den Normalenvektoren der Ebenen: $\cos\varphi = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}$

2. Lineare Algebra

2.1 Matrizen

Schreibweisen: $$\underline{A} = (a_{ik}) = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1n} \\ : & & : & & : \\ a_{i1} & \dots & a_{ik} & \dots & a_{in} \\ : & & : & & : \\ a_{m1} & \dots & a_{mk} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} = \underline{A}_{(m,n)} = (a_{ik})_{(m,n)}$$

i = 1 ... n	Zeilenindex
k = 1 ... m	Spaltenindex

Rechenregeln: $\underline{A} \pm \underline{B} = (a_{ik} \pm b_{ik})$

$p \cdot \underline{A} = p \cdot (a_{ik}) = (p \cdot a_{ik})$

$\underline{A}_{(m,n)} \cdot \underline{B}_{(n,q)} = \underline{C}_{(m,q)}$ (dabei ist c_{ik} das Skalarprodukt der i. Zeile von A mit der k. Spalte von B.)

Wichtig: $\underline{A} \cdot \underline{B} \neq \underline{B} \cdot \underline{A}$

Transponieren: $\underline{A}^T_{(m,n)} = \underline{A}_{(n,m)}$ (x-te Zeile wird zur x-ten Spalte!)

Invertieren: $\underline{A} \cdot \underline{x} = \underline{b} \;\Rightarrow\; \underline{x} = \underline{A}^{-1} \cdot \underline{b}$ mit $\underline{A}^{-1} = \frac{1}{\det \underline{A}} \cdot \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$

Es gilt: $\underline{A} \cdot \underline{A}^{-1} = \underline{A}^{-1} \cdot \underline{A} = \underline{E}$ und $(\underline{A}^{-1})^{-1} = \underline{A}$

2.2 Determinanten

Definition: $D = \det \underline{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}$ (nur für 2x2 Matrizen)

Cramer-Regel: $$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2 \end{aligned} \;\Leftrightarrow\; \underline{A} \cdot \underline{x} = \underline{b} \;\Rightarrow\; x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}},\; x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

Rechenregeln:
- $\det \underline{A} = \det \underline{A}^T$
- D = 0, wenn 1 Zeile oder Spalte nur 0 enthält
- D = 0, wenn 2 Zeilen oder Spalten proportional oder gleich sind
- Vertauscht man 2 bel. Spalten oder Zeilen, so ändert sich das Vorzeichen
- gem. Faktoren einer Zeile oder Spalte können ausgeklammert werden

2.3 Lineare Gleichungssysteme

GAUSS-Algorithmus: $$\left[\begin{array}{ccc|c} x & x & x & x \\ x & x & x & x \\ x & x & x & x \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} x & x & x & x \\ 0 & x & x & x \\ 0 & r & q & p \end{array}\right]$$

0 Lösungen für: r = q = 0 und p ≠ 0
∞ Lösungen für: r = q = p = 0
1 Lösung für: r = 0 und q ≠ 0

Lösbarkeit von n,n-Systemen:	inhomogen: $\underline{A} \cdot \underline{x} = \underline{b}$, $\underline{b} \neq \underline{0}$	homogen: $\underline{A} \cdot \underline{x} = \underline{0}$
$\det \underline{A} \neq 0$	1 Lösung	nur triviale Lösung
$\det \underline{A} = 0$	0 Lösungen *oder* ∞ Lösungen	∞ Lösungen

Die Determinante einer Δ-Matrix ergibt sich aus dem Produkt der Hauptdiagonalelemente!

3. Komplexe Arithmetik

3.1 Allgemeines

Darstellungsformen: $z = x + j \cdot y$ $\quad z^* = (x + j \cdot y)^* = x - j \cdot y$

$z = r \cdot (\cos\varphi + j \cdot \sin\varphi)$ $\quad z^* = r \cdot (\cos\varphi - j \cdot \sin\varphi)$

$z = r \cdot e^{j\varphi}$ $\quad z^* = r \cdot e^{-j\varphi}$

Umrechnung: $x = r \cdot \cos\varphi$ $\quad y = r \cdot \sin\varphi$

$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ $\quad \varphi = arc(z) = \arg(z) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$

!!! *wenn* $\mathrm{Re}(z) < 0 \ : \ \Rightarrow \quad \varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + 180°$!!

$1 = e^{j0}$	$1 + j = \sqrt{2} \cdot e^{j45°} = \sqrt{2} \cdot e^{j\frac{\pi}{4}}$
$-1 = e^{\pm j180°} = e^{\pm j\pi}$	$1 - j = \sqrt{2} \cdot e^{-j45°} = \sqrt{2} \cdot e^{-j\frac{\pi}{4}}$
$j = e^{j90°} = e^{j\frac{\pi}{2}}$	$-1 + j = \sqrt{2} \cdot e^{j135°} = \sqrt{2} \cdot e^{j\frac{3\pi}{4}}$
$-j = e^{-j90°} = e^{-j\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{j}$	$-1 - j = \sqrt{2} \cdot e^{-j135°} = \sqrt{2} \cdot e^{-j\frac{3\pi}{4}}$

3.2 Rechengesetze

Addition; Subtraktion: $z_1 \pm z_2 = (x_1 + j \cdot y_1) \pm (x_2 + j \cdot y_2) = (x_1 \pm x_2) + j \cdot (y_1 \pm y_2)$

Multiplikation: $z_1 \cdot z_2 = \left(r_1 \cdot e^{j\varphi_1}\right) \cdot \left(r_2 \cdot e^{j\varphi_2}\right) = \left(r_1 \cdot r_2\right) \cdot e^{j(\varphi_1 + \varphi_2)}$

Division: $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 \cdot e^{j\varphi_1}}{r_2 \cdot e^{j\varphi_2}} = \left(\frac{r_1}{r_2}\right) \cdot e^{j(\varphi_1 - \varphi_2)}$

oder durch *konjugiert komplexe Erweiterung*:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + j \cdot y_1}{x_2 + j \cdot y_2} = \frac{\left(x_1 + j \cdot y_1\right) \cdot \left(x_2 - j \cdot y_2\right)}{\left(x_2 + j \cdot y_2\right) \cdot \left(x_2 - j \cdot y_2\right)} = \frac{\left(x_1 + j \cdot y_1\right) \cdot \left(x_2 - j \cdot y_2\right)}{x_2^2 + y_2^2}$$

Potenzieren: $z^n = \left(r \cdot e^{j\varphi}\right)^n = r^n \cdot e^{j n \cdot \varphi}$

Wurzelziehen: $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \cdot e^{j\left(\frac{\varphi + k \cdot 360°}{n}\right)}$ k = 0, 1, 2, ... , (n-1)

3.3 Anwendungen

3.3.1 Überlagerung von Schwingungen (bei gleichem ω!)

Es gilt:
$$A \cdot \cos(\omega t + \varphi_A) + B \cdot \cos(\omega t + \varphi_B) = C \cdot \cos(\omega t + \varphi_C)$$
$$\Downarrow$$
$$A \cdot e^{j\varphi_A} + B \cdot e^{j\varphi_B} = C \cdot e^{j\varphi_C}$$

Vorgehensweise:
1.) Umwandlung der Zeitfunktionen in komplexe Exponentialform
2.) Addition - grafisch
- algebraisch durch:
  - Umrechnung in Komponentenform
  - Addition
  - Rückführung in Exponentialform

3.) Rückführung der komplexen Form in die Zeitfunktion

3.3.2 Algebraische Gleichungen

Algebraische Gleichungen n-ten Grades haben immer n Lösungen. Dabei gilt:

- sind alle Koeffizienten *reell*,
  dann sind die Lösungen entweder *reell* oder *konjugiert komplex*!

- gibt es komplexe Koeffizienten,
  läßt sich keine allgemeine Aussage über die Lösungen machen!

3.3.3 Nicht-Algebraische Gleichungen

Lösung :
- Ansatz: z = x + j y
- Trennung nach Real- und Imaginärteil
- Lösung des LGS

Achtung:
- Es kann sein, daß Real- oder Imaginärteil verschwinden: → x ; y = 0!
- Wenn x ; y nicht reell werden → keine Lösung der Ausgangsgleichung!

3.3.4 Gebiete in der Gauß´schen Zahlenebene

Solche Gebiete werden durch Nicht-Algebraische Ungleichungen beschrieben.

Lösung:
- prinzipielle Behandlung wie bei Nicht-Algebraischen Gleichungen
- dann: *Testpunkt* einsetzen, zur Bestimmung des Gebietes

Besonderheit: **Kreis:** $|z - z_0| = r$

4. Differentialrechnung

4.1 Erste Ableitung elementarer Funktionen

	Funktion $f(x)$	Ableitung $f'(x)$
Potenzfunktion	x^n	$n \cdot x^{n-1}$
Wurzelfunktion	$\sqrt{v(x)}$	$\frac{v'(x)}{2 \cdot \sqrt{v(x)}}$
	$x^{\frac{n}{m}}$	$\frac{n}{m} \cdot \sqrt[m]{x^{n-m}}$
Gebrochene Funktion	$\frac{1}{v(x)}$	$-\frac{v'(x)}{[v(x)]^2}$
Trigonometrische Funktionen	$\sin(x)$	$\cos(x)$
	$\cos(x)$	$-\sin(x)$
	$\tan(x)$	$\frac{1}{\cos^2(x)}$
	$\cot(x)$	$-\frac{1}{\sin^2(x)}$
Arkusfunktionen	$\arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
	$\arccos(x)$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
	$\arctan(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$
	$arc\cot(x)$	$-\frac{1}{1+x^2}$
Expotentialfunktionen	e^x	e^x
	a^x	$\ln(a) \cdot a^x$
Logarithmusfunktionen	$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$
	$\log_a(x)$	$\frac{1}{\ln(a) \cdot x}$
Hyperbelfunktionen	$\sinh(x)$	$\cosh(x)$
	$\cosh(x)$	$\sinh(x)$
	$\tanh(x)$	$\frac{1}{\cosh^2(x)}$
	$\coth(x)$	$-\frac{1}{\sinh^2(x)}$

4.2 Differentiationsregeln

Faktorregel	$y = C \cdot f(x)$	$y' = C \cdot f'(x)$
Summenregel	$y = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x)$	$y' = f_1'(x) + f_2'(x) + \ldots + f_n'(x)$
Produktregel	$y = u(x) \cdot v(x)$	$y' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$
Quotientenregel	$y = \frac{u(x)}{v(x)}$	$y' = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{[v(x)]^2}$
Kettenregel	$y = F(u(x))$	$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \quad oder \quad f'(x) = F'(u) \cdot u'(x)$

Kettenregel: "Äußere Ableitung mal innere Ableitung"

4.3 Implizite Differentiation

Eine Funktion in *impliziter* Form $F(x,y) = 0$ wird gliedweise nach der Variablen *x* differenziert, wobei *y* als eine von *x* abhängige Funktion zu betrachten ist. Desshalb muß beim Differenzieren von *y* die *Kettenregel* angewendet werden! Anschließend wird nach y' aufgelöst.

Beispiel:

$$F(x,y) = x^2 + y^2 - 16 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{d}{dx}\left(x^2 + y^2 - 16\right) = 2x + 2y \cdot y' = 0 \qquad \Rightarrow \qquad y' = -\frac{x}{y}$$

4.4 Logarithmisches Differenzieren

Manche Funktionen lassen sich nicht nach den bisher bekannten Regeln differenzieren. Solche Funktionen müssen dann vorher auf geeignete weise behandelt werden.

Beispiel: $y = x^x \ \ (x > 0)$

1.) Logarithmieren: $\ln(y) = \ln(x^x) = x \cdot \ln(x)$

2.) Differenzieren: linke Seite: $\frac{d}{dx}(\ln(y)) = \frac{d(\ln(y))}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{1}{y} \cdot y'$

rechte Seite: $\frac{d}{dx}(x \cdot \ln(x)) = \ln(x) + x \cdot \frac{1}{x} = \ln(x) + 1$

$$\Rightarrow \qquad \frac{d}{dx}\left(x^x\right) = y' = y \cdot (\ln(x) + 1) = x^x \cdot (\ln(x) + 1)$$

4.5 Anwendung: Kurvendiskussion

4.5.1 Monotonie und Krümmung

Die 1. Ableitung $y' = f'(x)$ gibt die *Steigung* der Kurventangente an und bestimmt somit das *Monotonie-Verhalten* der Funktion:

$y' = f'(x_0) > 0$: monoton *wachsend* $\qquad$ $y' = f'(x_0) < 0$: monoton *fallend*

Die 2. Ableitung $y'' = f''(x)$ bestimmt das Krümmungsverhalten der Funktion:

$y'' = f''(x_0) > 0$: *Linkskrümmung* $\qquad$ $y'' = f''(x_0) < 0$: *Rechtskrümmung*

4.5.2 Relative Extremwerte

Hinreichende Bedingungen für lokale Extremwerte:

1.) $f'(x_E) = 0$ *und* $f''(x_E) < 0$ $\Rightarrow$ Hochpunkt

2.) $f'(x_E) = 0$ *und* $f''(x_E) > 0$ $\Rightarrow$ Tiefpunkt

4.5.3 Wendepunkte und Sattelpunkte

Hinreichende Bedingung für *Wendepunkte*:

$f''(x_0) = 0$ *und* $f'''(x_0) \neq 0$ (VZW (f'') Richtung egal!)

Ein *Sattelpunkt* ist ein Wendepunkt mit waagerechter Tangente. Hinreichende Bedingung:

$f'(x_0) = 0,\ f''(x_0) = 0$ *und* $f'''(x_0) \neq 0$

4.5.4 Verschiebung, Spiegelung und Streckung von Kurven

Ersetzt man $y = f(x)$ durch	so wird die Kurve
a) $y = f(x - x_0)$ b) $y = f(x) + y_0$	um x_0 in x-Richtung verschoben um y_0 in y-Richtung verschoben
c) $y = -f(x)$ d) $y = f(-x)$ e) $x = f(y)$	an der x-Achse gespiegelt an der y-Achse gespiegelt an der 1. Winkelhalbierenden gespiegelt
f) $y = a \cdot f(x)$ g) $y = f(b \cdot x)$	mit dem Faktor a in y-Richtung gestreckt mit dem Faktor 1/b in x-Richtung gestreckt
h) $y = \lvert f(x) \rvert$	Teile unterhalb der x-Achse werden an ihr gespiegelt

5. Integralrechnung

5.1 Unbestimmtes Integral und Stammfunktion

Eine differenzierbare Funktion $F(x)$ mit $F'(x) = f(x)$ heißt *Stammfunktion* oder *unbestimmtes Integral* von $f(x)$. Man schreibt:

$$F'(x) = f(x) \qquad \Leftrightarrow \qquad \int f(x)dx = F(x) + C$$

wobei C die Integrationskonstante darstellt und beliebige reelle Zahlenwerte annehmen kann. Die Integration ist somit die Umkehrung der Differentiation, es gilt daher:

$$\frac{d}{dx}\int f(x)dx = f(x)$$

5.2 Bestimmtes Integral - Flächenberechnung

Ist $F(x)$ Stammfunktion der stetigen positiven Funktion $f(x)$, so berechnet sich die Fläche zwischen der Kurve, der x-Achse und den Geraden $x = a$ und $x = b$ als *bestimmtes Integral* von $f(x)$ in der Form:

$$A = \int_a^b f(x)dx = \left[F(x)\right]_a^b = F(b) - F(a)$$

Die Ableitung eines bestimmten Integrals ist immer gleich Null: $\frac{d}{dx}\int_a^b f(x)dx = 0$

Bei der ***Flächenberechnung*** gibt es zwei Vereinfachungen:

für gerade Funktionen: $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\cdot\int_0^a f(x)dx$ für ungerade Funktionen: $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$

Die Fläche zwischen zwei Kurven berechnet sich über die Intagraldifferenz:

$$A = \int_a^b \left[f_o(x) - f_u(x)\right]dx$$

wobei $f_o(x)$ und $f_u(x)$ die obere bzw. untere Grenzfunktion darstellen.

ACHTUNG: Bei der *Flächenberechnung* muß prinzipell der *Betrag des bestimmten Integrals* gebildet werden, außerdem muß man aufgrund eventueller Vorzeichenwechsel der Funktion genau auf die *Festlegung der Integrationsgrenzen* achten!

