

6

Die Exponentialfunktion

6.1 Elementare Eigenschaften

Wie wir gesehen haben (Sätze (5.20–22)), ist

$$\exp : z \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \quad (1)$$

eine auf ganz \mathbb{C} stetige Funktion; sie genügt der Funktionalgleichung

$$\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C} : \quad \exp(z_1 + z_2) = \exp z_1 \cdot \exp z_2, \quad (2)$$

und es gilt

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\exp z - 1}{z} = 1. \quad (3)$$

Ausgehend von diesen Grundeigenschaften werden wir in diesem Kapitel das Verhalten von \exp auf der reellen und auf der imaginären Achse eingehend untersuchen.

Anmerkung: Die meisten Eigenschaften der Exponentialfunktion und ihrer Verwandten liessen sich mit Hilfe der Differentialrechnung auf einfachere Art gewinnen, als es im folgenden vorstatten geht. Die in diesem Kapitel geleistete Mehrarbeit ist als Übung im Gebrauch der bis dahin vorgestellten Begriffe zu verstehen.

Ein berühmter Grenzwert

Wir beginnen mit einem klassischen Grenzwert, der an Stelle der Reihe (1) zur Definition (aber kaum zur numerischen Berechnung!) der Exponentialfunktion benutzt werden kann:

(6.1) Für beliebiges $z \in \mathbb{C}$ gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = \exp z .$$

□ Schreibt man

$$\begin{aligned} \exp z - \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n &= \left(\exp \frac{z}{n}\right)^n - \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n \\ &= \left(\exp \frac{z}{n} - \left(1 + \frac{z}{n}\right)\right) \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \left(\left(\exp \frac{z}{n}\right)^k \left(1 + \frac{z}{n}\right)^{n-1-k}\right) \\ &=: K \cdot \Sigma , \end{aligned}$$

so ergibt sich einerseits aus (3):

$$K = \frac{z}{n} \left(\frac{\exp(z/n) - 1}{z/n} - 1\right) =: \frac{z}{n} r_n , \quad \lim_{n \rightarrow \infty} r_n = 0 .$$

Aus den Ungleichungen

$$\left|\exp \frac{z}{n}\right| \leq \exp \frac{|z|}{n} , \quad \left|1 + \frac{z}{n}\right| \leq 1 + \frac{|z|}{n} \leq \exp \frac{|z|}{n}$$

erhält man andererseits für Σ die Abschätzung

$$|\Sigma| \leq \sum_{k=0}^{n-1} \left(\exp \frac{|z|}{n}\right)^k \left(\exp \frac{|z|}{n}\right)^{n-1-k} = n \left(\exp \frac{|z|}{n}\right)^{n-1} \leq n \exp |z| .$$

Insgesamt haben wir daher

$$\left|\exp z - \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n\right| = |K| \cdot |\Sigma| \leq |z| \exp |z| |r_n| ,$$

und hier strebt die rechte Seite mit $n \rightarrow \infty$ gegen 0 (z ist fest!). □

Die Eulersche Zahl

Die Exponentialfunktion hat bekanntlich mit der sogenannten **Eulerschen Zahl**

$$e := \exp 1 = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots \doteq 2.7182818$$

zu tun. Wir beweisen vorweg:

(6.2) Die Zahl e ist irrational.

┌ Betrachte ein festes $q \in \mathbb{N}$, $q \geq 2$. Es gilt

$$q! \cdot e = \sum_{k=0}^q \frac{q!}{k!} + R \quad (4)$$

mit

$$0 < R = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{q!}{(q+l)!} < \frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)^2} + \dots = \frac{1}{q} < 1.$$

Die angeschriebene Teilsumme rechts in (4) ist eine ganze Zahl, der Rest R nicht; folglich ist auch $q! \cdot e$ keine ganze Zahl. Da dies für jedes $q \geq 2$ zutrifft, kann e nicht rational sein. ┐

Der Name "Exponentialfunktion" lässt sich nunmehr wie folgt begründen:

(6.3) Für beliebiges $x \in \mathbb{Q}$ gilt

$$\exp x = e^x. \quad (5)$$

┌ Die Formel (5) trifft zu für $x := 0$. Ist (5) für ein beliebiges $x \in \mathbb{Z}$ richtig, so gilt auf Grund von (2) und der Regeln übers Potenzrechnen erstens

$$\exp(x+1) = \exp x \cdot \exp 1 = e^x \cdot e = e^{x+1}$$

und zweitens

$$\exp(x-1) = \exp x / \exp 1 = e^x / e = e^{x-1}.$$

Somit trifft (5) für alle ganzzahligen x zu. Ist nun weiter $x = p/q$ mit $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}^*$, so gilt nach dem schon Bewiesenen:

$$(\exp x)^q = \exp \left(\underbrace{\frac{p}{q} + \frac{p}{q} + \dots + \frac{p}{q}}_{q \text{ Summanden}} \right) = \exp p = e^p.$$

Da $\exp x$ und e^p beide positiv sind (s.u.), dürfen wir hier auf beiden Seiten die q -te Wurzel ziehen und erhalten

$$\exp x = \sqrt[q]{e^p} =: e^{p/q} = e^x. \quad \text{┐}$$

Somit ist \exp eine stetige Fortsetzung der zunächst nur für rationale $x \in \mathbb{R}$ definierten Funktion $x \mapsto e^x$ auf ganz \mathbb{C} . Es liegt daher nahe, für beliebiges $z \in \mathbb{C}$ zu definieren:

$$e^z := \exp z.$$

Wir verwenden im weiteren die eine oder die andere Schreibweise, je nach typographischer Zweckmässigkeit.

Die Exponentialfunktion auf \mathbb{R}

Der folgende Satz beschreibt das Verhalten der Exponentialfunktion auf der reellen Achse (Fig. 6.1.1):

(6.4) (a) Für alle $x \in \mathbb{R}$ ist $e^x > 0$.

(b) Die Exponentialfunktion ist streng monoton wachsend auf \mathbb{R} .

(c) Für jedes feste $q \in \mathbb{N}$ gilt

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^q} = \infty ;$$

in Worten: Die Exponentialfunktion wächst mit $x \rightarrow \infty$ schneller als jede feste Potenz von x .

(d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$.

(e) Die Exponentialfunktion bildet die reelle Achse bijektiv auf die positive reelle Achse $\mathbb{R}_{>0} =]0, \infty[$ ab.

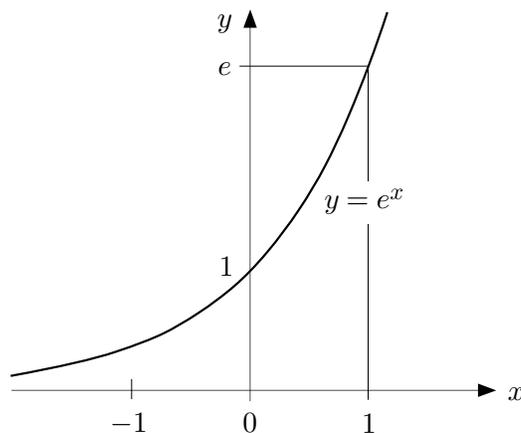


Fig. 6.1.1

□ (a) Wegen $e^x \cdot (e^{-x/2})^2 \equiv 1$ ist $e^x > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. — (b) Mit $h > 0$ gilt $e^h > 1$ und somit $e^{x+h} - e^x = e^x(e^h - 1) > 0$. — (c) Ist $x > 0$, so hat man nach (1) für jedes $q \in \mathbb{N}$:

$$e^x > \frac{x^{q+1}}{(q+1)!}$$

und somit

$$\frac{e^x}{x^q} > \frac{x}{(q+1)!} .$$

Hier strebt die rechte Seite mit $x \rightarrow \infty$ gegen ∞ . — (d) Es gilt

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = \lim_{y \rightarrow \infty} e^{-y} = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{1}{e^y} = 0.$$

— Mit Hilfe des Hauptsatzes (4.24) über monotone Funktionen folgt aus alledem (e). ┘

