Zusammenfassung: Folgen und Konvergenz

Inhaltsverzeichnis

Definitionen und Beispiele für Folgen

Definition: Eine Folge ist eine Funktion mit der Definitionsmenge $\mathbb{N}$.

Bemerkung: Wenn es wesentlich ist, ob die Null zur Definitionsmenge gehört oder nicht, schreibt man $n \geq 0$ oder $n \geq 1$ dazu.

Beispiel: Die Folge (a_n) mit $a_n = n^2$ $(n \geq 1)$ der Quadratzahlen hat die Folgenglieder $a_1 = 1^2 = 1$, $a_2 = 2^2 = 4$, $a_3 = 3^3 = 9$, …

Jede Folge besitzt (jedenfalls im Prinzip) eine

- explizite Darstellung, d. h. Angabe von $a_n =$ Term in n, und eine
- rekursive Darstellung, d. h. Angabe des Anfangswerts a_0 (bzw. a_1) und der Rekursionsgleichung
$$a_{n+1} = \text{Term in } a_n \quad \text{oder} \quad a_n = \text{Term in } a_{n-1}.$$

Die einfachsten Folgen sind konstante Folgen, zum Beispiel die Folge (a_n) mit $a_n = 5$ für alle n.

Definition: Eine Folge heißt arithmetisch, wenn die Differenz aufeinander folgender Folgenglieder konstant ist.

Beispiel: Die arithmetische Folge 1, 3, 5, … hat für $n \geq 0$ die

- explizite Darstellung $a_n = 2n + 1$;
- rekursive Darstellung $a_0 = 1$ und $a_{n+1} = a_n + 2$ (oder $a_n = a_{n-1} + 2$).

Definition: Eine Folge heißt geometrisch, wenn alle Folgenglieder ungleich 0 sind und der Quotient aufeinander folgender Folgenglieder konstant ist.

Beispiel: Die geometrische Folge 3, 6, 12, … hat für $n \geq 0$ die

- explizite Darstellung $a_n = 3 \cdot 2^n$;
- rekursive Darstellung $a_0 = 3$ und $a_{n+1} = 2 \cdot a_n$ (oder $a_n = 2 \cdot a_{n-1}$).

Definition: Eine Folge heißt alternierend, wenn die Folgenglieder abwechselnd positiv und negativ sind.

Beispiel: die Folge (a_n) mit $a_n = (-1)^n$

Beschränkte Folgen

Definition: Eine reelle Zahl S (bzw. s) heißt eine obere Schranke (bzw. untere Schranke) einer Folge (a_n), wenn für alle Folgenglieder a_n gilt:

$$a_n \le S \quad \text{(bzw. } a_n \ge s\text{).}$$

Eine Folge heißt nach oben beschränkt (bzw. nach unten beschränkt), wenn sie eine obere Schranke (bzw. untere Schranke) hat.
Eine Folge heißt beschränkt, wenn sie nach oben und nach unten beschränkt ist.

Bemerkung: Wenn eine Folge eine obere Schranke S hat, dann ist auch jede reelle Zahl S' mit $S' > S$ eine obere Schranke der Folge. Eine nach oben beschränke Folge hat also unendlich viele obere Schranken, aber genau eine *kleinste* obere Schranke. Entsprechend hat eine nach unten beschränkte Folge unendlich viele untere Schranken, aber genau eine *größte* untere Schranke.

Beispiele:

a) Die Folge (a_n) mit $a_n = (-1)^n \cdot n$ ist weder nach oben noch nach unten beschränkt.

b) Die Folge (a_n) mit $a_n = \frac{1}{n}$ $(n \ge 1)$ ist beschränkt. Die kleinste obere Schranke ist 1, und die größte untere Schranke ist 0.
Bemerkung: Die größte untere Schranke 0 wird nicht angenommen, d. h. es gibt kein Folgenglied a_n mit $a_n = 0$.

Feststellung: Eine Folge (a_n) ist genau dann beschränkt, wenn es eine reelle Zahl $K \ge 0$ gibt, so dass für alle Folgenglieder gilt:

$$|a_n| \le K .$$

Konvergenz von Folgen

Merke: Der Abstand zweier reeller Zahlen a und b auf der Zahlengeraden ist $|a-b|$.