5.3 Elementare Integrationsregeln für bestimmte Integrale

Faktorregel	$\int k \cdot f(x)\,dx = k \cdot \int f(x)\,dx$
Summenregel	$\int [f(x)+g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$
Vertauschung der Integrationsgrenzen	$\left.\begin{array}{l}\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a) \\ \int_b^a f(x)\,dx = F(a)-F(b)\end{array}\right\} \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$
Aufspaltung eines bestimmten Integrals	$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$
Beliebige Integrationsvariable	$\int f(x)\,dx = \int f(t)\,dt = \int f(u)\,du = \ldots$
Ableitung nach der oberen Grenze	$\frac{d}{dx}\left[\int_a^x f(t)\,dt\right] = f(x)$ (siehe Flächeninhaltsfunktion)

5.4 Integrationsverfahren

5.4.1 Grundintegrale

$\int x^n\,dx = \frac{1}{n+1}\cdot x^{n+1} + C \quad (n \neq -1)$	$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \begin{cases} \arcsin(x)+C_1 \\ -\arccos(x)+C_2 \end{cases}$
$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln\lvert x\rvert + C$	$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \begin{cases} \arctan(x)+C_1 \\ -arc\cot(x)+C_2 \end{cases}$
$\int e^x\,dx = e^x + C$	$\int \sinh(x)\,dx = \cosh(x)+C$
$\int a^x\,dx = \frac{1}{\ln(a)}\cdot a^x + C$	$\int \cosh(x)\,dx = \sinh(x)+C$
$\int \sin(x)\,dx = -\cos(x)+C$	$\int \frac{1}{\cosh^2(x)}\,dx = \tanh(x)+C$
$\int \cos(x)\,dx = \sin(x)+C$	$\int \frac{1}{\sinh^2(x)}\,dx = -\coth(x)+C$
$\int \frac{1}{\cos^2(x)}\,dx = \tan(x)+C$	$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = ar\sinh(x)+C = \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)+C$
$\int \frac{1}{\sin^2(x)}\,dx = -\cot(x)+C$	$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,dx = ar\cosh(x)+C = \ln\left\lvert x+\sqrt{x^2-1}\right\rvert+C$

$$\int \frac{1}{1-x^2}\,dx = \begin{cases} ar\tanh(x)+C = \frac{1}{2}\cdot\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)+C & \text{für } \lvert x\rvert<1 \\ ar\coth(x)+C = \frac{1}{2}\cdot\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)+C & \text{für } \lvert x\rvert>1 \end{cases}$$

5.4.2 Integration durch Substitution

Die Methode der Integration durch Substitution entsteht durch Umkehrung der Kettenregel der Differentialrechnung und hat zum Ziel ein Integral in einfachere Grund- oder Stammintegrale zu zerlegen. Dabei geht man nach folgenden fünf Schritten vor:

Beispiel: $f(x) = \sqrt{1+3x} \quad \Rightarrow \quad I = \int \sqrt{1+3x}\, dx$

1.) Bestimmung einer Hilfsfunktion: $u(x) = 1+3x$

2.) Transformation des Differentials: $\frac{du}{dx} = 3 \quad \Rightarrow \quad dx = \frac{1}{3} \cdot du$

3.) Durchführung der Substitution: $\int \sqrt{1+3x}\, dx = \int \sqrt{u} \cdot \frac{1}{3} du = \frac{1}{3} \cdot \int \sqrt{u}\, du$

4.) Ermittlung der Stammfunktion in *u*: $\frac{1}{3} \cdot \int \sqrt{u}\, du = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot u^{3/2} + C$

5.) Rücksubstitution: $I = \frac{2}{9} \cdot (1+3x)^{3/2} + C$

Wichtig dabei ist der Schritt 2, die Umrechnung des alten Differentials *dx* in das neue Differential *du*; dies erhält man durch Ableitung der Substitutionsgleichung *u(x)*.

Wichtige Integralsubstitutionen:

Integraltyp	Substitution	neues Integral
$\int f(ax+b)\, dx$	$u = ax+b; \quad du = a \cdot dx$	$\frac{1}{a} \cdot \int f(u)\, du$
$\int f[g(x)] \cdot g'(x)\, dx$	$u = g(x); \quad du = g'(x)\, dx$	$\int f(u)\, du$
$\int f(x) \cdot f'(x)\, dx$	$u = f(x); \quad du = f'(x)\, dx$	$\int u\, du = \frac{1}{2} \cdot u^2 + C$
$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\, dx$	$u = f(x); \quad du = f'(x)\, dx$	$\int \frac{du}{u} = \ln\lvert u \rvert + C$

5.4.3 Partielle Integration (Produktintegration)

Die Rechenvorschrift für die Partielle Integration oder Produktintegration entsteht durch Integration der Produktregel der Differentialrechnung:

$$\int u(x) \cdot v'(x)\, dx = u(x) \cdot v(x) - \int u'(x) \cdot v(x)\, dx$$

Die Integration gelingt, wenn sich der Integrand in Faktoren *u(x)* und *v'(x)* mit folgenden Eigenschaften zerlegen läßt: Zu *v'(x)* kann einfach eine Stammfunktion ermittelt werden und das Integral auf der rechten Seite läßt sich lösen!

Beispiel:

$$\begin{aligned} \int x \cdot \cos(x)\, dx &= x \cdot \sin(x) - \int \sin(x)\, dx \\ &= x \cdot \sin(x) + \cos(x) + C \end{aligned} \qquad \begin{cases} u = x; & u' = 1 \\ v' = \cos(x); & v = \sin(x) \end{cases}$$

5.4.4 Integration gebrochenrationaler Funktionen - Partialbruchzerlegung

Jede unecht gebrochenrationale Funktion läßt sich eindeutig darstellen als Summe einer ganz-rationalen Funktion und einer echt gebrochenrationalen Funktion. Ganzrationale Funktionen lassen sich leicht integrieren, echt gebrochenrationale Funktionen müssen erst in Summen von Partialbrüchen gemäß folgender Tabelle zerlegt werden:

Nennerfaktor		zugehöriger Ansatz
$x - x_0$	(einfach)	$\frac{A}{x - x_0}$
$(x - x_0)^2$	(doppelt)	$\frac{A_1}{x - x_0} + \frac{A_2}{(x - x_0)^2}$
...		...
$x^2 + b\,x + c$	(einfach)	$\frac{B\,x + C}{x^2 + b\,x + c}$
$(x^2 + b\,x + c)^2$	(doppelt)	$\frac{B_1\,x + C_1}{x^2 + b\,x + c} + \frac{B_2\,x + C_2}{(x^2 + b\,x + c)^2}$
...		...

Vorgehensweise:

1.) Die gegebene Funktion muß *echt* gebrochenrational sein, wenn nicht → Polynomdivision!!

2.) Abspaltung von Linearfaktoren durch ausklammern oder probieren (Nennernullstellen!).

3.) Zerlegungsansatz nach Tabelle.

4.) Mit Hauptnenner durchmultiplizieren.

5.) Bestimmung der Koeffizienten durch Grenzwertmethode (einsetzen der Nennernullstellen) oder einsetzen einfacher Werte (z.B. 0, ±1, ...) und Lösung des entstehenden LGS.

Beispiel:

$$f(x) = \frac{x-1}{x^2+5x+6} = \frac{x-1}{(x+2)(x+3)} = \frac{A_1}{x+2} + \frac{A_2}{x+3} \qquad \Big|\cdot HN$$

$$x - 1 = A_1(x+3) + A_2(x+2)$$

Grenzwertmethode:

$$x = -2: \quad -3 = A_1 \quad \Rightarrow \quad A_1 = -3$$
$$x = -3: \quad -4 = -A_2 \quad \Rightarrow \quad A_2 = 4$$

Ergebnis: $$f(x) = \frac{x-1}{x^2+5x+6} = \frac{-3}{x+2} + \frac{4}{x+3}$$

Die resultierenden Partialbrüche lassen sich jetzt folgendermaßen integrieren:

$$\int \frac{A}{x-x_0}\,dx = A\cdot\ln\left|x-x_0\right|+C \qquad \int \frac{A}{\left(x-x_0\right)^2}\,dx = -A\cdot\frac{1}{x-x_0}+C$$

allgemein: $\int \frac{A}{\left(x-x_0\right)^m}\,dx = -A\cdot\frac{1}{m-1}\cdot\frac{1}{\left(x-x_0\right)^{m-1}}$

Bei Integralen der Form $\int \frac{B\,x+C}{x^2+b\,x+c}\,dx$ muß man den Bruch weiter zerlegen, und zwar so daß im ersten Teil der Summe im Zähler die Ableitung des Nenners steht und der zweite Teil der Summe im Zähler eine Konstante enthält.

Beispiel: $I = \int \frac{3x-1}{x^2+2x+5}\,dx = ?$

$$\frac{3x-1}{x^2+2x+5} = \frac{3}{2}\cdot\frac{2x+2}{x^2+2x+5} - \frac{4}{\left(x+1\right)^2+4}$$

Integration durch Substitution (1.Summand: $u = x^2+2x+5$; 2. Summand: $u = \frac{x+1}{2}$):

Ergebnis: $I = \frac{3}{2}\cdot\ln\left(x^2+2x+5\right)-2\cdot\arctan\left(\frac{x+1}{2}\right)+C$

5.5 Uneigentliche Integrale

Ist *b* eine Unendlichkeitsstelle von *f(x)*, so definiert man:

$$\int_a^b f\left(x\right)dx = \lim_{u\to b-}\left\{\int_a^u f\left(x\right)dx\right\} \qquad \text{(bei } b \text{ uneigentliches Integral)}$$

Existiert ein endlicher Grenzwert, so heißt das Integral ***konvergent***; ist der Grenzwert uneigentlich, so heißt das Integral ***divergent***.

Ist *a* eine Unendlichkeitsstelle von *f(x)*, so erhält man das an der unteren Grenze *a uneigentliche Integral* durch eine entsprechende Definition.

Beispiel:

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \quad\Rightarrow\quad \int_0^u \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin\left(x\right)\Big|_0^u = \arcsin\left(u\right) \quad\Rightarrow\quad I = \lim_{u\to 1-}\left\{\arcsin\left(u\right)\right\} = \frac{\pi}{2}$$

Ist der Integrationsbereich *unbeschränkt*, so definiert man:

$$\int_a^\infty f\left(x\right)dx = \lim_{b\to\infty}\left\{\int_a^b f\left(x\right)dx\right\}; \quad \int_{-\infty}^b f\left(x\right)dx = \lim_{a\to-\infty}\left\{\int_a^b f\left(x\right)dx\right\}$$

Sind die Grenzwerte endlich, so heißen die uneigentlichen Integrale *konvergent*, andernfalls heißen sie *divergent*.

5.6 Einige andere häufig benötigte Integrale

$\int (a\,x+b)^n\,dx = \frac{(a\,x+b)^{n+1}}{(n+1)\cdot a}$ *für* $n \neq -1$	$\int \frac{dx}{a\,x+b} = \frac{1}{a}\cdot\ln\lvert a\,x+b\rvert$
$\int \frac{x\,dx}{a\,x+b} = \frac{x}{a} - \frac{b}{a^2}\cdot\ln\lvert a\,x+b\rvert$	$\int \frac{x\,dx}{(a\,x+b)^2} = \frac{b}{a^2\cdot(a\,x+b)} + \frac{1}{a^2}\cdot\ln\lvert a\,x+b\rvert$
$\int \frac{dx}{x\cdot(a\,x+b)} = -\frac{1}{b}\cdot\ln\left\lvert\frac{a\,x+b}{x}\right\rvert$	$\int \frac{dx}{x\cdot(a\,x+b)^2} = \frac{1}{b\cdot(a\,x+b)} - \frac{1}{b^2}\cdot\ln\left\lvert\frac{a\,x+b}{x}\right\rvert$
$\int \sqrt{a\,x+b}\,dx = \frac{2}{3a}\cdot\sqrt{(a\,x+b)^3}$	$\int x\cdot\sqrt{a\,x+b}\,dx = \frac{2\cdot(3a\,x-2b)}{15a^2}\cdot\sqrt{(a\,x+b)^3}$
$\int \frac{dx}{\sqrt{a\,x+b}} = \frac{2}{a}\cdot\sqrt{a\,x+b}$	$\int \frac{dx}{x\cdot\sqrt{a\,x+b}} = \frac{2\cdot(a\,x-2b)}{3a^2}\cdot\sqrt{a\,x+b}$
$\int x\cdot\sqrt{a^2+x^2}\,dx = \frac{1}{3}\cdot\sqrt{(a^2+x^2)^3}$	$\int \frac{x\cdot dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = \sqrt{a^2+x^2}$
$\int \sin(a\,x)\,dx = -\frac{\cos(a\,x)}{a}$	$\int \sin^2(x)\,dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin(2a\,x)}{4a} = \frac{x}{2} - \frac{\sin(a\,x)\cdot\cos(a\,x)}{2a}$
$\int \sin(a\,x)\cdot\sin(b\,x)\,dx = \frac{\sin(a-b)\cdot x}{2\cdot(a-b)} - \frac{\sin(a+b)\cdot x}{2\cdot(a+b)}$ *für* $a^2 \neq b^2$	
$\int x\cdot\sin(a\,x)\,dx = \frac{\sin(a\,x)}{a^2} - \frac{x\cdot\cos(a\,x)}{a}$	$\int x\cdot\cos(a\,x)\,dx = \frac{\cos(a\,x)}{a^2} + \frac{x\cdot\sin(a\,x)}{a}$
$\int \cos(a\,x)\cdot\cos(b\,x)\,dx = \frac{\sin(a-b)\cdot x}{2\cdot(a-b)} + \frac{\sin(a+b)\cdot x}{2\cdot(a+b)}$ *für* $a^2 \neq b^2$	
$\int \cos(a\,x)\,dx = \frac{\sin(a\,x)}{a}$	$\int \cos^2(x)\,dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin(2a\,x)}{4a} = \frac{x}{2} + \frac{\sin(a\,x)\cdot\cos(a\,x)}{2a}$
$\int \sin(a\,x)\cdot\cos(a\,x)\,dx = \frac{\sin^2(a\,x)}{2a}$	$\int \sin^n(a\,x)\cdot\cos(a\,x)\,dx = \frac{\sin^{n+1}(a\,x)}{(n+1)\cdot a}$ *für* $n \neq -1$
$\int \tan(a\,x)\,dx = -\frac{1}{a}\cdot\ln\lvert\cos(a\,x)\rvert$	$\int \tan^2(a\,x)\,dx = \frac{\tan(a\,x)}{a} - x$
$\int \cot(a\,x)\,dx = -\frac{1}{a}\cdot\ln\lvert\sin(a\,x)\rvert$	$\int \cot^2(a\,x)\,dx = -\frac{\cot(a\,x)}{a} - x$
$\int e^{a\,x}\,dx = \frac{1}{a}\cdot e^{a\,x}$	$\int e^{a\,x}\cdot\sin(b\,x)\,dx = \frac{e^{a\,x}}{a^2+b^2}\cdot[a\cdot\sin(b\,x) - b\cdot\cos(b\,x)]$
$\int x\cdot e^{a\,x}\,dx = \left(\frac{a\,x-1}{a^2}\right)\cdot e^{a\,x}$	$\int e^{a\,x}\cdot\cos(b\,x)\,dx = \frac{e^{a\,x}}{a^2+b^2}\cdot[a\cdot\cos(b\,x) + b\cdot\sin(b\,x)]$
$\int \ln(x)\,dx = x\cdot[\ln(x)-1]$	$\int [\ln(x)]^2\,dx = x\cdot[\ln(x)]^3 - 2\,x\cdot\ln(x) + 2\,x$
$\int x^m\cdot\ln(x)\,dx = \frac{x^{m+1}}{m+1}\cdot\left[\ln(x) - \frac{1}{m+1}\right]$ *für* $m \neq -1$	$\int \frac{\ln(x)}{x}\,dx = \frac{1}{2}\cdot[\ln(x)]^2$

6. Differentialgleichungen

6.1 Allgemeine DGL 1. Ordnung

6.1.1 Integration durch Trennung der Variablen - Separierbare DGL

Anwendung bei DGL´s der Form: $y' = \frac{f(x)}{g(y)}$ $\quad y' = \frac{g(y)}{f(x)}$ $\quad y' = f(x)\cdot g(y)$

Lösung durch Einführung von: $y' = \frac{dy}{dx}$ $\quad$ dadurch ergibt sich: $g(y)\,dy = f(x)\,dx$

durch Integration ergibt sich: $\int g(y)\,dy = \int f(x)\,dx \quad \Rightarrow \quad G(y) = F(x) + C$

Häufig ergeben sich Terme der Form: $\int \frac{dy}{y} = \int dx \quad \Rightarrow \quad \ln|y| = x + \ln\left|C^*\right|$

hier ist es sinnvoll eine Integrationskonstante mit $\ln\left|C^*\right|$ zu wählen, dadurch ergibt sich:

$$\ln\left|\frac{y}{C^*}\right| = x \quad \Rightarrow \quad |y| = \left|C^*\right|\cdot e^x \quad \Rightarrow \quad y = C\cdot e^x$$

6.1.2 Integration durch Substitution

Typ I: DGL´s der Form: $y' = f(ax + by + c)$

Substitution: $u = ax + by + c \qquad \big(u = u(x),\ y = y(x)\big) \qquad (*)$

differenzieren nach x: $u' = a + b\cdot y'$

mit $y' = f(u)$ ergibt sich $u' = a + b\cdot f(u)$

$\Rightarrow$ separierbare DGL: $\Rightarrow \frac{du}{dx} = a + b\cdot f(u) \quad \Rightarrow \quad dx = \frac{du}{a + b\cdot f(u)}$

Integration ergibt $u(x)$.