Aufgaben

1. Betrachte das allgemeine Glied der Exponentialreihe: $z^n/n!$.
 - (a) Für welche $z \in \mathbb{C}$ ist das n -te Glied absolut grösser als jedes andere Glied?
 - (b) Welches Glied ist für ein gegebenes $z \in \mathbb{C}$ das absolut grösste?
2. Produziere eine Funktion $f(t)$, $t > 0$, die für $t \rightarrow \infty$ schneller wächst als jede Potenz t^n , $n \geq 0$, aber langsamer als irgendwelche Exponentialfunktionen $e^{\lambda t}$, $\lambda > 0$.
3. Fritz macht sich hinter eine volle Literflasche Whisky seines Vaters. Er trinkt immer wieder einen minimalen Bruchteil λ des Inhalts und füllt mit Wasser nach, bis schliesslich die Whiskykonzentration in der Flasche auf $\leq 1/2$ gesunken ist. Wieviel Liter Whisky und wieviel Liter Wasser hat Fritz dabei im ganzen getrunken? Berechne die Grenzwerte für $\lambda \rightarrow 0$.

6.2 Die Logarithmusfunktion

Nach dem vorangehenden Satz besitzt die Einschränkung von \exp auf \mathbb{R} eine Umkehrfunktion

$$\exp^{-1} =: \log : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R},$$

genannt **Logarithmusfunktion**. Jedenfalls gilt

$$\log(e^x) = x \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad e^{\log r} = r \quad \forall r \in \mathbb{R}_{>0}. \quad (1)$$

Die Zahl $\log r$ heisst (**natürlicher**) **Logarithmus** von r . Die weiteren Eigenschaften der Logarithmusfunktion sind in dem folgenden Satz zusammengestellt (Fig. 6.2.1):

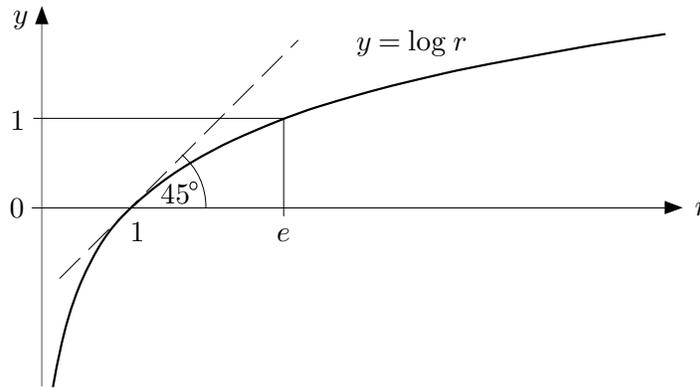


Fig. 6.2.1

(6.5) Die Logarithmusfunktion bildet $\mathbb{R}_{>0}$ streng monoton wachsend und stetig auf \mathbb{R} ab; insbesondere gilt

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \log r = -\infty, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \log r = \infty. \quad (2)$$

Ferner genügt \log der Funktionalgleichung

$$\forall u, v \in \mathbb{R}_{>0} : \quad \log(u \cdot v) = \log u + \log v. \quad (3)$$

□ Nach Satz (4.24) ist nur noch (3) zu beweisen. Für beliebige $u, v \in \mathbb{R}_{>0}$ gilt wegen (1):

$$\log(u \cdot v) = \log(e^{\log u} \cdot e^{\log v}) = \log(e^{\log u + \log v}) = \log u + \log v. \quad \square$$

Zusammenfassend können wir sagen: \exp bzw. \log vermitteln einen stetigen Isomorphismus zwischen der additiven Gruppe von \mathbb{R} und der multiplikativen Gruppe von $\mathbb{R}_{>0}$.