Definition: Gegeben ist eine Folge (a_n) und eine reelle Zahl g. Die Folge (a_n) konvergiert gegen g (oder: Die Folge (a_n) hat den Grenzwert g), wenn es zu jeder reellen Zahl $\varepsilon > 0$ eine natürliche Zahl n_0 gibt mit der Eigenschaft

$$|a_n - g| < \varepsilon \text{ für alle } n \ge n_0 .$$

Schreibweise: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = g$ oder $a_n \to g$ für $n \to \infty$.

Bemerkungen:

1. Eine Folge (a_n) konvergiert genau dann gegen eine Zahl g, wenn es zu jedem vorgegebenen (noch so kleinen) „Höchstabstand“ ε einen Folgenindex n_0 gibt, ab dem alle Folgenglieder um weniger als ε von g entfernt sind.
2. Die Definition sagt nichts darüber, wie man den Grenzwert einer Folge bestimmt.

Beispiel: Folgen, die gegen 3 konvergieren, sind zum Beispiel die Folgen (a_n) mit

$$a_n = 3 \quad \text{oder} \quad a_n = 3 + \frac{1}{n} \quad \text{oder} \quad a_n = 3 - \frac{1}{n} \quad \text{oder} \quad a_n = 3 + \frac{(-1)^n}{n} \quad \text{oder} \quad \dots$$

<u>Standardaufgabe:</u> Gegeben ist eine Folge (a_n) und eine reelle Zahl g. Zeige mithilfe der Definition, dass die Folge (a_n) gegen *g* konvergiert.

<u>Lösung:</u>

1. Setze in die Ungleichung $|a_n - g| < \varepsilon$ den Term von a_n und die Zahl *g* ein.
2. Vereinfache den Term in dem Betrag so weit wie möglich.
3. Schreibe die Ungleichung ohne Betrag.
4. Löse die Ungleichung nach *n* auf. Man erhält $n >$ Term in ε.
5. Notiere: „Wähle als n_0 die kleinste natürliche Zahl mit $n_0 >$ Term in ε."

<u>Bemerkung:</u> Bei der Lösung muss eine Ungleichung äquivalent umgeformt werden. Wendet man eine Funktion auf beide Seiten der Ungleichung an, dann ist das im Allgemeinen nur dann eine Äquivalenzumformung, wenn die Funktion streng monoton wachsend ist.

<u>Beispiel:</u> Die Funktion *f* mit $f(x) = x^2$ ist für $x > 0$ streng monoton wachsend. Sind also beide Seiten einer Ungleichung positiv, dann ist das Quadrieren beider Seiten der Ungleichung eine Äquivalenzumformung.

<u>Definition:</u> Eine Folge, die gegen 0 konvergiert, heißt eine <u>Nullfolge</u>.

<u>Standardbeispiele für Nullfolgen (Beweis siehe Aufschrieb):</u>

1. Die Folge (a_n) mit $a_n = \frac{1}{n^\alpha}$ $(\alpha > 0)$ ist eine Nullfolge.
2. Die Folge (a_n) mit $a_n = q^n$ $(|q| < 1)$ ist eine Nullfolge.

Unmittelbar aus der Definition folgt die

<u>Feststellung:</u> Eine Folge ist genau dann eine Nullfolge, wenn die Folge der Beträge eine Nullfolge ist.

<u>Feststellung (Beweis siehe Aufschrieb):</u> Die in der Definition von „Konvergenz" auftretende Ungleichung

$$|a_n - g| < \varepsilon$$

ist äquivalent zu

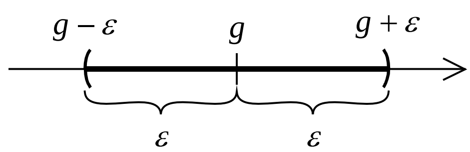
$$g - \varepsilon < a_n < g + \varepsilon .$$

Anschaulich bedeutet das: Der Abstand eines Folgenglieds a_n zu *g* ist genau dann kleiner als ε, wenn a_n zwischen $g - \varepsilon$ und $g + \varepsilon$ liegt.

<u>Definition:</u> Für eine reelle Zahl *g* heißt ein Intervall

$$(g - \varepsilon; g + \varepsilon) \quad (\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0)$$

eine <u>ε-Umgebung</u> von *g*.