Rücksubstitution: $u(x)$ in Substitutionsgleichung (*) einsetzen und nach $y(x)$ auflösen.

Typ II: DGL´s der Form: $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$ **Ähnlichkeitsdgl.**

Substitution: $u = \frac{y}{x} \qquad \big(u = u(x),\ y = y(x)\big) \qquad (*)$

damit: $y = x\cdot u$ differenzieren ergibt: $y' = u + x\cdot u'$

mit $y' = f(u)$ ergibt sich: $f(u) = u + x\cdot u' \quad \Rightarrow \quad x\cdot u' = f(u) - u$

$\Rightarrow$ separierbare DGL: $\frac{du}{dx}\cdot x = f(u) - u \quad \Rightarrow \quad \int \frac{du}{f(u) - u} = \int \frac{dx}{x}$

Rücksubstitution ergibt $y(x)$.

6.2 Lineare DGL 1. Ordnung

DGL´s der Form: $y'(x)+g(x)\cdot y(x)=r(x)$

1. Schritt: Lösung der homogenen DGL

$y'(x)+g(x)\cdot y(x)=0$ separierbar! $\frac{dy}{dx}=-g(x)\cdot y(x) \quad\Rightarrow\quad \int\frac{dy}{y}=-\int g(x)\,dx$

$\ln|y|=-G(x)+\ln|C^*| \quad\Rightarrow\quad \underline{y_h(x)=C\cdot e^{-G(x)}=C\cdot y_1(x)}$

2. Schritt: Lösung der inhomogenen DGL durch Variation der Konstanten

Ansatz: $y(x)=C(x)\cdot y_1(x)$ (*)

$y'(x)=C'(x)\cdot y_1(x)+C(x)\cdot y_1'(x)$

einsetzen in inhomogene DGL:

$C'(x)\cdot y_1(x)+C(x)\cdot\left[y_1'(x)+g(x)\cdot y_1(x)\right]=r(x)$ [...] = 0 !!! (siehe DGL)

$\Rightarrow \quad C'(x)=\frac{r(x)}{y_1(x)} \quad\Rightarrow\quad C(x)=\int\frac{r(x)}{y_1(x)}dx+K$

einsetzen in Ansatz (*): $\Rightarrow \quad y(x)=\left(\int\frac{r(x)}{y_1(x)}dx+K\right)\cdot y_1(x)$

Allgemein: $y(x)=y_h(x)+y_p(x)$

mit $y_h(x)=K\cdot y_1(x)$, $y_p(x)=y_1(x)\cdot\int\frac{r(x)}{y_1(x)}dx$ *und* $y_1(x)=e^{-G(x)}$

Eine andere Möglichkeit bietet auch ein geeigneter "Störansatz" zur Bestimmung von $y_p(x)$ (siehe Lineare DGL n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten)

6.3 Lineare DGL 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

DGL´s der Form: $y'(x)+a\cdot y(x)=r(x)$

1. Schritt: Lösung der homogenen DGL

$y'(x)+a\cdot y(x)=0 \quad\Rightarrow\quad y_h(x)=C\cdot e^{-a\cdot x}$

2. Schritt: Lösung der inhomogenen DGL

Möglichkeit 1: Variation der Konstanten (s.o.)
Möglichkeit 2: "Störansatz"

6.4 DGL 2. Ord. die auf 1. Ord. zurückgeführt werden können

durch Substitution in zwei besonderen Fällen:

Typ A: $y'' = f(x, y')$ (... y fehlt!)

Substitution: $u = y'$

Beispiel: $y'' + (y')^2 = 0$

Sub: $u = y' \Rightarrow y'' = u' = \frac{du}{dx} \Rightarrow \frac{du}{dx} + u^2 = 0$

separierbage DGL: $-\int \frac{du}{u^2} = \int dx \Rightarrow \frac{1}{u} = x + C_1$

Rücksub: $y = \int u \cdot dx = \int \frac{dx}{x + C_1} = \ln|x + C_1| + C_2$

Typ B: $y'' = f(y)$ (... x und y´ fehlen!)

Multiplikation mit y´ ("integrierender Faktor")

$\Rightarrow \quad y' \cdot y'' = f(y) \cdot y' \quad \Rightarrow \quad \int y' \cdot y'' \cdot dx = \int f(y) \cdot y' \cdot dx$

mit $y' = \frac{dy}{dx} \quad \Rightarrow \quad \int y'' \cdot dy = \int f(y) \cdot dy$

wegen: $\frac{d}{dx}(y')^2 = 2 \cdot y' \cdot y'' \quad \Rightarrow \quad \int y'' \cdot dy = \frac{1}{2} \cdot (y')^2$

$\Rightarrow \quad \frac{1}{2} \cdot (y')^2 = \int f(y) \cdot dy$

Beispiel: $y'' = -\frac{1}{y^2}; \quad y(0) = 2; \; y'(0) = 1$ Multiplikation mit y´:

$\Rightarrow \quad y'' \cdot y' = -\frac{y'}{y^2} \quad \Rightarrow \quad \int y'' \cdot dy = -\int \frac{dy}{y^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} \cdot (y')^2 = \frac{1}{y} + C_1$

mit $y(0) = 2; \; y'(0) = 1$ ergibt sich $\frac{1}{2} = \frac{1}{2} + C_1 \quad \Rightarrow \quad C_1 = 0$

$\Rightarrow \quad y' = \sqrt{\frac{2}{y}} \quad \Rightarrow$ mit $y' = \frac{dy}{dx} \quad \Rightarrow \quad \int \sqrt{y} \cdot dy = \int \sqrt{2} \cdot dx$

$\Rightarrow \quad \frac{2}{3} \cdot y^{\frac{3}{2}} = \sqrt{2} \cdot x + C_2 \quad \Rightarrow \quad y = \left(\frac{2}{3} \cdot \sqrt{2} \cdot x + K \right)^{\frac{2}{3}}$

mit $y(0) = K^{\frac{2}{3}} \overset{!}{=} 2 \quad \Rightarrow \quad K = \sqrt{8} \quad \Rightarrow \quad y(x) = \left(\frac{2}{3} \cdot \sqrt{2} \cdot x + \sqrt{8} \right)^{\frac{2}{3}}$

6.5 Lineare DGL n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

DGL´s der Form: $a_n\, y^{(n)} + a_{n-1}\, y^{(n-1)} + \ldots + a_1\, y' + a_0\, y = r(x)$

1. Schritt: Lösung der homogenen DGL mit charakteristischer Gleichung

Ansatz: aus der n-ten Ableitung von y wird die n-te Potenz von λ

$$a_n\, y^{(n)} + a_{n-1}\, y^{(n-1)} + \ldots + a_1\, y' + a_0\, y = 0$$

$$\Rightarrow \quad a_n\, \lambda^n + a_{n-1}\, \lambda^{(n-1)} + \ldots + a_1\, \lambda + a_0 = 0$$

⇒ jedes Polynom n-ten Grades hat genau n Nullstellen λ_k, die entweder reell oder paarweise konjugiert komplex sind. Zu jedem λ_k gehört eine

Fundamentallösung: $y_k = e^{\lambda_k x}$ (Euler-Ansatz)

Beispiel DGL 2. Ordnung: $a_2\, y'' + a_1\, y' + a_0\, y = 0$

⇒ charakteristische Gleichung: $a_2\, \lambda^2 + a_1\, \lambda + a_0 = 0$

Lösung dieser Quadratischen Gleichung unterscheidet 3 Fälle:

Fall 1:	$\lambda_1 \neq \lambda_2 \in R$	⇒	allgemeine Lösung:	$y_h = C_1 \cdot e^{\lambda_1 \cdot x} + C_2 \cdot e^{\lambda_2 \cdot x}$
Fall 2:	$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \in R$	⇒	allgemeine Lösung:	$y_h = (C_1 + C_2 \cdot x) \cdot e^{\lambda \cdot x}$
Fall 3:	$\lambda_{1,2} = a \pm jb \in C$	⇒	allgemeine Lösung:	$y_h = e^{a \cdot x} \cdot (C_1 \cdot \cos bx + C_2 \cdot \sin bx)$

Wenn $a_0 = 0$ (kein y in DGL)⇒ $\lambda_1 = 0,\quad \lambda_2 = ?\quad y_h = C_1 + C_2 \cdot e^{\lambda_2 \cdot x}$

2. Schritt: Lösung der inhomogenen DGL mit "Störansatz"

Man ermittelt eine allgemeine Form für y_p, die der Form der Störfunktion r(x) angepaßt ist, und führt einen sinnvollen Koeffizientenvergleich durch. Dabei sind zwei Fälle zu unterscheiden: Normalfall und Resonanzfall. Besteht die Störfunktion aus zwei oder mehreren additiven Anteilen $r_1(x)$ und $r_2(x)$, so ermittelt man zwei unterschiedliche partikuläre Lösungen y_{p1} und y_{p2} und addiert sie. Anschließend muß man den Ansatz n mal ableiten und in die DGL einsetzen. Nach Vereinfachung führt man den Koeffizientenvergleich durch.

Störfunktion r(x)	Ansatz y_p ohne Resonanz
a	A
x^n $a_0 + a_1\, x + \ldots + a_n\, x^n$	$A_0 + A_1\, x + \ldots + A_n\, x^n$
$a \cdot e^{k \cdot x}$	$A \cdot e^{k \cdot x}$
$a \cdot \cos mx$ $a \cdot \sin mx$ $a_1 \cdot \cos mx + a_2 \cdot \sin mx$	$A_1 \cdot \cos mx + A_2 \cdot \sin mx$
$a \cdot e^{k \cdot x} \cdot \cos mx$ $a \cdot e^{k \cdot x} \cdot \sin mx$ $a_1 \cdot e^{k \cdot x} \cdot \cos mx + a_2 \cdot e^{k \cdot x} \cdot \sin mx$	$A_1 \cdot e^{k \cdot x} \cdot \cos mx + A_2 \cdot e^{k \cdot x} \cdot \sin mx$

Achtung: Resonanzfall!

Im Resonanzfall muß ein modifizierter Ansatz durchgeführt werden. Resonanz liegt vor, wenn die (oder ein Teil der) Störfunktion einer Fundamentallösung der DGL entspricht oder wenn eine der folgenden Situationen vorliegt:

Störfunktion r(x)	Ansatz y_p mit Resonanz
a_0	$x \cdot A_0$
$a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ a) $\lambda = 0$ einfacher Eigenwert b) $\lambda = 0$ s-facher Eigenwert	 $x \cdot \left(A_0 + A_1 x + \ldots + A_n x^n\right)$ $x^s \cdot \left(A_0 + A_1 x + \ldots + A_n x^n\right)$
$a_1 \cdot e^{k \cdot x} \cdot \cos mx + a_2 \cdot e^{k \cdot x} \cdot \sin mx$ a) $\lambda = k \pm jm$ einfache Eigenwerte b) $\lambda = k \pm jm$ s-fache Eigenwerte	 $x \cdot \left(A_1 \cdot e^{k \cdot x} \cdot \cos mx + A_2 \cdot e^{k \cdot x} \cdot \sin mx\right)$ $x^s \cdot \left(A_1 \cdot e^{k \cdot x} \cdot \cos mx + A_2 \cdot e^{k \cdot x} \cdot \sin mx\right)$

Beispiel: $y'' - 6y' - 16y = 3 + 2x$

1. Schritt: char. Gl. $\lambda^2 - 6\lambda - 16 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = -2,\ \lambda_2 = 8$

$$\Rightarrow \quad y_h = C_1 \cdot e^{-2x} + C_2 \cdot e^{8x}$$

2. Schritt: $r(x) = 3 + 2x \quad \Rightarrow$ keine Resonanz

$$\Rightarrow \quad y_p = A_0 + A_1 x, \qquad y_p' = A_1, \qquad y_p'' = 0$$

in DGL: $-6A_1 - 16A_0 - 16A_1 x = 3 + 2x$

Koeffizientenvergleich:

$$\left.\begin{array}{ll} x^1: & -16A_1 = 2 \\ x^0: & -6A_1 - 16A_0 = 3 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad A_1 = -\frac{1}{8}, \quad A_2 = -\frac{9}{64}$$

$$\Rightarrow \quad y_p = -\frac{9}{64} - \frac{1}{8}x$$

3. Schritt: $y = y_h + y_p = C_1 \cdot e^{-2x} + C_2 \cdot e^{8x} - \frac{9}{64} - \frac{1}{8}x$

Komplexer Ansatz für die partikuläre Lösung

Störfunktionen der Form: $r(x) = e^{k\cdot x}\cdot(a_1\cdot\cos mx + a_2\cdot\sin mx) = a\cdot e^{k\cdot x}\cdot\cos(mx+\Phi)$

zugehöriger Ansatz: $y_p(x) = e^{k\cdot x}\cdot(A_1\cdot\cos mx + A_2\cdot\sin mx) = A\cdot e^{k\cdot x}\cdot\cos(mx+\varphi)$

komplexe Darstellung: $r(x) = \mathrm{Re}\{\tilde{r}(x)\}$ *mit* $\tilde{r}(x) = a\cdot e^{k\cdot x}\cdot e^{j(mx+\Phi)}$

$y_p(x) = \mathrm{Re}\{\tilde{y}_p(x)\}$ *mit* $\tilde{y}_p(x) = A\cdot e^{k\cdot x}\cdot e^{j(mx+\varphi)}$

Ableiten von $\tilde{y}_p(x)$ und einsetzen in die zugehörige komplexe DGL führt zu einer komplexen Bestimmungsgleichung für A und φ.

Beispiel: $y'' + 4y' + 3y = 8e^{-x}\cdot\cos 2x$ (Eigenwerte -1,-3; keine Resonanz!)

$r(x) = 8e^{-x}\cdot\cos 2x = 8e^{-x}\cdot e^{j(2x)} = 8e^{(2j-1)x}$

Ansatz: $\tilde{y}_p(x) = Ae^{-x}\cdot e^{j(2x+\varphi)} = Ae^{j\varphi}\cdot e^{(2j-1)x}$

Ableiten: $\tilde{y}'_p(x) = Ae^{j\varphi}\cdot e^{(2j-1)x}\cdot(2j-1)$

$\tilde{y}''_p(x) = Ae^{j\varphi}\cdot e^{(2j-1)x}\cdot(2j-1)^2 = Ae^{j\varphi}\cdot e^{(2j-1)x}\cdot(-3-4j)$

in DGL: $\tilde{y}'' + 4\tilde{y}' + 3\tilde{y} = 8e^{-x}\cdot e^{j2x} = 8e^{(2j-1)x}$

$$\Rightarrow \quad Ae^{j\varphi}\cdot e^{(2j-1)x}\cdot(-3-4j+4\cdot(2j-1)+3) = 8e^{(2j-1)x} \qquad \Big| :e^{(2j-1)x}$$

$$\Rightarrow \quad Ae^{j\varphi}\cdot(-4+4j) = 8 \qquad \Rightarrow \quad Ae^{j\varphi}\cdot 4\sqrt{2}\cdot e^{j\frac{3\pi}{4}} = 8$$

$$\Rightarrow \quad Ae^{j\varphi} = \frac{8}{4\sqrt{2}}\cdot e^{-j\frac{3\pi}{4}} \qquad \Rightarrow \quad A = \sqrt{2}, \quad \varphi = -\frac{3\pi}{4}$$

$$\Rightarrow \quad \tilde{y}_p = \sqrt{2}\cdot e^{-j\frac{3\pi}{4}}\cdot e^{(2j-1)x} = \sqrt{2}\cdot e^{-x}\cdot e^{j\left(2x-\frac{3\pi}{4}\right)}$$

$$\Rightarrow \quad y_p = \mathrm{Re}(\tilde{y}_p) = \sqrt{2}\cdot e^{-x}\cdot\cos\left(2x-\frac{3\pi}{4}\right)$$

6.6 Euler´sche DGL

DGL´s der Form: $a_n\,x^n\,y^{(n)}+\ldots+a_2\,x^2\,y'' + a_1\,x\,y' + a_0\,y = r(x)$ $\qquad y = f(x)!$

Substitution: $x = e^t;\qquad y' = \frac{\dot{y}}{e^t};\qquad y'' = \frac{\ddot{y}-\dot{y}}{e^{2t}}$

Einsetzen in DGL ergibt eine DGL mit konstanten Koeffizienten für y(t)!