Allgemeine Potenzen

Die Logarithmusfunktion setzt uns instand, Potenzen a^x mit beliebiger positiver Basis a und beliebigem reellem Exponenten x zu definieren. Hierzu überlegen wir folgendermassen: Für festes $a > 0$ ergibt sich aus (3) wie beim Beweis von (6.3) zunächst

$$\log(a^x) = x \log a \quad \forall x \in \mathbb{Z}. \quad (4)$$

Wenden wir dies gleich zweimal an, so folgt weiter

$$q \log(a^{p/q}) = \log((a^{p/q})^q) = \log(a^p) = p \log a \quad (p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}^*)$$

und somit

$$\log(a^{p/q}) = \frac{p}{q} \log a.$$

Die Identität (4) ist demnach für beliebiges $x \in \mathbb{Q}$ richtig. Wenn wir also die **allgemeine Potenz** definieren durch

$$a^x := e^{x \log a} \quad (a > 0, x \in \mathbb{R}),$$

so ist das eine konsistente Erweiterung der "algebraischen" Potenzdefinition. Die üblichen Regeln für das Rechnen mit Potenzen bleiben gültig:

(6.6) Für beliebige $a, b \in \mathbb{R}_{>0}$ und beliebige $x, y \in \mathbb{R}$ gilt

- (a) $\log(a^x) = x \log a$,
- (b) $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$,
- (c) $(a^x)^y = a^{xy}$,
- (d) $a^x \cdot b^x = (ab)^x$.

□ (a) ist wegen (1) äquivalent mit der Definition von a^x . — Aus der folgenden Zeile ergibt sich (c):

$$\log((a^x)^y) = y \log(a^x) = xy \log a = \log(a^{xy}).$$

Ähnlich beweist man (b) und (d). ┘

Für festes $\alpha > 0$ gilt wegen (2) und Satz (3.15):

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} r^\alpha = \lim_{r \rightarrow 0^+} e^{\alpha \log r} = \lim_{y \rightarrow -\infty} e^y = 0.$$

Definieren wir daher $0^\alpha := 0$ ($\alpha > 0$), so ist die allgemeine Potenzfunktion

$$p_\alpha : r \mapsto r^\alpha := \begin{cases} e^{\alpha \log r} & (r > 0) \\ 0 & (r = 0, \alpha > 0) \end{cases}$$

für jedes feste $\alpha \in \mathbb{R}$ (als Zusammensetzung von stetigen Funktionen) stetig auf $\mathbb{R}_{>0}$, für $\alpha > 0$ sogar stetig auf $\mathbb{R}_{\geq 0}$.

Als Gegenstück zu den Relationen (6.4)(c) und (d) beweisen wir schliesslich noch

(6.7) Für beliebiges, aber festes $\alpha > 0$ gilt

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\log r}{r^\alpha} = 0, \quad \lim_{r \rightarrow 0+} r^\alpha \log r = 0;$$

in Worten: $\log r$ geht mit $r \rightarrow \infty$ langsamer gegen ∞ als jede noch so kleine positive Potenz von r bzw. mit $r \rightarrow 0+$ so langsam gegen $-\infty$, dass $\log r$ nicht gegen $r^\alpha \rightarrow 0$ aufkommt.

□ Mit Hilfe der Substitution $\alpha \log r =: y$ ergibt sich

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\log r}{r^\alpha} = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\log r}{e^{\alpha \log r}} = \frac{1}{\alpha} \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{y}{e^y} = 0,$$

und hieraus folgt weiter

$$\lim_{r \rightarrow 0+} r^\alpha \log r = \lim_{y \rightarrow \infty} (1/y)^\alpha \log(1/y) = - \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{\log y}{y^\alpha} = 0. \quad \square$$

Aufgaben

1. Zeige: Für beliebiges $a > 0$ gilt

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \log a.$$

2. Berechne die folgenden Grenzwerte:

$$(a) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{n-4}\right)^n, \quad (b) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\sqrt{n}},$$

$$(c) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} x^{1/x}, \quad (d) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\alpha}{x}\right)^x,$$

$$(e) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(n(\sqrt[n]{a} - 1)\right) \quad (a > 0).$$

3. Produziere eine Funktion $f: \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$, für die gilt: $f(f(t)) \equiv \sqrt{t}$.

4. Vergleiche das Wachstum der drei Funktionen

$$f(t) := t^{\sqrt{\log t}}, \quad g(t) := (\log t)^{\log t}, \quad h(t) := \exp(\sqrt{t}/\log t)$$

für $t \rightarrow \infty$. Hinweis: Betrachte die Logarithmen von f , g und h .