<u>Definition:</u> <u>Fast alle</u> Folgenglieder bedeutet: Alle Folgenglieder mit höchstens endlich vielen Ausnahmen.

Eine Folge strebt also genau dann gegen eine Zahl g, wenn in jeder ε-Umgebung von g fast alle Folgenglieder liegen.

Definition: Hat eine Folge einen Grenzwert, dann heißt die Folge konvergent; andernfalls heißt sie divergent.

Feststellung: Eine konvergente alternierende Folge ist eine Nullfolge.

Beweis: Nimm an, eine alternierende Folge (a_n) hat einen Grenzwert $g \neq 0$.
Fall $g > 0$:
Wähle $\varepsilon = g$.
Dann gibt es eine natürliche Zahl n_0 mit $|a_n - g| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$.
Also gilt für alle $n \geq n_0$:

$$g - \varepsilon < a_n < g + \varepsilon,$$

also insbesondere

$$a_n > g - \varepsilon = g - g = 0.$$

Das ist ein Widerspruch dazu, dass die Folge alternierend ist.
Den Fall $g < 0$ beweist man analog mit $\varepsilon = |g|$. q.e.d.

Also ist die Folge (a_n) mit $a_n = (-1)^n$ divergent, denn die Folge ist alternierend und wegen $|a_n| = 1$ für alle n keine Nullfolge.

Definition: Das Maximum (bzw. Minimum) einer endlichen Menge $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ reeller Zahlen ist die größte (bzw. kleinste) Zahl der Menge.

Schreibweise: $\max(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ bzw. $\min(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

Bemerkung: Eine unendliche Menge reeller Zahlen braucht kein Maximum und keine Minimum zu haben. Zum Beispiel hat die Menge $\mathbb{N}$ kein Maximum, und die Menge $\left\{ \frac{1}{n} \middle| n = 1; 2; 3; \ldots \right\}$ hat kein Minimum.

Feststellung: Eine Folge hat höchstens einen Grenzwert.

Beweis: Nimm an, eine Folge (a_n) hat zwei verschiedene Grenzwerte. Sei g_1 der kleinere und g_2 der größere Grenzwert.
Wähle $\varepsilon = \frac{1}{2}(g_2 - g_1)$.
Dann gibt es eine natürliche Zahl n_1 mit $|a_n - g_1| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_1$, und es gibt eine natürliche Zahl n_2 mit $|a_n - g_2| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_2$.
Wähle $n_0 = \max(n_1, n_2)$.

Dann gilt für alle $n \geq n_0$:
Erste Möglichkeit:

1. $|a_n - g_1| < \varepsilon$, also $g_1 - \varepsilon < a_n < g_1 + \varepsilon$, also insbesondere
$$a_n < g_1 + \varepsilon = g_1 + \frac{1}{2}(g_2 - g_1) = g_1 + \frac{1}{2}g_2 - \frac{1}{2}g_1 = \frac{1}{2}g_1 + \frac{1}{2}g_2 = \frac{1}{2}(g_1 + g_2),$$
und
2. $|a_n - g_2| < \varepsilon$, also $g_2 - \varepsilon < a_n < g_2 + \varepsilon$, also insbesondere
$$a_n > g_2 - \varepsilon = g_2 - \frac{1}{2}(g_2 - g_1) = g_2 - \frac{1}{2}g_2 + \frac{1}{2}g_1 = \frac{1}{2}g_2 + \frac{1}{2}g_2 = \frac{1}{2}(g_1 + g_2).$$

Das ist ein Widerspruch. q.e.d.

Zweite Möglichkeit:
$$|a_n - g_1| < \varepsilon \text{ und } |a_n - g_2| < \varepsilon,$$
also
$$\begin{aligned} |g_2 - g_1| &= |g_2 - a_n + a_n - g_1| = |(g_2 - a_n) + (a_n - g_1)| \overset{\triangle\text{-Ungl.}}{\leq} |g_2 - a_n| + |a_n - g_1| \\ &= |a_n - g_2| + |a_n - g_1| \\ &< \varepsilon + \varepsilon \\ &= 2\varepsilon \\ &= 2 \cdot \frac{1}{2}|\mathrm{g}_2 - g_1| \\ &= |g_2 - g_1|. \end{aligned}$$

Das ist ein Widerspruch. q.e.d.