$y(t) = \ldots$

Rücksubstitution: über: $t = \ln(x)$ ergibt Lösung: y = f(x)!

(ersetze alle e^{at} durch x^a!)

6.7 Anfangs- Rand- und Eigenwertprobleme

Anfangswertproblem

Merkmal: mehrere Bedingungen an der gleichen Stelle x_0:

Bsp. DGL 2. Ordnung: $\Rightarrow$ 2 Anfangsbedingungen $y(x_0) = y_0$; $y'(x_0) = y_1$

Randwertproblem

Merkmal: mehrere Bedingungen an unterschiedlichen Stellen a, b:

Bsp.: $y'' + y = 0$ allg. Lösung: $y(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x$

a) $y(0) = 0 \Rightarrow 0 = C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0 \Rightarrow C_1 = 0$

$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \Rightarrow 1 = C_1 \cos\frac{\pi}{2} + C_2 \sin\frac{\pi}{2} \Rightarrow C_2 = 1$

$\Rightarrow y_P = \sin x$

b) $y(0) = 0 \Rightarrow 0 = C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0 \Rightarrow C_1 = 0$

$y(\pi) = 1 \Rightarrow 1 = C_1 \cos\pi + C_2 \sin\pi \Rightarrow C_1 = -1$

$\Rightarrow$ Widerspruch! $\Rightarrow$ keine Lösung für dieses RWP!

c) $y(0) = 0 \Rightarrow 0 = C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0 \Rightarrow C_1 = 0$

$y(\pi) = 0 \Rightarrow 0 = C_1 \cos\pi + C_2 \sin\pi \Rightarrow C_1 = 0$

$\Rightarrow$ kein Widerspruch! C_2 ist frei wählbar!

$\Rightarrow$ allg. Lösung für dieses RWP: $y_P = C_2 \cdot \sin x$

Eigenwertproblem

Bsp. schwingende Saite: $y'' + \omega^2 y = 0$ allg. Lösung: $y = C_1 \cos(\omega x) + C_2 \sin(\omega x)$

$y(0) = 0 \Rightarrow 0 = C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot 0 \Rightarrow C_1 = 0$

$y(l) = 0 \Rightarrow 0 = C_1 \cos(\omega l) + C_2 \sin(\omega l)$

mit $C_1 = 0$ $\Rightarrow 0 = C_2 \cdot \sin(\omega l)$

nichttrivial lösbar falls: $\sin(\omega l) = 0$

$\Rightarrow \omega \cdot l = n \cdot \pi \Rightarrow \omega = \frac{n \cdot \pi}{l} \Rightarrow C_2 = beliebig$

$\Rightarrow y_P = C_2 \cdot \sin(\omega x) \Rightarrow y_n = C_n \cdot \sin\left(\frac{n \cdot \pi}{l} \cdot x\right)$

Gesamtschwingungsbild: $y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cdot \sin\left(\frac{n \cdot \pi}{l} \cdot x\right)$

6.8 Anwendung: Schwingungs - DGL

6.8.1 Freie Schwingungen

DGL´s der Form: $a\,\ddot{x} + b\,\dot{x} + c\,x = 0$

Mit den Abkürzungen: $\delta = \frac{b}{2a}$; $\omega_0 = \sqrt{\frac{c}{a}}$; $\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$; $D = \frac{\delta}{\omega_0}$

ergibt sich: $\ddot{x} + 2\,\delta\,\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$ mit den Lösungen: $\lambda_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$

Fall 1:	$\delta = 0$	$\Leftrightarrow$	$D = 0$	ungedämpfte Schwingung
	$\lambda_{1,2} = \pm j \cdot \omega_0$	$\Rightarrow$	$x(t) = C_1 \cos(\omega_0\, t) + C_2 \sin(\omega_0\, t)$	
Fall 2:	$0 < \delta < \omega_0$	$\Leftrightarrow$	$0 < D < 1$	schwache Dämpfung
	$\lambda_{1,2} = -\delta \pm j \cdot \omega_d$	$\Rightarrow$	$x(t) = e^{-\delta t} \cdot \left[C_1 \cos(\omega_d\, t) + C_2 \sin(\omega_d\, t)\right]$	
Fall 3:	$\delta = \omega_0$	$\Leftrightarrow$	$D = 1$	Grenzfall
	$\lambda_{1,2} = -\delta$	$\Rightarrow$	$x(t) = (C_1 + C_2\, t) \cdot e^{-\delta t}$	
Fall 4:	$\delta > \omega_0$	$\Leftrightarrow$	$D > 1$	starke Dämpfung
	$\lambda_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$	$\Rightarrow$	$x(t) = C_1\, e^{\lambda_1 t} + C_2\, e^{\lambda_2 t}$	

6.8.2 Erzwungene Schwingungen

DGL´s der Form: $\ddot{x} + 2\,\delta\,\dot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 \hat{x}_E \cdot \cos(\omega_E\, t)$

mit Lösung: $x_p(t) = \hat{x}_p \cdot \cos(\omega_E\, t - \varphi)$

Allgemeiner Fall: $\delta > 0 \quad \Leftrightarrow \quad D > 0$

Fall 1:	$\omega_E < \omega_0$	$\Rightarrow$	$0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$	unterkritisch
Fall 2:	$\omega_E > \omega_0$	$\Rightarrow$	$\frac{\pi}{2} < \varphi < \pi$	überkritisch
Fall 3:	$\omega_E = \omega_0$	$\Rightarrow$	$\varphi = \frac{\pi}{2}$	

$$\Rightarrow \qquad \hat{x}_p = \frac{\omega_0^2 \cdot \hat{x}_E}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega_E^2\right)^2 + 4\,\delta^2\,\omega_E^2}}; \qquad \tan\varphi = \frac{2\,\delta\,\omega_E}{\omega_0^2 - \omega_E^2}$$

Mit den Abkürzungen: $u = \frac{\omega_E}{\omega_0}$; $D = \frac{\delta}{\omega_0}$; $V = \frac{\hat{x}_p}{\hat{x}_E}$

ergibt sich: $V = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - u^2\right)^2 + 4\,D^2\,u^2}}$; $\tan\varphi = \frac{2\,D\,u}{1 - u^2}$

V ... Amplitudengang
φ ... Phasengang

6.9 DGL - Systeme

6.9.1 Normalform einer DGL n-ter Ordnung

Jede DGL n-ter Ordnung läßt sich in ein System von DGLs 1. Ordnung umwandeln.
Man führt dazu Zustandsgrößen ein, und erhält ein System der Zustandsgleichungen:

Geg: $y^{(n)}(x) = f\left(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right)$

$$\Rightarrow \quad \begin{array}{lllll} y & = & y_1 & & \\ y' & = & y_1' & = & y_2 \\ y'' & = & y_2' & = & y_3 \\ y''' & = & y_3' & = & y_4 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ y^{(n)} & = & y_n' & = & f(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \end{array} \qquad \text{Normalform}$$

Bsp. $\dddot{x} - 3\dot{x} + 2x = t \quad \Rightarrow \quad \dddot{x} = -2x + 3\dot{x} + t$

$$\left.\begin{array}{l} x = x_1 \\ \dot{x} = \dot{x}_1 = x_2 \\ \ddot{x} = \dot{x}_2 = x_3 \\ \dddot{x} = \dot{x}_3 = -2x_1 + 3x_2 + t \end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ t \end{bmatrix}$$

In kompakter Matrixschreibweise: $\underline{\dot{x}} = \underline{A} \cdot \underline{x} + \underline{r}(t)$

6.9.2 Systeme linearer DGL 1.Ordnung mit konstanten Koeffizienten

DGL´s der Form: $\underline{\dot{x}} = \underline{A} \cdot \underline{x} + \underline{r}(t)$ haben die Lösung: $\underline{x}(t) = \underline{x_h}(t) + \underline{x_p}(t)$

1. Schritt: Lösung des homogenen Systems

1.) $\underline{\dot{x}} = \underline{A} \cdot \underline{x}$

2.) $\underline{x} = \underline{c} \cdot e^{\lambda t}; \qquad \underline{\dot{x}} = \lambda \underline{c} \cdot e^{\lambda t}$

3.) $\lambda \underline{c} = \underline{A} \cdot \underline{c} \quad \Leftrightarrow \quad \left(\underline{A} - \lambda \underline{E}\right) \cdot \underline{c} = 0$ nichttrivial lösbar für

4.) $\det\left(\underline{A} - \lambda \underline{E}\right) = 0$ $\Rightarrow$ charakt. Gleichung $\Rightarrow$ n Eigenwerte

5.) $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ $\Rightarrow$ einsetzen in (3) $\Rightarrow$ $\underline{c}^{(i)}$

6.) $\underline{x}^{(i)} = \underline{c}^{(i)} e^{\lambda_i t}$ $\Rightarrow$ Fundamentallösungsvektoren

7.) $\underline{\underline{x}(t) = K_1 \underline{x}^{(1)} + K_2 \underline{x}^{(2)} + \ldots + K_n \underline{x}^{(n)}}$

Dieses Schema funktioniert für *einfache reelle* Eigenwerte!

Bsp: $\dot{x}_1 = 2\,x_1 + x_2$
$\dot{x}_2 = 3\,x_1 + 4\,x_2$

$\Rightarrow \quad \underline{\dot{x}} = \underline{A}\cdot\underline{x} \quad mit \quad \underline{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \left(\underline{A} - \lambda\,\underline{E}\right)\cdot\underline{c} = 0!$

$\Rightarrow \quad \det\left(\underline{A} - \lambda\,\underline{E}\right) = 0! \quad \Rightarrow \quad \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 3 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 6\,\lambda + 5 = 0$

$\Rightarrow \quad \lambda_1 = 5;\ \lambda_2 = 1$ (Eigenwerte)

mit $\lambda_1 = 5$: $\Rightarrow \quad \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \underline{0}$ Wahl: $c_1 = 1 \ \Rightarrow\ c_2 = 3 \ \Rightarrow \quad \underline{c}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$

mit $\lambda_2 = 1$: $\Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \underline{0}$ Wahl: $c_1 = 1 \ \Rightarrow\ c_2 = -1 \ \Rightarrow \quad \underline{c}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \quad \underline{x}(t) = K_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} e^{5t} + K_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{t}$

Neben reellen, kann $\underline{A}$ auch *einfache Paare konjugiert Komplexer* Eigenwerte besitzen:

$\Rightarrow$ Zu $\lambda_{1,2} = a \pm jb$ erhält man komplexe Fundamentallösungsvektoren: $\underline{\tilde{x}} = \underline{c}\,e^{(a\pm jb)t}$

$\underline{x}^{(1)} = \mathrm{Re}\left(\underline{\tilde{x}}\right);\quad \underline{x}^{(2)} = \mathrm{Im}\left(\underline{\tilde{x}}\right)$ sind dann die reellen Fundamentallösungsvektoren.

Beispiel:

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1 + 4\,x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1 + x_2 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \underline{\dot{x}} = \underline{A}\cdot\underline{x}$$

$$\det\left(\underline{A} - \lambda\,\underline{E}\right) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 4 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\,\lambda + 5 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \lambda_{1,2} = 1 \pm 2\,j$$

Einsetzen von $\lambda_1 = 1 + 2\,j$ in LGS: $\begin{bmatrix} -2\,j & 4 \\ -1 & -2\,j \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \underline{0} \quad \Rightarrow \quad \underline{c} = \begin{bmatrix} 2\,j \\ -1 \end{bmatrix}$

Komplexer Lösungsvektor: $\underline{\tilde{x}} = \underline{c}\,e^{(1+2\,j)t} = \begin{bmatrix} 2\,j \\ -1 \end{bmatrix}\cdot e^{t}\cdot\left(\cos 2\,t + j\cdot\sin 2\,t\right)$

$$\underline{\tilde{x}} = e^{t}\begin{bmatrix} -2\sin 2\,t + 2\,j\cos 2\,t \\ -\cos 2\,t - j\sin 2\,t \end{bmatrix} = e^{t}\begin{bmatrix} -2\sin 2\,t \\ -\cos 2\,t \end{bmatrix} + j\,e^{t}\begin{bmatrix} 2\cos 2\,t \\ -\sin 2\,t \end{bmatrix}$$

Lösung als Linearkombination:

$$\underline{x}(t) = K_1\,\underline{x}^{(1)} + K_2\,\underline{x}^{(2)} \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x_1(t) = e^{t}\left(-2\,K_1\sin 2\,t + 2\,K_2\cos 2\,t\right) \\ x_2(t) = e^{t}\left(-K_1\cos 2\,t - K_2\sin 2\,t\right) \end{cases}$$

Stabilität von DGL-Systemen:

Ein DGL-System $\underline{\dot{x}} = \underline{A}\cdot\underline{x}$ heißt:

a) *stabil*, wenn alle Lösungsfunktionen beschränkt sind,

b) ***asymtotisch stabil***, wenn gilt: $\mathrm{Re}\left(\lambda_i\right) < 0$ für alle i = 1, 2, ..., n

c) *grenzstabil*, wenn es Eigenwerte auf der imaginären Achse gibt.

2. Schritt: Lösung des inhomogenen Systems

Zur Lösung der inhomogenen DGL $\underline{\dot{x}} = \underline{A} \cdot \underline{x} + \underline{r}(t)$ wird ein geeigneter *Störansatz* gemäß der Form der Störfunktion $\underline{r}(t)$ gemacht:

Fall 1.) Störfunktion von der Form: $\underline{r}(t) = \begin{bmatrix} p_1(t) \\ : \\ p_n(t) \end{bmatrix} e^{\alpha t}$ $p_{(i)}$ vom Grad $\leq$ m

a) $\alpha = 0$, und $\lambda = 0$ kein Eigenwert! (keine Resonanz)

$\Rightarrow \quad \underline{x}_p = \begin{bmatrix} q_1(t) \\ : \\ q_n(t) \end{bmatrix}$ alle $q_{(i)}$ vom Grad = m!

b) $\alpha \neq 0$, und $\lambda = \alpha$ kein Eigenwert! (keine Resonanz)

$\Rightarrow \quad \underline{x}_p = \begin{bmatrix} q_1(t) \\ : \\ q_n(t) \end{bmatrix} e^{\alpha t}$ alle $q_{(i)}$ vom Grad = m!

Fall 2.) Störfunktion von der Form: $\underline{r}(t) = \underline{a}^{(1)} \cos(\beta t) + \underline{a}^{(2)} \sin(\beta t)$
Voraussetzung: $\lambda = \pm \beta j$ kein Eigenwert! (keine Resonanz)
$\Rightarrow \quad \underline{x}_p = \underline{d}^{(1)} \cos(\beta t) + \underline{d}^{(2)} \sin(\beta t)$

Bsp: $\underline{\dot{x}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \underline{x} - \begin{bmatrix} 3t \\ 3t+5 \end{bmatrix} e^{-t}$

1. homogene Lösung siehe oben: $\underline{x}_h(t) = K_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} e^{5t} + K_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{t}$

2. inhomogene Lösung: Ansatz mit

$\underline{x}_p = \begin{bmatrix} a_0 + a_1 t \\ b_0 + b_1 t \end{bmatrix} e^{-t} \quad \Rightarrow \quad \underline{\dot{x}}_p = \begin{bmatrix} a_1 - a_0 - a_1 t \\ b_1 - b_0 - b_1 t \end{bmatrix} e^{-t}$ (Kettenregel!)

einsetzen in DGL und $|:e^{-t}$

$$\Rightarrow \quad \begin{bmatrix} a_1 - a_0 - a_1 t \\ b_1 - b_0 - b_1 t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_0 + a_1 t \\ b_0 + b_1 t \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3t \\ 3t+5 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 3a_0 - a_1 + b_0 + (3a_1 + b_1)t \\ 3a_0 - b_1 + 5b_0 + (3a_1 + 5b_1)t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3t \\ 3t+5 \end{bmatrix}$$

Koeffizientenvergleich ergibt: $a_0 = 0;\ a_1 = 1;\ b_0 = 1;\ b_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{x}_p = \begin{bmatrix} t \\ 1 \end{bmatrix} e^{-t}$

Allgemeine Lösung: $\underline{x} = \underline{x}_h + \underline{x}_p = K_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} e^{5t} + K_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{t} + \begin{bmatrix} t \\ 1 \end{bmatrix} e^{-t}$

7. Potenz- und Fourier-Reihen

7.1 Allgemeine Konvergenzkriterien

7.1.1 Leibniz-Kriterium für alternierende Reihen

Für alternierende Reihen gilt:bilden die Koeffizienten a_k eine monoton fallende Nullfolge, so ist die Reihe konvergent.