5. Es sei $\sum_k a_k$ eine konvergente Reihe mit positiven Gliedern. Man untersuche die Reihen

$$(a) \quad \sum_k (-1)^k a_k, \quad (b) \quad \sum_k \frac{1}{\log a_k},$$

$$(c) \quad \sum_k (e^{a_k} - 1), \quad (d) \quad \sum_k k a_k^2$$

auf Konvergenz; das heisst, man gebe in jedem Fall einen Konvergenzbe-
weis oder ein Gegenbeispiel.

6.3 Hyperbolische Funktionen

Gerade und ungerade Funktionen

Neben der Exponentialfunktion treten in vielen Anwendungen gewisse Kombinationen von e^x und e^{-x} auf, die sogenannten **hyperbolischen Funktionen**. Wir beginnen mit der folgenden Bemerkung: Eine \mathbb{X} -wertige Funktion heisst **gerade**, wenn gilt:

$$f(-x) = f(x) \quad \forall x \in \text{dom}(f),$$

und **ungerade**, wenn gilt:

$$f(-x) = -f(x) \quad \forall x \in \text{dom}(f);$$

in beiden Fällen wird natürlich vorausgesetzt, dass $\text{dom}(f)$ bezüglich 0 symmetrisch ist. Die Potenzfunktionen $x \mapsto x^k$, $k \in \mathbb{Z}$, sind gerade für gerades k und ungerade für ungerades k . Jede Funktion mit einem bezüglich 0 symmetrischen Definitionsbereich lässt sich als Summe einer geraden und einer ungeraden Funktion schreiben, denn es gilt

$$f(x) \equiv \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2}, \quad (1)$$

und die beiden Summanden rechter Hand sind gerade bzw. ungerade.

Die hyperbolischen Grundfunktionen

Wir definieren nunmehr den **hyperbolischen Cosinus**, den **hyperbolischen Sinus** und den **hyperbolischen Tangens** durch

$$\begin{aligned} \cosh x &:= \frac{e^x + e^{-x}}{2}, & \sinh x &:= \frac{e^x - e^{-x}}{2} & (x \in \mathbb{R}), \\ \tanh x &:= \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} & (x \in \mathbb{R}). \end{aligned}$$

Alle drei sind stetige Funktionen $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (Fig. 6.3.1–2). Der Vergleich mit (1) zeigt, dass \cosh und \sinh justament den geraden und den ungeraden “Anteil” der Exponentialfunktion darstellen. Man verifiziert leicht den **“hyperbolischen Pythagoras”** sowie die Additionstheoreme

$$(6.8) \text{ (a)} \quad \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1;$$

$$(b) \quad \cosh(x + y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y,$$

$$(c) \quad \sinh(x + y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y,$$

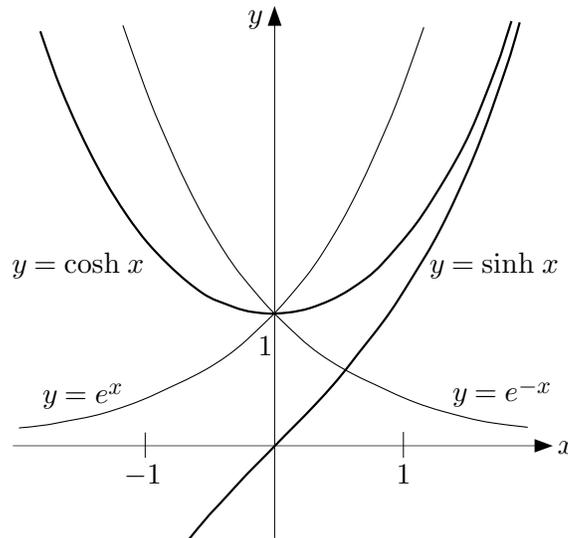


Fig. 6.3.1

$$(d) \quad \tanh(x+y) = \frac{\tanh x + \tanh y}{1 + \tanh x \tanh y};$$

letztere mit Hilfe der Relation $e^{x+y} = e^x \cdot e^y$.