<u>Satz</u>: Eine konvergente Folge ist beschränkt.

<u>Beweis:</u> Sei (a_n) eine Folge mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = g$.
Wähle $\varepsilon = 1$.
Dann gibt es eine natürliche Zahl n_0, so dass für alle $n \geq n_0$ gilt:
$$\begin{aligned} & |a_n - g| < \varepsilon \\ \Leftrightarrow\quad & |a_n - g| < 1 \\ \Leftrightarrow\quad & g - 1 < a_n < g + 1 \end{aligned}$$
Also ist $S = \max(a_1, a_2, \ldots, a_{n_0 - 1}, g + 1)$ eine obere Schranke und $s = \min(a_1, a_2, \ldots, a_{n_0 - 1}, g - 1)$ eine untere Schranke von (a_n). q.e.d.

<u>Definition:</u> Eine Folge (a_n) heißt eine <u>Cauchy-Folge</u>, wenn gilt:
Zu jeder reellen Zahl $\varepsilon > 0$ gibt es eine natürliche Zahl n_0 mit der Eigenschaft
$$|a_m - a_n| < \varepsilon \text{ für alle } m, n \geq n_0.$$

<u>Satz:</u> Jede konvergente Folge ist eine Cauchy-Folge.

Beweis: Sei (a_n) eine Folge mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = g$.

Sei $\varepsilon > 0$.

Dann ist auch $\frac{\varepsilon}{2} > 0$.

Also gibt es eine natürliche Zahl n_0 mit $|a_n - g| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $n \geq n_0$.

Also gilt für alle $m, n \geq n_0$:

$$\begin{aligned} |a_m - a_n| &= |a_m - g + g - a_n| = |(a_m - g) + (g - a_n)| \overset{\triangle\text{-Ungl.}}{\leq} |a_m - g| + |g - a_n| = |a_m - g| + |a_n - g| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

q.e.d.

Für Experten: Da $\mathbb{R}$ vollständig ist, gilt auch die Umkehrung des Satzes, d. h. es gilt: Jede Cauchy-Folge ist konvergent.

Standardaufgabe: Zeige, dass eine Folge nicht konvergent ist.

Lösung: Zeige, dass die Folge unbeschränkt ist oder dass die Folge keine Cauchy-Folge ist.

Grenzwertsätze für Folgen

Satz (Summe konvergenter Folgen): Konvergieren die Folgen (a_n) und (b_n), dann konvergiert auch die Summenfolge $(a_n + b_n)$, und es gilt

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty}(a_n) + \lim_{n\to\infty}(b_n).$$

Beweis: Sei $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$.

Sei $\varepsilon > 0$.

Dann ist auch $\frac{\varepsilon}{2} > 0$.

Also gibt es eine natürliche Zahl n_1 mit $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $n \geq n_1$, und es gibt eine natürliche Zahl n_2 mit $|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $n \geq n_2$.

Wähle $n_0 = \max(n_1, n_2)$.

Dann gilt für alle $n \geq n_0$:

$$\begin{aligned} |(a_n + b_n) - (a + b)| &= |a_n + b_n - a - b| = |a_n - a + b_n - b| = |(a_n - a) + (b_n - b)| \overset{\triangle\text{-Ungl.}}{\leq} |a_n - a| + |b_n - b| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

q.e.d.

<u>Satz (Differenz, Produkt und Quotient konvergenter Folgen; ohne Beweis):</u> Konvergieren die Folgen (a_n) und (b_n), dann konvergieren auch die Differenzenfolge $(a_n - b_n)$ und die Produktfolge $(a_n \cdot b_n)$, und es gilt

$$\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \lim_{n\to\infty}(a_n) - \lim_{n\to\infty}(b_n) \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim_{n\to\infty}(a_n) \cdot \lim_{n\to\infty}(b_n).$$

Ist außerdem $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0$, dann konvergiert auch die Quotientenfolge $\left(\dfrac{a_n}{b_n}\right)$, und es gilt

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}.$$

<u>Standardaufgabe:</u> Bestimme den Grenzwert eines Bruchterms mithilfe der Grenzwertsätze.