7.1.2 Quotienten- und Wurzelkriterium

$$q_Q = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \qquad q_W = \lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{|a_k|}$$

q < 1 $\Rightarrow$ Konvergenz
q > 1 $\Rightarrow$ Divergenz
q = 1 $\Rightarrow$ keine Aussage möglich !

7.2 Potenzreihen

7.2.1 Allgemeine Form der Potenzreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \ldots$$

(x_0 ist Entwicklungspunkt !)

7.2.2 Konvergenzradien von Potenzreihen

$$r = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right| \qquad \text{bzw.} \qquad r = \lim_{k\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt[k]{|a_k|}}\right)$$

7.2.3 Taylor-Reihe

Die Funktion f(x) sei in der Umgebung der Stelle x_0 beliebig oft differenzierbar, dann gilt:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\cdot(x-x_0)^k = f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}\cdot(x-x_0)^2 + \ldots$$

7.2.4 Rechenregeln für Potenzreihen

- Potenzreihen dürfen *innerhalb ihres Konvergenzbereiches* beliebig oft gliedweise **differenziert und integriert** werden. Der Konvergenzbereich ändert sich dadurch nicht.

- Potenzreihen mit *gleichem Entwicklungspunkt* dürfen in ihrem *gemeinsamen Konvergenzbereich* **addiert, subtrahiert und multipliziert** werden. Der neue Konvergenzbereich ist der kleinste von den ursprünglichen ($r = min(r_1, r_2)$) !

- Den **Quotienten** zweier Potenzreihen $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ bildet man nach folgendem Schema:

  Umformung: $f(x) \cdot v(x) = u(x)$, mit allgemeinem f(x) das Produkt $f(x) \cdot v(x)$ ausrechnen und anschließender Koeffizientenvergleich mit u(x).
  Dabei grenzen die *Nullstellen des Nenners* den Konvergenzbereich ein!

- Bei einfachen Funktionen erhält man die Potenzreihe oft durch geeignete **Substitution** und anschließendes Einsetzen in bekannte Potenzreihen.
  Vorsicht bei Substitutionen mit Winkelfunktionen!!!

- **Berechnung nicht-elementarer Integrale**: häufig durch Substitution ersetzte Potenzreihe gliedweise integrieren und Integrationsgrenzen einsetzen, z.B.:

  $\int_0^x e^{-t^2} dt$ mit der Reihe für e^x und der Substitution $z = -t^2$ ergibt sich:

  $e^{-t^2} = 1 - t^2 + \frac{t^4}{2!} - \frac{t^6}{3!} + \ldots$ durch Integration und Einsetzen der Integrationsgrenzen:

  $$\int_0^x e^{-t^2} dt = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{2! \cdot 5} - \frac{x^7}{3! \cdot 7} + \ldots$$

- **Berechnung von Grenzwerten unbestimmter Ausdrücke**: z.B.: $\lim_{x \to 0} \frac{u(x)}{v(x)}$

  entscheidend sind nach der Potenzreihenentwicklung für u(x) und v(x) die *Koeffizienten der niedrigsten Potenzen*!

7.2.5 Fehlerabschätzung, Genauigkeit der Reihenentwicklung bis zum n-ten Glied

Für alternierende Reihen gilt nach Leibniz: Fehler < $|a_n|$ < "Fehlergrenze"

(der Unterschied zwischen Reihengrenzwert und Teilsummengrenzwert ist kleiner als das erste vernachlässigte Glied!)

Durch Lösung der Ungleichung $|a_n|$ < "Fehlergrenze" erhält man die

Anzahl der Glieder, die notwendig sind, um die Reihensumme mit einer bestimmten Genauigkeit zu berechnen.

7.2.6 Spezielle Potenzreihen

$\frac{1}{1+x^2}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^{2k}=1-x^2+x^4-x^6+-\ldots$	$r=1$
$\frac{x}{2+x}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2^{(k+1)}}\cdot x^{(k+1)}=\frac{x}{2}-\frac{x^2}{4}+\frac{x^3}{8}-\frac{x^4}{16}+-\ldots$	$r=2$
$e^{-\frac{x}{2}}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2^k\cdot k!}\cdot x^k=1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{8}-\frac{x^3}{2^3\cdot 3!}+-\ldots$	$r=\infty$
$\left(e^{-x}\right)^2=e^{-2x}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\cdot 2^k}{k!}\cdot x^k=1-2x+\frac{4}{2!}x^2-\frac{2^3}{3!}x^3+-\ldots$	$r=\infty$
$\sin\frac{x}{2}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{(2k+1)}}{2^{(2k+1)}(2k+1)!}=\frac{x}{2}-\frac{x^3}{8\cdot 3!}+\frac{x^5}{2^5\cdot 5!}-+\ldots$	$r=\infty$
$\sqrt{4+5x}=2+\frac{5}{4}x-\frac{25}{64}x^2+\frac{125}{512}x^3-+\ldots$	$r=1$
$2\cdot\sin x\cdot\cos x=2x-\frac{4}{3}x^3+\frac{4}{15}x^5-+\ldots$	$r=\infty$
$\frac{\sin x}{1-x}=x+x^2+\frac{5}{6}x^3+\frac{5}{6}x^4+\frac{101}{120}x^5+\frac{101}{120}x^6+\ldots$	$r=1$
$\frac{\cos x}{e^x}=1-x+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{6}+\frac{x^5}{30}-+\ldots$	$r=\infty$
$\frac{e^x}{\cos x}=1+x+x^2+\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{2}x^4+\frac{3}{10}x^5+\frac{19}{90}x^6+\ldots$	$r=\frac{\pi}{2}$
$\frac{\ln(1+x)}{1-x^2}=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{4}{3}x^3-\frac{3}{4}x^4+\frac{23}{15}x^5-\frac{11}{12}x^6+-\ldots$	$r=1$
$\ln\frac{1+x}{1-x}=2x+\frac{2}{3}x^3+\frac{2}{5}x^5+\ldots$	$r=1$

7.3 Fourier-Reihen

7.3.1 Fourier-Reihen für 2π-periodische Funktionen

Jede in $-\pi < x < \pi$ definierte, stückweise stetige Funktion f(x) läßt sich darstellen als konvergente trigonometrische Reihe der Form:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos(k\,x) + b_k \sin(k\,x) \right)$$

mit:

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \cos(k\,x)\,dx \qquad k = 0,1,2,3,\ldots$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \sin(k\,x)\,dx \qquad k = 1,2,3,\ldots$$

speziell:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$$

(Das Absolutglied $\frac{a_0}{2}$ ist der Mittelwert / Gleichanteil / Offstet der periodischen Funktion f(x).)

Die Fourier-Reihe *konvergiert* für jedes x gegen:

a) f(x) an jeder Stetigkeitsstelle

b) $\frac{1}{2}\left[f(x_{0+}) + f(x_{0-}) \right]$ an jeder Sprungstelle x_0

Da die Integranden 2π-periodisch sind, kann auch jedes andere Intervall der Länge 2π als Integrationsintervall verwendet werden.

7.3.2 Spezialfälle 2π-periodischer Funktionen

a) f(x) ist eine *gerade* Funktion (f(x) = f(-x)):

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} f(x) \cdot \cos(k\,x)\,dx \qquad k = 0,1,2,3,\ldots \qquad b_k = 0 \quad k = 1,2,3,\ldots$$

$$\Rightarrow \qquad f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\,x)$$

b) f(x) ist eine *ungerade* Funktion (f(x) = -f(-x)):

$$a_k = 0 \quad k = 0,1,2,3,\ldots \qquad b_k = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} f(x) \cdot \sin(k\,x)\,dx \qquad k = 1,2,3,\ldots$$

$$\Rightarrow \qquad f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(k\,x)$$

7.3.3 Fourier-Reihen für T-periodische Funktionen

Allgemein läßt sich eine T-periodische Funktionen mit $T = \frac{2\pi}{\omega}$, bzw $\omega = \frac{2\pi}{T}$ darstellen durch:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(n\,\omega x) + b_n \sin(n\,\omega x) \right)$$

mit: $$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \cdot \cos(n\,\omega x)\,dx \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \cdot \sin(n\,\omega x)\,dx \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

und: $$a_0 = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x)\,dx$$

7.3.4 Spezialfälle T-periodischer Funktionen

a) f(x) ist eine *gerade* Funktion (f(x) = f(-x)):

$$a_n = \frac{4}{T} \int_{0}^{T/2} f(x) \cdot \cos(n\,\omega x)\,dx \quad n = 0, 1, 2, 3, \ldots \qquad b_n = 0 \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

$$\Rightarrow \qquad f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\,\omega x)$$

b) f(x) ist eine *ungerade* Funktion (f(x) = -f(-x)):

$$a_n = 0 \quad n = 0, 1, 2, 3, \ldots \qquad b_n = \frac{4}{T} \int_{0}^{T/2} f(x) \cdot \sin(n\,\omega x)\,dx \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

$$\Rightarrow \qquad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\,\omega x)$$

7.3.5 Komplexe Form der Fourier-Reihen

Über die Eulersche Formel lassen sich sin- und cos-Funktion darstellen als:

$$\cos(n\,x) = \frac{1}{2}\left(e^{j\,n\,x} + e^{-j\,n\,x}\right)$$

$$\sin(n\,x) = -\frac{j}{2}\left(e^{j\,n\,x} - e^{-j\,n\,x}\right)$$

Damit läßt sich eine beliebige reelle Fourier-Reihe mit der **Periode 2π** entwickeln zu:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos(n\,x) + b_n \sin(n\,x)\right)$$

$$= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cdot e^{j\,n\,x} + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} \cdot e^{-j\,n\,x}$$

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \cdot e^{j\,n\,x}$$

Dabei gilt:

$$c_0 = \frac{a_0}{2}; \qquad c_n = \frac{1}{2}(a_n - j\,b_n); \qquad c_{-n} = c_n^* = \frac{1}{2}(a_n + j\,b_n)$$

weiter gilt:

$$\left.\begin{aligned} c_n + c_{-n} &= c_n + c_n^* = 2\ \mathrm{Re}(c_n) = a_n \\ c_n - c_{-n} &= c_n - c_n^* = 2\,j\,\mathrm{Im}(c_n) = -j\,b_n \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} a_n &= \ \ 2\ \mathrm{Re}(c_n) \\ b_n &= -2\ \mathrm{Im}(c_n) \end{aligned}$$

Komplexe Fourier-Reihe mit Periode 2π

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \cdot e^{j\,n\,x}$$

$$c_n = \frac{1}{2\,\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot e^{-j\,n\,x}\,dx$$

Komplexe Fourier-Reihe mit Periode T

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \cdot e^{j\,n\,\omega t} \qquad \omega = \frac{2\,\pi}{T}$$

$$c_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cdot e^{-j\,n\,\omega t}\,dt$$

7.3.6 Zusammenhang zwischen komplexer und reeller Darstellung

Es gilt:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(n\,\omega x) + b_n \sin(n\,\omega x) \right) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot \cos(n\,\omega x + \varphi_n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \cdot e^{jn\omega x}$$

mit: $A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = 2\left|c_n\right|$ und $\varphi_n = -\arctan\frac{b_n}{a_n} = arc\left(c_n\right)$

Weiter gilt:

$$\begin{aligned} c_{-n} \cdot e^{-jnx} + c_n \cdot e^{jnx} &= c_n^* \cdot e^{jnx} + c_n \cdot e^{jnx} = 2\,\mathrm{Re}\left\{ c_n \cdot e^{jnx} \right\} \\ &= 2\,\mathrm{Re}\left\{ \frac{1}{2}\left(a_n - j\,b_n\right)\cdot\left(\cos(n\,x) + j\sin(n\,x)\right) \right\} \\ &= a_n \cos(n\,x) + b_n \sin(n\,x) \end{aligned}$$

7.3.7 Fourier-Transformation

Im Gegensatz zur ***Fourier-Reihe***, die eine *periodische* Funktion als Summe von harmonischen Schwingungen mit einem diskreten Frequenzspektrum darstellt, stellt das ***Fourier-Integral*** die Entwicklung einer *nichtperiodischen* Funktion in ein kontinuierliches Spektrum mit stetig variierender Frequenz dar.
Dabei nennt man den Übergang von der einen zur anderen Form **Fourier-Transformation**.

Formeln:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-j\omega t}\, dt \qquad \text{("Fourier-Integral")}$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \cdot e^{j\omega t}\, d\omega$$

dabei ist f(t) die ***Zeitfunktion*** und F(ω) ist die ***Spektraldichte*** oder "*Fourier-Transformierte*".

In der Technik wird häufig statt der Kreisfrequenz ω die Frequenz $f = \frac{\omega}{2\pi}$ eingesetzt.

Dadurch ergibt sich eine andere Darstellungsform:

$$S(f) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \cdot e^{-j2\pi f t}\, dt$$

$$s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} S(f) \cdot e^{j2\pi f t}\, df$$

8. Laplacetransformation

8.1 Einführungsbemerkungen und Definition

Im Gegensatz zur *Fouriertransformation*, die eine *zweiseitige Transformation* darstellt und bei der die Zeitfunktionen im Bereich $-\infty < t < \infty$ definiert sein können, stellt die **Laplace-transformation** eine *einseitige Transformation* dar, bei der nur Zeitfunktionen für $t \geq 0$ zugelassen sind. Damit auch anwachsende Funktionen transformiert weden können, wird zusätzlich ein *konvergenzerzeugender Faktor* $e^{-\alpha t}$ eingeführt. Die Laplacetransformation wird dann durch eine Fouriertransformation dieser erweiterten Funktion $f^*(t)$ definiert:

mit: $$f^*(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ f(t) \cdot e^{-\alpha t} & \text{für } t \geq 0 \end{cases}$$

ergibt sich: $$\mathfrak{F}\{f^*(t)\} = \int_{t=-\infty}^{\infty} f^*(t) \cdot e^{-j2\pi ft} dt = \int_{t=0}^{\infty} f(t) \cdot e^{-(\alpha + j2\pi f)t} dt$$

Durch Einführung der komplexen (Kreis-)Frequenz $p = \alpha + j2\pi f = \alpha + j\omega$ ergibt sich:

$$\mathfrak{F}\{f^*(t)\} = \int_{t=0}^{\infty} f(t) \cdot e^{-pt} dt = F(p) = \mathfrak{L}\{f(t)\}$$ (Laplace-Integral)

Hiermit ist die **Laplacetransformation** definiert. Dabei ist zu beachten, daß:

$p \in C$ ist und $\mathrm{Re}\{p\} = \alpha > 0$ (statt "p" wird oft auch "s" verwendet!)

die Funktion f (t) definiert ist als: $$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ f(t) & \text{für } t \geq 0 \end{cases}$$

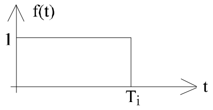
oder als: $f(t) = f(t) \cdot \sigma(t)$

(Der Teil $\sigma(t)$ wird oft weggelassen, man muß ihn sich aber immer dazudenken! Wenn ein *Verschiebeanteil* vorhanden ist muß $\sigma(t-T)$ auf jeden Fall geschrieben werden!)