Areafunktionen

Als Differenz einer streng monoton wachsenden und einer streng monoton fallenden Funktion ist \sinh streng monoton wachsend; ferner gilt

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sinh x = \pm\infty.$$

Somit existiert die Umkehrfunktion

$$\sinh^{-1} =: \operatorname{arsinh} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R},$$

genannt **Areasinus**.

Auf der positiven Halbachse $[0, \infty[$ ist $\sinh^2 x$ (als Zusammensetzung von zwei streng monoton wachsenden Funktionen) streng monoton wachsend; folglich wächst auch die Funktion

$$x \mapsto \cosh x = \sqrt{\sinh^2 x + 1} \quad (x \in [0, \infty[)$$

streng monoton. Ferner hat man

$$\cosh 0 = 1, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \cosh x = \infty.$$

Somit besitzt die Einschränkung des \cosh auf die positive Halbachse eine Umkehrfunktion

$$\cosh^{-1} =: \operatorname{arcosh} : [1, \infty[\rightarrow [0, \infty[,$$

genannt **Areacosinus**.

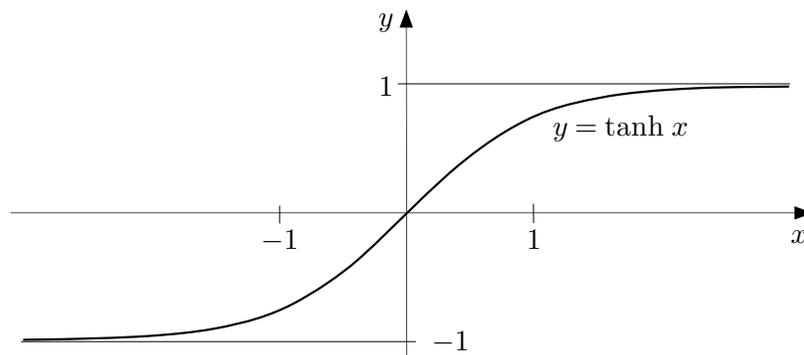


Fig. 6.3.2

Der hyperbolische Tangens ist ungerade und wegen

$$\tanh x = 1 - \frac{2}{e^{2x} + 1}$$

streng monoton wachsend; ferner verifiziert man leicht die Grenzwerte

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \tanh x = \pm 1 .$$

Ergo gibt es eine Umkehrfunktion

$$\tanh^{-1} =: \operatorname{artanh} :]-1, 1[\rightarrow \mathbb{R} ,$$

genannt **Areatangens**.

Die hier eingeführten **Arefunktionen** lassen sich durch “schon vorhandene” Funktionen, genauer: durch Logarithmen, ausdrücken:

$$\begin{aligned} \text{(6.9) (a)} \quad & \operatorname{arcosh} y = \log(y + \sqrt{y^2 - 1}) \quad (y \geq 1) , \\ \text{(b)} \quad & \operatorname{arsinh} y = \log(y + \sqrt{y^2 + 1}) \quad (y \in \mathbb{R}) , \\ \text{(c)} \quad & \operatorname{artanh} y = \frac{1}{2} \log \frac{1+y}{1-y} \quad (-1 < y < 1) . \end{aligned}$$

□ (a) Aus $y = \cosh x$, $x \geq 0$ folgt nacheinander

$$2y = e^x + e^{-x} , \quad e^{2x} - 2ye^x + 1 = 0 , \quad e^x = y \pm \sqrt{y^2 - 1} .$$

Von den beiden hiernach möglichen x -Werten benötigen wir den grösseren, und der gehört zum oberen Vorzeichen. Wir erhalten $x = \log(y + \sqrt{y^2 - 1})$.

(b) Aus $y = \sinh x$ folgt nacheinander

$$2y = e^x - e^{-x} , \quad e^{2x} - 2ye^x - 1 = 0 , \quad e^x = y \pm \sqrt{y^2 + 1} .$$

Da $e^x > 0$ ist, können wir in der letzten Gleichung das untere Vorzeichen streichen; wir erhalten $x = \log(y + \sqrt{y^2 + 1})$.