<u>Lösung:</u> Klammere im Zähler und im Nenner jeweils den am schnellsten wachsenden Term aus und kürze.

Zur Ersparnis von Schreibarbeit bei der Lösung dieser Standardaufgabe dient die

<u>Feststellung (Beweis siehe Aufschrieb):</u> Sind $c_0, c_1, \ldots, c_k$ reelle Zahlen und sind $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ positive reelle Zahlen, dann gilt

$$\lim_{n\to\infty}\left(c_0 + \frac{c_1}{n^{\alpha_1}} + \frac{c_2}{n^{\alpha_2}} + \ldots + \frac{c_k}{n^{\alpha_k}}\right) = c_0.$$

<u>Beispiel:</u> $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \dfrac{2}{n^3}\right) = 1$

<u>Standardaufgabe:</u> Berechne den Grenzwert der Differenz zweier Wurzeln.

<u>Lösung:</u> Erweitere mit der Summe der Wurzeln und verwende die dritte binomische Formel.

Zur Ersparnis von Schreibarbeit bei der Lösung dieser Standardaufgabe dienen die folgenden beiden Feststellungen:

<u>Feststellung:</u> Ist *a* eine reelle Zahl und (b_n) eine Folge, die gegen ∞ strebt, dann gilt

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a}{b_n} = 0.$$

Für eine Definition von „strebt gegen ∞“ und einen Beweis der Feststellung siehe „Für Experten“.

<u>Beispiel:</u> $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{2n+3}} = 0$

<u>Feststellung (Wurzel einer konvergenten Folge; ohne Beweis):</u> Konvergiert die Folge (a_n) und gilt $a_n \geq 0$ für alle *n*, dann konvergiert auch die Folge $\left(\sqrt{a_n}\right)$, und es gilt

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{a_n}\right) = \sqrt{\lim_{n\to\infty} a_n}.$$

Beispiel: $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{4+\frac{5}{n}} = \sqrt{\lim\limits_{n\to\infty}\left(4+\frac{5}{n}\right)} = \sqrt{4} = 2$

Da eine konvergente alternierende Folge eine Nullfolge ist, gibt es für das Grenzverhalten einer alternierenden Folge zwei Möglichkeiten: Entweder ist die Folge eine Nullfolge, oder sie ist divergent. Daraus und aus der Tatsache, dass eine Folge genau dann eine Nullfolge ist, wenn die Folge der Beträge eine Nullfolge ist, ergibt sich die Lösung der

Standardaufgabe: Untersuche eine alternierende Folge auf Konvergenz.

Lösung: Untersuche die Folge der Beträge. Ist die Folge der Beträge eine Nullfolge, dann ist auch die eigentliche Folge eine Nullfolge. Andernfalls, wenn also die Folge der Beträge divergent ist oder gegen eine von 0 verschiedene Zahl konvergiert, ist die eigentliche Folge divergent.

Für Experten

Definition: Eine Folge (a_n) strebt gegen ∞, wenn es zu jeder reellen Zahl C eine natürliche Zahl n_0 gibt mit der Eigenschaft:

$$a_n > C \quad \text{für alle } n \geq n_0 .$$

Eine Folge strebt also genau dann gegen ∞, wenn für jede vorgegebene (noch so große) Zahl C fast alle Folgenglieder größer als C sind.

Beweis der Feststellung: Ist a eine reelle Zahl und (b_n) eine Folge, die gegen ∞ strebt, dann gilt

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a}{b_n} = 0 .$$

Beweis:

Im Fall $a = 0$ ist nichts zu zeigen.

Sei nun $a \neq 0$.

Sei $\varepsilon > 0$.

Wähle $C = \frac{|a|}{\varepsilon}$.

Dann gibt es eine natürliche Zahl n_0 mit $b_n > C$ für alle $n \geq n_0$.

Also gilt für alle $n \geq n_0$:

$$b_n > C > 0$$

und

$$\left|\frac{a}{b_n} - 0\right| = \left|\frac{a}{b_n}\right| = \frac{|a|}{|b_n|} = \frac{|a|}{b_n} < \frac{|a|}{C} = \frac{|a|}{\frac{|a|}{\varepsilon}} = \varepsilon$$

q.e.d.