Dabei ist $\sigma(t)$ die **Einheitssprungfunktion** und definiert als: $$\sigma(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ 1 & \text{für } t \geq 0 \end{cases}$$

Die Einheitssprungfunktion wird zur Darstellung von abschnittsweise definierten Funktionen verwendet, z.B.:

$$f(t) = \sigma(t) - \sigma(t - T_i)$$



Der Einheitsimpuls oder **Dirac-Impuls** $\delta(t)$ ist die Ableitung der Einheitssprungfunktion.

$$\delta(t) = \dot{\sigma}(t)$$

Verschiedene **Vorgehensweisen** zur Laplace-Transformation und -Rücktransformation:

$f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ F(p)$

1.) Korrespondenzentabellen
2.) Sätze zur Laplacetransformation
3.) Laplace-Integral

$F(p)\ \bullet\!\!-\!\!\circ\ f(t)$

1.) Korrespondenzentabellen
2.) Sätze: vor allem Faltung und PBZ
3.) Integral (für uns nicht lösbar)

8.2 Sätze zur Laplacetransformation

		$f(t)$	$F(p)$
(1)	Linearität + Additionssatz	$a_1 \cdot f_1(t) + a_2 \cdot f_2(t)$	$a_1 \cdot F_1(p) + a_2 \cdot F_2(p)$
(2)	Ähnlichkeitssatz	$f(a\,t);\qquad a > 0$	$\frac{1}{a} \cdot F\left(\frac{p}{a}\right)$
(3)	Verschiebungssatz	$f(t-a) \cdot \sigma(t-a);\quad a > 0$	$e^{-a\,p} \cdot F(p)$
(4)	Dämpfungssatz	$e^{-a\,t} \cdot f(t)$	$F(p+a)$
(5)	1. Differentiationssatz	$f'(t)$	$p \cdot F(p) - f(0+)$
(6)	2. Differentiationssatz	$(-t)^n \cdot f(t)$	$F^{(n)}(p)$
(7)	Integrationssatz	$\int_0^t f(\tau)\,d\tau$	$\frac{1}{p} \cdot F(p)$
(8)	Faltungssatz	$f_1(t) * f_2(t)$	$F_1(p) \cdot F_2(p)$
(9)	1. Endwertsatz	$\lim_{t\to\infty} f(t) \qquad = \qquad \lim_{p\to 0} p \cdot F(p)$	
(10)	2. Endwertsatz	$\lim_{t\to 0} f(t) \qquad = \qquad \lim_{p\to\infty} p \cdot F(p)$	

8.2.1 Korrespondenzen zum 1. Differentiationssatz

$$f(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad F(p)$$

$$f'(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad p \cdot F(p) - f(0+)$$

$$f''(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad p^2 \cdot F(p) - p \cdot f(0+) - f'(0+)$$

$$f'''(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad p^3 \cdot F(p) - p^2 \cdot f(0+) - p \cdot f'(0+) - f''(0+)$$

... ...

$$f^{(n)}(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad p^n \cdot F(p) - p^{n-1} \cdot f(0+) - p^{n-2} \cdot f'(0+) - \ldots - f^{n-1}(0+)$$

8.2.2 Rücktransformation mit Hilfe der Partialbruchzerlegung

Eine komplizierte gebrochenrationale Funktion im Frequenzbereich läßt sich nicht so ohne weiteres in den Zeitbereich zurücktransformieren. Um eine Rücktransformation durchführen zu können, ist es erforderlich die Funktion in Teilfunktionen zu zerlegen (PBZ). Diese werden dann einzeln über Tabellen und Sätze zurücktransformiert und am Schluß alle addiert.

8.2.3 Faltung und Faltungssatz

Definition: Unter der **Faltung** zweier Funktionen $f_1(t)$ und $f_2(t)$ versteht man die Operation:

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_{\tau=-\infty}^{\infty} f_1(\tau) \cdot f_2(t-\tau)\,d\tau$$

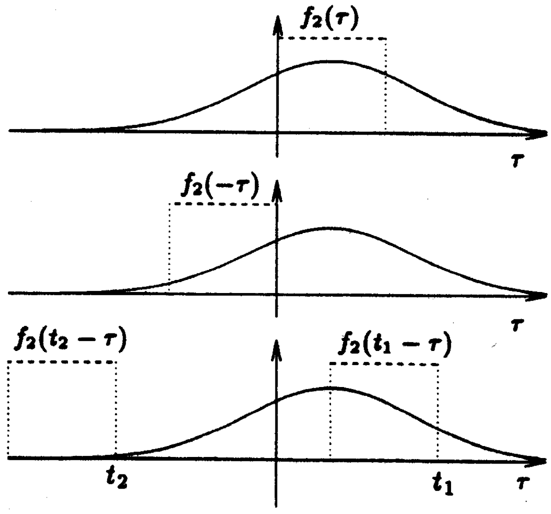
Das Ergebnis der Faltung ist eine Funktion in Abhängigkeit von t.

Bestimmung des Terms $f_2(t-\tau)$ aus $f_2(\tau)$ in zwei Schritten:

1.) *Spiegelung* von $f_2(\tau)$
an der y-Achse
$\rightarrow$ es entsteht $f_2(-\tau)$

2.) *Verschiebung* von $f_2(-\tau)$
um t in τ-Richtung ergibt $f_2(t-\tau)$
dabei gilt:
t > 0: Verschiebung nach rechts!
t < 0: Verschiebung nach links!

Bei stückweise definierten Funktionen sind Fallunterscheidungen bezüglich der Integrationsgrenzen zu machen!



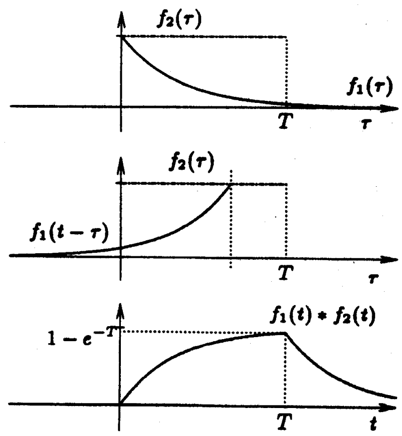
Weiter gilt: die **Faltung ist kommutativ** $\quad f_1(t) * f_2(t) = f_2(t) * f_1(t)$

Aufgrund dieser Kommutativität ist es ratsam, zu überlegen welche der beiden Funktionen man verschiebt. Meistens lassen sich e-Funktionen mit Verschiebeanteil relativ leicht integrieren, hingegen ist es oft sehr schwierig, trigonometrische Funktionen mit Phasenverschiebung zu integrieren.

Beispiel: $\quad f_1(t) = e^{-t} \cdot \sigma(t); \quad f_2(t) = \sigma(t) - \sigma(t-T)$

$$f_2(t) * f_1(t) = \int_{\tau=-\infty}^{\infty} \left[\sigma(\tau) - \sigma(\tau - T)\right] \cdot e^{-(t-\tau)} \cdot \sigma(t-\tau)\,d\tau$$

$$= \begin{cases} 0 \quad = \quad 0 & \text{für} \quad t < 0 \\ \int_0^t 1 \cdot e^{-t} \cdot e^{\tau} d\tau \quad = \quad 1 - e^{-t} & \text{für} \quad 0 \le t < T \\ \int_0^T 1 \cdot e^{-t} \cdot e^{\tau} d\tau \quad = e^{-t}\left(e^{T} - 1\right) & \text{für} \quad t \ge T \end{cases}$$



Faltungssatz:

Die Multiplikation im p-Bereich entspricht der Faltung im t-Bereich (und umgekehrt).

$$F_1(p) \cdot F_2(p) \quad \bullet\!\!-\!\!\circ \quad f_1(t) * f_2(t) = \int_{\tau=-\infty}^{\infty} f_1(\tau) \cdot f_2(t-\tau)\,d\tau$$

8.3 Wichtige Korrespondenzen

	$F(p)$	$f(t)$		$F(p)$	$f(t)$
1)	1	$\delta(t)$	18)	$\frac{p}{(p-a)(p-b)}$	$\frac{a\,e^{at}-b\,e^{bt}}{a-b}$
2)	$\frac{1}{p}$	$1\left[\cdot\sigma(t)\right]$	19)	$\frac{1}{(1+a\,p)(1+b\,p)}$	$\frac{e^{-\frac{t}{a}}-e^{-\frac{t}{b}}}{a-b}$
3)	$\frac{1}{p^2}$	$t\left[\cdot\sigma(t)\right]$	20)	$\frac{p}{(1+a\,p)(1+b\,p)}$	$\frac{a\,e^{-\frac{t}{b}}-b\,e^{-\frac{t}{a}}}{ab(a-b)}$
4)	$\frac{1}{p^{n+1}}$	$\frac{t^n}{n!}$	21)	$\frac{a}{(p-b)^2+a^2}$	$e^{bt}\cdot\sin a\,t$
5)	$\frac{a}{p^2+a^2}$	$\sin a\,t$	22)	$\frac{p-b}{(p-b)^2+a^2}$	$e^{bt}\cdot\cos a\,t$
6)	$\frac{p}{p^2+a^2}$	$\cos a\,t$	23)	$\frac{1}{\sqrt{p}}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}$
7)	$\frac{a}{p^2-a^2}$	$\sinh a\,t$	24)	$\frac{1}{\sqrt{p+a}}$	$\frac{e^{-at}}{\sqrt{\pi t}}$
8)	$\frac{p}{p^2-a^2}$	$\cosh a\,t$	25)	$\frac{ab}{(p^2+a^2)(p^2+b^2)}$	$\frac{a\cdot\sin b\,t-b\cdot\sin a\,t}{a^2-b^2}$
9)	$\frac{1}{p-a}$	e^{at}	26)	$\frac{p}{(p^2+a^2)(p^2+b^2)}$	$\frac{\cos b\,t-\cos a\,t}{a^2-b^2}$
10)	$\frac{1}{p(p-a)}$	$\frac{e^{at}-1}{a}$	27)	$\frac{p^2}{(p^2+a^2)(p^2+b^2)}$	$\frac{a\cdot\sin a\,t-b\cdot\sin b\,t}{a^2-b^2}$
11)	$\frac{1}{(p-a)^2}$	$t\cdot e^{at}$	28)	$\frac{p^3}{(p^2+a^2)(p^2+b^2)}$	$\frac{a^2\cdot\cos a\,t-b^2\cdot\cos b\,t}{a^2-b^2}$
12)	$\frac{p}{(p-a)^2}$	$(1+a\,t)e^{at}$	29)	$\frac{a^3}{(p^2+a^2)^2}$	$\frac{1}{2}(\sin a\,t-a\,t\cdot\cos a\,t)$
13)	$\frac{1}{1+a\,p}$	$\frac{1}{a}\cdot e^{-\frac{t}{a}}$	30)	$\frac{a\,p}{(p^2+a^2)^2}$	$\frac{t}{2}\cdot\sin a\,t$
14)	$\frac{1}{p(1+a\,p)}$	$1-e^{-\frac{t}{a}}$	31)	$\frac{a\,p^2}{(p^2+a^2)^2}$	$\frac{1}{2}(\sin a\,t+a\,t\cdot\cos a\,t)$
15)	$\frac{1}{(1+a\,p)^2}$	$\frac{1}{a^2}\cdot t\cdot e^{-\frac{t}{a}}$	32)	$\frac{p^3}{(p^2+a^2)^2}$	$\cos a\,t-\frac{a\,t}{2}\cdot\sin a\,t$
16)	$\frac{p}{(1+a\,p)^2}$	$\frac{1}{a^3}(a-t)e^{-\frac{t}{a}}$	33)	$\frac{1}{p^2+2a\,p+(a^2+b^2)}$	$\frac{1}{b}\cdot e^{-at}\cdot\sin b\,t$
17)	$\frac{1}{(p-a)(p-b)}$	$\frac{e^{at}-e^{bt}}{a-b}$	34)	$\frac{1}{(p-a)(p-b)(p-c)}$	$-\frac{(c-b)e^{at}+(a-c)e^{bt}+(b-a)e^{ct}}{(a-b)(a-c)(b-c)}$

8.4 Ergänzungen

8.4.1 Laplacetransformation eines Rechteckimpulses

$$f_T(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } \ 0 < t < T_i \\ 0 & sonst \end{cases} = \sigma(t) - \sigma(t - T_i) \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; \frac{1 - e^{-T_i\, p}}{p}$$

Verschiebt man diesen Impuls um T so erhält man nach dem Verschiebungssatz:

$$f_T(t - T) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{1 - e^{-T_i\, p}}{p} \cdot e^{-T\, p}$$

8.4.2 Laplacetransformation periodischer Funktionen

Die Funktion $f_0(t)$ sei auf 0 < t < T definiert, außerhalb dieses Intervalls sei $f_0(t)=0$.
Durch periodische Fortsetzung für t > 0 entsteht die Funktion f(t) mit f(t+T)=f(t).

Für die zugehörige Laplacetransformierten gilt nun:

$$f_0(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad F_0(p)$$

$$f(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad F_0(p) \cdot \frac{1}{1 - e^{-T\, p}}$$

Beispiel: periodischer Rechteckimpuls

$$f(t) = \begin{cases} A & \text{für } \ 0 < t \le T_i \\ 0 & \text{für } \ T_i < t \le T \end{cases} \qquad f(t + T) = f(t)$$

$$\circ\!\!-\!\!\bullet \quad F(p) = \frac{A}{p} \cdot \frac{1 - e^{-T_i\, p}}{1 - e^{-T\, p}}$$

8.4.3 Sprungfunktionen mit Verschiebeanteil

ACHTUNG: Funktionen wie z.B. $f(t) = t^2 \cdot \sigma(t-1)$ lassen sich nicht direkt mit Hilfe des Verschiebungssatzes transformieren (weil einmal t und einmal t-1 als Funktionsargument steht)!

Hier geht man z.B. folgendermaßen vor:

1.) Verschiebung der Funktion f(t) im t-Bereich, so daß die Sprungfunktion zu $\sigma(t)$ wird:

$$f^*(t) = (t+1)^2 \cdot \sigma(t) = (t^2 + 2t + 1) \cdot \sigma(t)$$

2.) Transformation von f*(t): $\circ\!\!-\!\!\bullet \quad F^*(p) = \frac{2}{p^3} + \frac{2}{p^2} + \frac{1}{p}$

3.) Zurückschieben der Funktion im p-Bereich durch Anwendung des Verschiebungssatzes:

$$F(p) = e^{-p} \cdot F^*(p) = e^{-p} \cdot \left(\frac{2}{p^3} + \frac{2}{p^2} + \frac{1}{p} \right)$$

Man kann diese Funktion natürlich auch direkt über das Laplace-Integral transformieren, häufig ist aber die Anwendung von Sätzen und Korrespondenzentabellen schneller!

8.5 Anwendung: Lösung von DGL und DGL-Systemen

8.5.1 Allgemeines Lösungsverfahren

1.) Ausgangspunkt ist eine lineare DGL mit konstanten Koeffizienten.

2.) Die DGL mittels Laplacetransformation in eine algebraische Gleichung umformen.

3.) Lösung der algebraischen Gleichung im p-Bereich (Frequenzbereich).

4.) Rücktransformation dieser Lösungsfunktion in den t-Bereich ergibt die Lösung der DGL.

8.5.2 Lineare DGL 1. Ordnung

Ausgangs-DGL: $y' + a\,y = g(t)$ Anfangsbedingung: y(0)

Laplacetransformierte: $\left[p \cdot Y(p) - y(0)\right] + a \cdot Y(p) = G(p)$

Lösung im p-Bereich: $Y(p) = \dfrac{G(p) + y(0)}{p + a}$

8.5.3 Lineare DGL 2. Ordnung

Ausgangs-DGL: $y'' + a\,y' + b\,y = g(t)$ Anfangsbedingungen: y(0), y'(0)

Laplacetransformierte: $\left[p^2 \cdot Y(p) - p \cdot y(0) - y'(0)\right] + a \cdot \left[p \cdot Y(p) - y(0)\right] + b \cdot Y(p) = G(p)$

Lösung im p-Bereich: $Y(p) = \dfrac{G(p) + y(0) \cdot (p + a) + y'(0)}{p^2 + a\,p + b}$

8.5.4 Zusätzliche Bemerkungen

1.) Die Lösung von DGL mit der Laplacetransformation ist vor allem dann vorteilhaft, wenn man stückweise stetige Störfunktionen hat.

2.) Bei dieser Vorgehensweise werden die Anfangsbedingungen automatisch mit berücksichtigt. Sind die Anfangswerte unbekannt, oder nicht an der Stelle t = 0 gegeben, so schreibt man statt der Terme y(0) bzw. y'(0) die Konstanten C_1 bzw. C_2 und erhält damit die allgemeine Lösung der DGL. Durch einsetzen der Anfangsbedingungen erhält man nun die Bestimmungsgleichungen für die Koeffizienten und damit die spezielle Lösung des AWP.

   Häufig ergibt sich aber mit dem Verschiebungssatz eine einfachere Lösungsmöglichkeit!

3.) Betrachtet man die Lösung der Bildfunktion (Gleichung im p-Bereich), so findet sich in deren Nenner das charakteristische Polynom der DGL; die Nennernullstellen sind deren Eigenwerte!

4.) Außerdem braucht man sich bei dieser Methode keine Gedanken über Resonanz machen, da auch diese automatisch mitberücksichtigt wird.