Die Verifikation von (c) überlassen wir dem Leser. □

Aufgaben

1. (a) Es sei $\alpha > 0$ eine vorgegebene Zahl. Berechne den Konvergenzradius der Potenzreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\cosh(k\alpha)} \quad (=: f(z)) .$$

- (b) Zeige: Die Funktion f genügt der Funktionalgleichung

$$f(e^\alpha z) + f(e^{-\alpha} z) \equiv \frac{2}{1-z} .$$

2. Bestimme den Konvergenzradius der folgenden Reihen:

$$(a) \quad \sum_{k=0}^{\infty} (1 - \tanh k) z^k, \quad (b) \quad \sum_{k=1}^{\infty} k \left(1 + \frac{3}{k}\right)^{k^2} z^k .$$

6.4 Die cis-Funktion

Die Eulerschen Formeln

Wir wollen jetzt das Verhalten der Exponentialfunktion auf der imaginären Achse untersuchen. Für beliebige $z \in \mathbb{C}$ gilt wegen **(6.1)** und der Stetigkeit der Konjugation $z \mapsto \bar{z}$:

$$\exp \bar{z} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\bar{z}}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \overline{\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n} = \overline{\exp z}.$$

Hieraus folgt für reelle t :

$$|e^{it}|^2 = e^{it} \cdot \overline{e^{it}} = e^{it} \cdot e^{-it} = e^{it} \cdot e^{-it} = e^0$$

und somit

$$(6.10) \quad |e^{it}| = 1 \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Wir beziehen uns im folgenden auf die reelle Variable t und definieren die sogenannte **cis-Funktion** durch

$$\text{cis} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, \quad t \mapsto e^{it};$$

sie bildet wegen **(6.10)** die reelle Achse stetig ab in den Einheitskreis

$$S^1 := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$$

der komplexen Ebene. Weiter definieren wir die auf ganz \mathbb{R} stetigen Funktionen **Cosinus** und **Sinus** durch

$$\begin{aligned} \cos t &:= \operatorname{Re} e^{it} = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2}, \\ \sin t &:= \operatorname{Im} e^{it} = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}. \end{aligned}$$

Dies sind die berühmten **Eulerschen Formeln**; sie lassen sich zusammenfassen zu

$$(6.11)(a) \quad e^{it} = \cos t + i \sin t \quad (t \in \mathbb{R}),$$

das heisst: $\text{cis} = \cos + i \sin$. Wegen **(6.10)** gilt

$$(6.11)(b) \quad \cos^2 t + \sin^2 t = 1 \quad (t \in \mathbb{R});$$

endlich ergeben sich aus

$$e^{it} = 1 + \frac{it}{1!} + \frac{i^2 t^2}{2!} + \frac{i^3 t^3}{3!} + \frac{i^4 t^4}{4!} + \dots$$

durch Trennung von Real- und Imaginärteil und Unterdrückung überflüssiger Nullen die Reihen

$$(6.11)(c) \quad \begin{aligned} \cos t &= 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \frac{t^6}{6!} + \dots \quad (t \in \mathbb{R}), \\ \sin t &= t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \frac{t^7}{7!} + \dots \quad (t \in \mathbb{R}), \end{aligned}$$

die den Cosinus als eine gerade, den Sinus als eine ungerade Funktion erweisen.

Die cis-Abbildung, geometrisch

Wir beweisen als erstes: Der Sinus ist auf dem Intervall $] -1, 1 [$ streng monoton wachsend. Mit (6.10) folgt hieraus insbesondere, dass cis das Intervall $] -1, 1 [$ injektiv auf einen von unten nach oben durch 1 hindurchgehenden Teilbogen $\gamma \subset S^1$ abbildet (siehe die Fig. 6.4.1).