8.5.5 Lösung von DGL-Systemen

Prinzip: 1.) DGL´s transformieren.

2.) Lösung des entstehenden LGS und damit Bestimmung der Bildfunktionen.

3.) Rücktransformation aller Bildfunktionen
oder Rücktransformation nur einer Bildfunktion und Bestimmung der anderen Lösungsfunktionen über die DGL.

8.5.6 Beispiel:

Bestimmung von x(t), y(t) und z(t) aus folgendem DGL-System mit Anfangsbedingungen:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= z, & x(0)&=0 \\ \dot{y} &= 2x, & y(0)&=0 \\ \dot{z} &= -y+z, & z(0)&=5 \end{aligned}$$

Transformation:

$$\begin{aligned} p\,X(p)-0 &= Z(p) &\Rightarrow\quad & p\,X - Z = 0 \quad |\cdot 2 \\ p\,Y(p)-0 &= 2\,X(p) &\Rightarrow\quad & -2\,X + p\,Y = 0 \quad |\cdot p \\ p\,Z(p)-5 &= -Y(p)+Z(p) &\Rightarrow\quad & Y + (p-1)\,Z = 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p^2\,Y - 2\,Z &= 0 \\ Y + (p-1)\,Z &= 5 \quad |\cdot(-p^2) \end{aligned}$$

$$\left(-p^2\,(p-1)-2\right)Z = -5\,p^2$$

$$\Rightarrow \qquad Z(p) = \frac{5\,p^2}{p^2\,(p-1)+2} = \frac{5\,p^2}{p^3-p^2+2} = \frac{5\,p^2}{(p+1)\cdot(p^2-2\,p+2)} = \frac{A}{p+1} + \frac{Bp+C}{p^2-2\,p+2}$$

PBZ: $\qquad 5\,p^2 = A\left(p^2-2\,p+2\right) + B\,p\,(p+1) + C\,(p+1)$

$$\begin{aligned} p=-1: &\quad 5 = 5\,A &\Rightarrow\quad & A = 1 \\ p=\ \ 0: &\quad 0 = 2\cdot 1 + C &\Rightarrow\quad & C = -2 \\ p=\ \ 1: &\quad 5 = 1 + 2\,B + 2\cdot(-2) &\Rightarrow\quad & B = 4 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \qquad Z(p) = \frac{1}{p+1} + \frac{4\,p-2}{p^2-2\,p+2} = \frac{1}{p+1} + 4\cdot\frac{p-\frac{1}{2}}{(p^2-2\,p+1)+1}$$

(beim hinteren Term "4" ausklammern und Nenner quadratisch ergänzen!)

$$Z(p) = \frac{1}{p+1} + 4\cdot\frac{p-1}{(p-1)^2+1} + 4\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(p-1)^2+1}$$

(den mittleren Term auf "cos-Form" bringen und den "Rest" wieder dazuzählen.)

Rücktransformation:

$$\bullet\!\!-\!\!\circ \qquad \underline{z(t) = e^{-t} + 4\cdot e^{t}\cdot\cos t + 2\cdot e^{t}\cdot\sin t}$$

aus DGL:

$$y = z - \dot{z} = e^{-t} + 4\cdot e^{t}\cdot\cos t + 2\cdot e^{t}\cdot\sin t - \left(-e^{-t} + 4\cdot\left(e^{t}\cdot\cos t - e^{t}\cdot\sin t\right) + 2\cdot\left(e^{t}\cdot\sin t + e^{t}\cdot\cos t\right)\right)$$

$$\underline{y(t) = 2\cdot e^{-t} + 4\cdot e^{t}\cdot\sin t - 2\cdot e^{t}\cdot\cos t}$$

$$x = \frac{1}{2}\cdot\dot{y} = \frac{1}{2}\left(-2\cdot e^{-t} + 4\cdot\left(e^{t}\cdot\sin t + e^{t}\cdot\cos t\right) - 2\cdot\left(e^{t}\cdot\cos t - e^{t}\cdot\sin t\right)\right)$$

$$\underline{x(t) = -e^{-t} + 3\cdot e^{t}\cdot\sin t + e^{t}\cdot\cos t}$$

9. Vektoranalysis

9.1 Differentialrechnung bei Funktionen mehrerer Variabler

9.1.1 Partielle Differentiation

Eine Funktion mehrerer Variabler wird partiell differenziert, indem man jeweils eine Variable als veränderliche Variable und die anderen als Konstanten betrachtet. Am Beispiel einer Funktion mit zwei Variablen sind dann:

$$f_x(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x} = f_x \qquad \text{und} \qquad f_y(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y} = f_y$$

die partiellen Ableitungen (Ableitungsfunktionen) der Funktion $z = f(x,y)$ nach der Variablen *x* bzw. *y*, wobei die andere Variable (hier *y* bzw. *x*) als Konstante betrachtet wird. Bei der Berechnung sind die *üblichen Ableitungsregeln* zu beachten!

Die partielle Ableitung einer Funktion wird in der Regel an einem bestimmten Punkt $P_0(x_0, y_0)$ benötigt und entspricht dann dem Tangens des Steigungswinkels der Kurve in der entsprechenden Richtung. Man schreibt dann:

$$f_x(x_0,y_0) = f_x(P_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)} = \tan\alpha$$

$$f_y(x_0,y_0) = f_y(P_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)} = \tan\beta$$

wobei α den Richtungswinkel in der y,z-Ebene und β den Richtungswinkel in der x,z-Ebene darstellt.

Den Wert der pariellen Ableitung erhält man durch einsetzen der Koordinaten des Punktes.

9.1.2 Tangentialebene und totales Differential

Die Gleichung der **Tangentialebene** einer Funktion $z = f(x,y)$ in einem Punkt $P_0(x_0, y_0, z_0)$ mit $z_0 = f(x_0, y_0)$ berechnet sich zu:

$$z = z_0 + f_x(x_0,y_0)\cdot(x - x_0) + f_y(x_0,y_0)\cdot(y - y_0)$$

Die Tangentialebene entspricht einer *linearisierten Näherung* der Funktion $z = f(x,y)$ in einem bestimmten Punkt $P_0(x_0, y_0, z_0)$.

Unter dem **totalen Differential** *dz* einer Funktion $z = f(x,y)$ zu den Zuwächsen *dx* und *dy* versteht man den Zuwachs längs der Tagentialebene:

$$dz = f_x(x_0,y_0)\,dx + f_y(x_0,y_0)\,dy$$ totales Differential an der Stelle (x_0, y_0)

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = f_x\,dx + f_y\,dy$$ totales Differential an der beliebigen Stelle (x, y)

Beispiel:

Partielle Ableitungen der Funktion $z = f(x, y) = 2x^2 + x\,y^2$ im Punkt $P_0(3/-1)$

$$f_x = 4x + y^2 \quad \Rightarrow \quad f_x(P_0) = 4\cdot 3 + (-1)^2 = 13$$

$$f_y = 2x\,y \quad \Rightarrow \quad f_y(P_0) = 2\cdot 3\cdot(-1) = -6$$

Totales Differential: $dz(3/-1) = 13\,dx - 6\,dy$

9.1.3 Kettenregel für Funktionen von 2 Variablen

Hängen die Variablen *x* und *y* der Funktion $z = f(x, y)$ von einem Parameter *t* ab, so erhält man eine Abhängigkeit der z-Werte von diesem Parameter:

$$z = z(t) = f\left[x(t), y(t)\right]$$

Formales Dividieren des totalen Differentials *dz* durch *dt* liefert die Kettenregel für Funktionen von 2 Variablen:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}$$

9.1.4 Höhere partielle Ableitungen und Satz von Schwarz

Bilden die partiellen Ableitungen $f_x(x, y)$ und $f_y(x, y)$ ebenfalls wieder Funktionen von 2 Variablen, so heißen deren partielle Ableitungen dann partielle Ableitungen 2. bzw. (noch) höherer Ordnung.

In der *Index-Schreibweise* ergeben sich hier vier partielle Ableitungen der Form:

$$(f_x)_x = f_{xx}; \quad (f_x)_y = f_{xy}; \quad (f_y)_x = f_{yx}; \quad (f_y)_y = f_{yy}$$

In der *Differentialschreibweise* erhält man hier (Reihenfolge beachten!):

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}; \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}; \quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}; \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

$f_{xy} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}$ und $f_{yx} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}$ heißen ***gemischte partielle Ableitungen***.

Nach dem **Satz von Schwarz** sind gemischte partielle Ableitungen unabhängig von ihrer Reihenfolge, falls sie stetig sind.

Beispiel: $f_{xy} = f_{yx}; \quad f_{xxy} = f_{xyx} = f_{yxx}$ (falls die Funktionen stetig sind!)

9.2 Darstellungsformen von Kurven

	In der Ebene	**Im Raum**
Explizite Form:	$y = f(x)$	$z = f(x, y)$
Implizite Form:	$F(x, y) = 0$	$F(x, y, z) = 0$
Parameterdarstellung:	$x = x(t);\; y = y(t)$	$x = x(t);\; y = y(t);\; z = z(t)$
Vektorielle Darstellung:	$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$	$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$

9.3 Tangentenvektor

$$\dot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \end{pmatrix} = \dot{x}(t) \cdot \vec{i} + \dot{y}(t) \cdot \vec{j} + \dot{z}(t) \cdot \vec{k} = \frac{dx}{dt} \cdot \vec{i} + \frac{dy}{dt} \cdot \vec{j} + \frac{dz}{dt} \cdot \vec{k}$$

9.4 Gradient

Bei einer Funktion $z(t) = f(\vec{r}(t)) = f(x(t), y(t))$ ist die Ableitung von *z(t)* nach *t* gleich der Steigungsänderung von *z(t)* längs *r(t)*. Die Berechnung erfolgt über das totale Differential und die Kettenregel:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \dot{x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \dot{y} = f_x \cdot \dot{x} + f_y \cdot \dot{y} = \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = grad\; f \cdot \dot{\vec{r}}(t)$$

Dabei heißt $grad\; f = \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}$ **Gradient** (Gradientenvektor) von $z = f(x, y)$.

Für Höhenlinien gilt: $f(x, y) = const$ und $\frac{dz}{dt} = 0 = grad\; f \cdot \dot{\vec{r}}(t)$

$\Rightarrow \quad grad\; f \perp \dot{\vec{r}}(t)$

Daraus ergibt sich: Der Vektor $grad\, f$ hat stets die Richtung des stärksten Anstiegs von $z = f(x, y)$ und ist in jedem Punkt P_0 senkrecht zur Höhenlinie $f(x, y) = const$.

9.5 Vektorfelder und Potentialfelder

9.5.1 Skalar- und Vektorfelder

Wird jedem Punkt $P(x,y(,z)) \in R^2(R^3)$ eine reelle Zahl zugeordnet,
so spricht man von einem **Skalarfeld**. Die Zahl $u = f(x,y,z)$ heißt **Potential**.

Wird jedem Punkt $\left\{ \begin{matrix} P(x,y) \in R^2 \\ P(x,y,z) \in R^3 \end{matrix} \right\}$ ein Vektor $\left\{ \begin{matrix} \vec{F}(x,y) = \begin{pmatrix} F_1(x,y) \\ F_2(x,y) \end{pmatrix} \\ \vec{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} F_1(x,y,z) \\ F_2(x,y,z) \\ F_3(x,y,z) \end{pmatrix} \end{matrix} \right\}$ zugeordnet,

so spricht man von einem $\left\{ \begin{matrix} \textit{ebenen} \\ \textit{räumlichen} \end{matrix} \right\}$ **Vektorfeld**.

9.5.2 Potentialfelder

Ein stetiges Vektorfeld $\vec{F}(x,y(,z)) = \begin{pmatrix} F_1(x,y(,z)) \\ F_2(x,y(,z)) \\ (F_3(x,y(,z))) \end{pmatrix}$ heißt **Potentialfeld**,

wenn ein Potential $u = f(x,y(,z))$ existiert, für das gilt: $\vec{F}(x,y(,z)) = grad\ u$.

Daraus folgt: $F_1 = f_x = \frac{\partial f}{\partial x}$; $\quad F_2 = f_y = \frac{\partial f}{\partial y}$; $\quad \left(F_3 = f_z = \frac{\partial f}{\partial z} \right)$

Integrabilitätsbedingungen: $\vec{F}$ ist ein Potentialfeld, falls im:

ebenen Vektorfeld

$$f_{xy} = \frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x} = f_{yx}$$

räumlichen Vektorfeld

$$f_{xy} = \frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x} = f_{yx}$$

$$f_{xz} = \frac{\partial F_1}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial x} = f_{zx}$$

$$f_{yz} = \frac{\partial F_2}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial y} = f_{zy}$$

Die **Potentialfunktion** $f(x,y(,z))$ erhält man durch Integration über die Feldkoordinaten:

$$f(x,y) = \begin{cases} \int F_1(x,y)\,dx + g_1(y) \\ \int F_2(x,y)\,dy + g_2(x) \end{cases} \qquad f(x,y,z) = \begin{cases} \int F_1(x,y,z)\,dx + g_1(y,z) \\ \int F_2(x,y,z)\,dy + g_2(x,z) \\ \int F_3(x,y,z)\,dz + g_3(x,y) \end{cases}$$

Beispiel:

Gegeben ist ein Vektorfeld $\vec{F} = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2xy + 2z\sin(x)\cos(x) \\ x^2 + z \\ y + \sin^2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix}$

Handelt es sich um ein Potentialfeld? Wenn ja, wie lautet die Potentialfunktion?

1.) Die Integrabilitätsbedingungen ergeben:

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = 2x = \frac{\partial F_2}{\partial x}; \qquad \frac{\partial F_1}{\partial z} = 2\sin(x)\cos(x) = \frac{\partial F_3}{\partial x}; \qquad \frac{\partial F_2}{\partial z} = 1 = \frac{\partial F_3}{\partial y}$$

d.h. es handelt sich um ein Potentialfeld.

2.) Zur Bestimmung der Potentialfunktion geht man hier am einfachsten so vor:

es gilt: $F_2 = x^2 + z = \frac{\partial f}{\partial y} \Rightarrow f(x,y,z) = \int (x^2 + z)\, dy + g(x,z) = \underline{x^2 y + zy + g(x,z)}$ (1)

weiter gilt: $F_1 = 2xy + 2z\sin(x)\cos(x) = \frac{\partial f}{\partial x} \stackrel{!}{=} 2xy + \frac{\partial g(x,z)}{\partial x}$ (aus (1))

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial g(x,z)}{\partial x} = 2z\sin(x)\cos(x) \tag{2}$$

und: $F_3 = y + \sin^2(x) = \frac{\partial f}{\partial z} \stackrel{!}{=} y + \frac{\partial g(x,z)}{\partial z}$ (aus (1))

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial g(x,z)}{\partial z} = \sin^2(x) \tag{3}$$

jetzt wird aus (3): $g(x,z) = \int \sin^2(x)\, dz = z \cdot \sin^2(x) + h(x)$ (4)

und aus (4), (2): $\frac{\partial g(x,z)}{\partial x} = 2z\sin(x)\cos(x) + h'(x) \stackrel{!}{=} 2z\sin(x)\cos(x)$

$$\Rightarrow \quad h'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad h(x) = c \tag{5}$$

aus (1), (4) und (5) folgt schließlich:

$$\underline{f(x,y,z) = x^2 y + zy + z \cdot \sin^2(x) + c}$$

9.6 Linienintegrale (Arbeits-/Kurvenintegrale)

9.6.1 Definition des Linienintegrals

Es sei $\vec{F}(x,y,z)$ ein Vektorfeld, $\vec{r}(t)$ eine Raumkurve *C* (mit $t_1 \le t \le t_2$) und $\dot{\vec{r}}(t)$ der Tangentenvektor an diese Kurve, dann ist das **Linienintegral** des Vektorfeldes $\vec{F}$ längs der Kurve *C* definiert als:

$$W = {}^{C}\!\!\int \vec{F}\left[\vec{r}(t)\right] d\vec{r} = {}^{C}\!\!\int \left(F_1\,dx + F_2\,dy + F_3\,dz\right) = \int_{t_1}^{t_2} \left(F_1 \cdot \dot{x} + F_2 \cdot \dot{y} + F_3 \cdot \dot{z}\right) dt = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(t) \cdot \dot{\vec{r}}\,dt$$

9.6.2 Bemerkungen zum Linienintegral

1.) Es gilt: $\dot{\vec{r}} = \dfrac{d\vec{r}}{dt} \qquad \Rightarrow \qquad d\vec{r} = \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x}\,dt \\ \dot{y}\,dt \\ \dot{z}\,dt \end{pmatrix} = \dot{\vec{r}} \cdot dt$

2.) Ist *C* geschlossen, also $\vec{r}(t_1) = \vec{r}(t_2)$, so schreibt man das **Umlaufintegral** ${}^{C}\!\!\oint \vec{F}\,d\vec{r}$

3.) Wird *C* in umgekehrter Richtung durchlaufen (Schreibweise: -*C*),
dann gilt: ${}^{-C}\!\!\int \vec{F}\,d\vec{r} = -{}^{C}\!\!\int \vec{F}\,d\vec{r}$

4.) Weiter gilt: ${}^{C}\!\!\int \left(\vec{F}_1 + \vec{F}_2\right) d\vec{r} = {}^{C}\!\!\int \vec{F}_1\,d\vec{r} + {}^{C}\!\!\int \vec{F}_2\,d\vec{r}$; ${}^{C_1}\!\!\int \vec{F}\,d\vec{r} + {}^{C_2}\!\!\int \vec{F}\,d\vec{r} = {}^{C_1+C_2}\!\!\int \vec{F}\,d\vec{r}$

${}^{C}\!\!\int K \cdot \vec{F}\,d\vec{r} = K \cdot {}^{C}\!\!\int \vec{F}\,d\vec{r}$

5.) Das Linienintegral hängt im allgemeinen stets vom gewählten Weg ab!!!

9.6.3 Wegunabhängiges Linienintegral im Potentialfeld

Gegeben ist ein Vektorfeld $\vec{F}(x,y,z)$ und ein Skalarfeld $f(x,y,z)$. Das Linienintegral

$${}^{C}\!\!\int \vec{F}\,d\vec{r} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} \cdot \dot{\vec{r}}\,dt$$

ist **wegunabhängig**, wenn:

1.) $\vec{F}\,d\vec{r}$ das totale Differential *du* der Funktion $u = f(x,y,z)$ ist:

$$du = \vec{F}\,d\vec{r} = F_1\,dx + F_2\,dy + F_3\,dz = f_x\,dx + f_y\,dy + f_z\,dz$$

2.) $\vec{F}$ als Gradient einer Potentialfunktion $u = f(x,y,z)$ darstellbar ist:

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix} = grad\ u$$

3.) die Integrabilitätsbedingungen erfüllt sind, d.h. des Vektorfeld ein Potentialfeld ist.

Folgerungen der Wegunabhängigkeit:

1.) Es gilt: $\oint \vec{F}\,d\vec{r} = 0$, falls keine Singularität im innern des Integrationsweges liegt!

2.) Das Linienintegral läßt sich über die Potentialdifferenz zweier Punkte berechnen:

$$c\int_{P_1}^{P_2} \vec{F}\,d\vec{r} = f(P_2) - f(P_1)$$

Beispiele:

1.) Gegeben: $\vec{F}(x,y,z)=\begin{bmatrix} x\,y \\ x^2+y\,z \\ x\,z \end{bmatrix}$ und C: $\vec{r}(t)=\begin{bmatrix} t \\ 1-t \\ t^2 \end{bmatrix}$ $1\le t\le 2$

nun ist: $\vec{F}[\vec{r}(t)]=\begin{bmatrix} t\cdot(1-t) \\ t^2+(1-t)\cdot t^2 \\ t\cdot t^2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} t-t^2 \\ 2t^2-t^3 \\ t^3 \end{bmatrix}$ und $\dot{\vec{r}}(t)=\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2t \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow \quad {}^{C}\!\!\int \vec{F}\,d\vec{r}=\int_1^2 \vec{F}[\vec{r}(t)]\cdot\dot{\vec{r}}(t)\,dt=\int_1^2\left[1\cdot\left(t-t^2\right)-1\cdot\left(2t^2-t^3\right)+2t\cdot t^3\right]dt=10{,}65$$

2.) Wichtig ist für diese Vorgehensweise, daß die Kurve in Parameterform oder in vektorieller Darstellung gegeben und der Wertebereich des Parameters angegeben ist. Ist die Kurve anders definiert, so muß ein Parameter eingeführt werden, z.B.:

Gegebene Kurve *C*: Gerade zwischen A(1/0) und B(0/1)

$\Rightarrow \quad \vec{r}(t)=\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}$ mit Parameter $t_1\le t\le t_2$, nun muß *x(t)* und *y(t)* so bestimmt

werden, daß zur Zeit t_1: $\vec{r}(t)=\vec{A}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und zur Zeit t_2: $\vec{r}(t)=\vec{B}=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ wird;

dies ist erfüllt für: $\vec{r}(t)=\begin{bmatrix} 1-t \\ t \end{bmatrix}$ $0\le t\le 1$

3.) Ein *magnetisches Feld* um einen geraden stromdurchflossenen Leiter auf der z-Achse

hat die Form: $\vec{H}(x,y,z)=\dfrac{1}{x^2+y^2}(-y;\quad x;\quad 0)$

Das Linienintegral eines *Kreises* um den Leiter wird mit C: $\vec{r}(t)=\begin{bmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ 0 \end{bmatrix}$ $0\le t\le 2\pi$

und: $\vec{H}[\vec{r}(t)]=\begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \\ 0 \end{pmatrix}$, $\dot{\vec{r}}(t)=\begin{bmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \\ 0 \end{bmatrix}$ zu: $\oint \vec{H}\,d\vec{r}=\int_0^{2\pi}\left[\sin^2(t)+\cos^2(t)\right]dt=2\pi$

wenn *C* den Leiter in z-Richtung umschließt (***Singularität***)!
Für jede andere geschlossene Kurve, die den Leiter nicht umschließt gilt: $\oint \vec{H}\,d\vec{r}=0$

4.) Das *elektrische Feld* um eine Punktladung hat die Form: $\vec{E}=K\cdot\dfrac{1}{\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^3}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

Die Potentialfunktion lautet: $-\varphi(P)=\varphi^*(P)=-K\cdot\dfrac{1}{\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^3}$

Damit ergibt sich eine Spannung als Potentialdifferenz: $U=\varphi(P_2)-\varphi(P_1)$

10. Wahrscheinlichkeitsrechnung

10.1 Kombinatorik

10.1.1 Geordnete Stichproben ohne Zurücklegen

Die Anzahl *N* der möglichen Variationen von *k* aus *n* Elementen ist:
(Variationen ohne Wiederholung)

$$N = \frac{n!}{(n-k)!} = (n)_k$$

Sonderfall $k = n$: Anzahl der Permutationen *n* verschiedener Elemente:

$$N = n!$$

10.1.2 Ungeordnete Stichproben ohne Zurücklegen

Die Anzahl *N* der möglichen Kombinationen von *k* aus *n* Elementen ist:
(Kombinationen ohne Wiederholung)

$$N = \binom{n}{k} = \frac{(n)_k}{k!} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \frac{\overbrace{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}^{k\ Elemente}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot k} \quad ; \qquad \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

Für die Anzahl *N* der Permutationen von *n* Elementen mit 1, 2, ... Gruppen von n_1, n_2, ... gleichen Elementen gilt:

$$N = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots}$$

10.1.3 Geordnete Stichproben mit Zurücklegen

Es werden *k* von *n* Elementen gezogen; Anzahl *N* der möglichen Anordnungen:
(Variationen mit Wiederholung)

$$N = n \cdot n \cdot n \cdot \ldots = n^k$$

10.1.4 Ungeordnete Stichproben mit Zurücklegen

Es werden *k* von *n* Elementen gezogen; Anzahl *N* der möglichen Anordnungen:
(Kombinationen mit Wiederholung)

$$N = \binom{n+k-1}{k}$$

10.1.5 Überlegung mit Baumdiagramm

Sehr schnell geht so eine Überlegung, wenn man sich ein Baumdiagramm erstellt, und dann die Zahl der Äste pro Ebene miteinander multipliziert! Dies ist natürlich nur bei einer relativ kleinen Ereignismenge möglich.

10.2 Rechnen mit Wahrscheinlichkeiten

10.2.1 Gleichwahrscheinlichkeit

Es gilt: $p(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$ und $p(\overline{A}) = \frac{|\Omega| - |A|}{|\Omega|} = 1 - p(A)$ Ω ... Ereignismenge

und: $p(\Omega) = 1;$ $p(\emptyset) = 0;$ $0 \le p(A) \le 1$

10.2.2 Additionssatz

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(AB) \quad \text{mit:} \quad p(AB) = p(A \cap B)$$

oder mit Gegenereignis für drei Ereignisse

$$p(A \cup B \cup C) = 1 - p(\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C})$$

Wenn sich die Ereignisse gegenseitig ausschließen (disjunkte Ereignisse!), gilt: $p(AB) = 0$

10.2.3 Multiplikationssatz

Wahrscheinlichkeit von *A*, wenn *B* schon eingetreten ist: $p(A/B) = \frac{p(AB)}{p(B)} = \frac{|AB|}{|B|}$

Wahrscheinlichkeit von *B*, wenn *A* schon eingetreten ist: $p(B/A) = \frac{p(AB)}{p(A)} = \frac{|AB|}{|A|}$

Außerdem gilt: $p(AB) = p(A) \cdot p(B/A) = p(B) \cdot p(A/B)$

Zwei Ereignisse *A*, *B* mit $p(A) \neq \emptyset$ und $p(B) \neq \emptyset$ heißen ***unabhängig***, falls:

$$p(AB) = p(A) \cdot p(B)$$

oder $p(A/B) = p(A)$

$$p(B/A) = p(B)$$

10.2.4 Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit

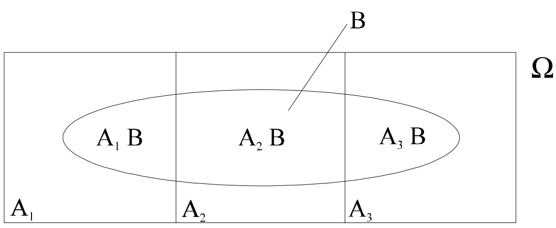
Gegeben seien die Ereignisse $A_1, A_2, \ldots, A_n$ mit:

$$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \Omega \quad \text{und} \quad A_i \cap A_j = \emptyset \quad \text{für} \quad i \neq j$$

Dann gilt für ein beliebiges Ereignis $B \subset \Omega$:

$$\mathrm{p}(B) = \mathrm{p}(\mathrm{A}_1) \cdot \mathrm{p}(B/A_1) + \ldots + \mathrm{p}(\mathrm{A}_n) \cdot \mathrm{p}(B/A_n) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{p}(\mathrm{A}_k) \cdot \mathrm{p}(B/A_k)$$

Disjunkte Zerlegung: $B = A_1 B \cup A_2 B \cup \ldots \cup A_n B$



10.2.5 Zusammengesetzte Zufallsexperimente

Bei einem zusammengesetzten Zufallsexperiment erhält man

1.) die Wahrscheinlichkeit für Elementarereignisse, indem man die Wahrscheinlichkeiten längs des zugehörigen Pfades im Baumdiagramm multipliziert ***(Pfadregel)***.

2.) die Wahrscheinlichkeit für ein Ereignis *A*, indem man die Wahrscheinlichkeiten aller zu *A* gehörenden Elementarereignisse addiert ***(Summenregel)***.

10.2.6 Satz von Bayes

$$p(A/B) = \frac{p(A)\cdot p(B/A)}{p(B)}$$

Zerlegung von Ω in $\Omega = A_1 \cup A_2$ mit $A_1 = A$ und $A_2 = \overline{A}$

$$\Rightarrow \qquad p(B) = p(A)\cdot p(B/A) + p(\overline{A})\cdot p(B/\overline{A})$$

$$\Rightarrow \qquad p(A/B) = \frac{p(A)\cdot p(B/A)}{p(A)\cdot p(B/A) + p(\overline{A})\cdot p(B/\overline{A})}$$

10.2.7 Binomialverteilungen

Wahrscheinlichkeit, bei *n* Versuchen mit den Einzelwahrscheinlichkeiten *p*

- *genau k* mal Erfolg zu haben:

$$p(A_k) = \binom{n}{k}\cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} = f_B(k;n;p) \qquad 0 \le k \le n$$

$$f_B(k;n;p) = f_B(n-k;n;1-p)$$

- *höchstens k* mal Erfolg zu haben (kein mal, ein mal, zwei mal, ... , k mal):

$$p(x \le k) = \sum_{i=0}^{k} f_B(i;n;p)$$

- *mindestens k* mal Erfolg zu haben:

$$p(x \ge k) = \sum_{i=k}^{n} f_B(i;n;p)$$

$$p(x \ge k) = 1 - p(x \le k-1) = 1 - p(x < k) = \sum_{i=0}^{k-1} f_B(i;n;p)$$

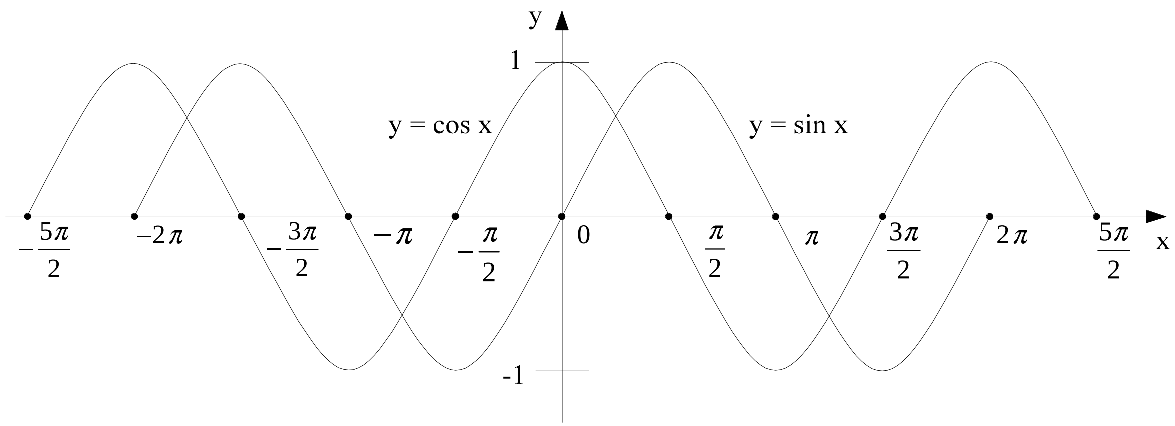
- *mindestens k* mal und *höchstens m* mal Erfolg zu haben (k < m):

$$p(k \le x \le m) = \sum_{i=k}^{m} f_B(i;n;p)$$

Besondere Werte trigonometrischer Funktionen

			-330°	-315°	-300°	-270°	-240°	-225°	-210°	-180°	-150°	-135°	-120°	-90°	-60°	-45°	-30°	0°
	15°	20°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°
	$\frac{\pi}{12}$ 0,2617	$\frac{\pi}{9}$ 0,3490	$\frac{\pi}{6}$ 0,5235	$\frac{\pi}{4}$ 0,7853	$\frac{\pi}{3}$ 1,0471	$\frac{\pi}{2}$ 1,5707	$\frac{2\pi}{3}$ 2,0943	$\frac{3\pi}{4}$ 2,3561	$\frac{5\pi}{6}$ 2,6179	π 3,1415	$\frac{7\pi}{6}$ 3,6651	$\frac{5\pi}{4}$ 3,9269	$\frac{4\pi}{3}$ 4,1887	$\frac{3\pi}{2}$ 4,7123	$\frac{5\pi}{3}$ 5,2359	$\frac{7\pi}{4}$ 5,4977	$\frac{11\pi}{6}$ 5,7595	2π 6,2831
			$-\frac{11\pi}{6}$	$-\frac{7\pi}{4}$	$-\frac{5\pi}{3}$	$-\frac{3\pi}{2}$	$-\frac{4\pi}{3}$	$-\frac{5\pi}{4}$	$-\frac{7\pi}{6}$	$-\pi$	$-\frac{5\pi}{6}$	$-\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{2\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0
sin	0,2588	0,3420	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
cos	0,9659	0,9396	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
tan	0,2679	0,3639	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	-	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	-	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0
cot	3,7320	2,7474	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$	-	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$	-

$\frac{1}{2}\sqrt{2} = 0,7071$ $\quad \frac{1}{2}\sqrt{3} = 0,8660$ $\quad \sqrt{3} = 1,7320$ $\quad \frac{1}{\sqrt{3}} = 0,5773$ $\quad \sin(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ $\quad \cos(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ $\quad b = \frac{\alpha \cdot \pi}{180°}$ $\quad \alpha = \frac{180° \cdot b}{\pi}$



$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$