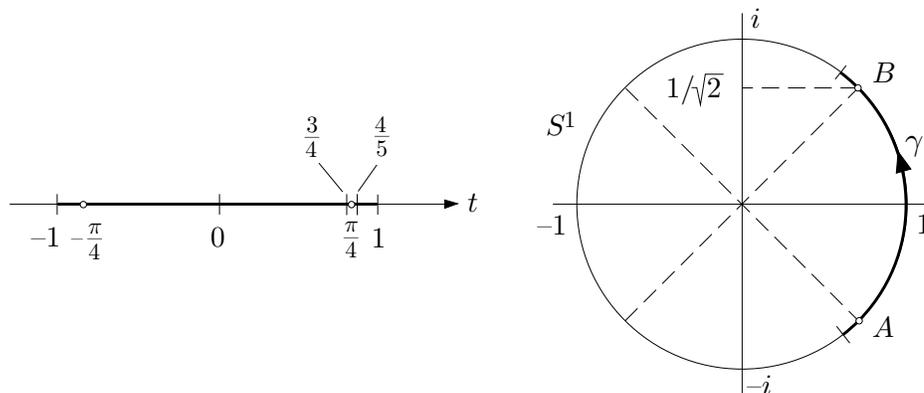


Fig. 6.4.1

□ Aus (6.11)(c) folgt

$$\begin{aligned} \sin u - \sin v &= (u - v) - \frac{u^3 - v^3}{3!} + \frac{u^5 - v^5}{5!} - \dots \\ &= (u - v) \left[1 - \frac{u^2 + uv + v^2}{3!} + \frac{u^4 + u^3v + u^2v^2 + uv^3 + v^4}{5!} - \dots \right], \end{aligned}$$

was wir mit einer naheliegenden Abkürzung in die Formel

$$\sin u - \sin v = (u - v)[1 + R(u, v)] \quad (1)$$

zusammenfassen können. Liegen u und v im Intervall $] -1, 1 [$, so lässt sich $R(u, v)$ folgendermassen abschätzen:

$$\begin{aligned} |R(u, v)| &\leq \frac{3}{3!} + \frac{5}{5!} + \frac{7}{7!} + \dots = \frac{1}{2!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{6!} + \dots \\ &< \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^5} + \dots = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Hieraus folgt: $1 + R(u, v)$ ist für alle u und v in dem betrachteten Bereich positiv; wegen (1) besitzt daher $\sin u - \sin v$ für diese u und v dasselbe Vorzeichen wie $u - v$. □

Für $0 < t < 1$ sind die Reihen **(6.11)**(c) alternierend; Satz **(5.13)** liefert daher die Ungleichungen

$$\begin{aligned} \cos t &> 1 - \frac{t^2}{2} > 0 & (0 < t < 1), \\ \sin t &> t \left(1 - \frac{t^2}{6}\right) & (0 < t < 1). \end{aligned} \quad (2)$$

Hiernach ist einerseits

$$\cos \frac{3}{4} > 1 - \frac{9}{32} = \frac{23}{32} = \sqrt{\frac{529}{2 \cdot 512}} > \frac{1}{\sqrt{2}}$$

und folglich wegen **(6.11)**(b):

$$\sin \frac{3}{4} < \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Andererseits folgt

$$\begin{aligned} \sin \frac{4}{5} &> \frac{4}{5} \left(1 - \frac{16}{6 \cdot 25}\right) > \frac{4}{5} \left(1 - \frac{16}{144}\right) = \frac{4}{5} \cdot \frac{8}{9} = \sqrt{\frac{1024}{2025}} \\ &> \sqrt{\frac{1024}{2048}} = \frac{1}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Wegen der Monotonie und nach dem Zwischenwertsatz **(4.21)** gibt es somit eine wohlbestimmte Zahl

$$\frac{\pi}{4} \in \left] \frac{3}{4}, \frac{4}{5} \right[\quad (\Rightarrow 3 < \pi < 3.2)$$

mit $\sin \frac{\pi}{4} = 1/\sqrt{2}$. Nach **(6.11)**(b) und (2) ist dann auch $\cos \frac{\pi}{4} = 1/\sqrt{2}$, und wir erhalten

$$\operatorname{cis} \left(\pm \frac{\pi}{4}\right) = \cos \frac{\pi}{4} \pm i \sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 \pm i)$$

(dies sind die Punkte A und B der Figur 6.4.1). Wegen

$$\exp\left(i \frac{\pi}{2}\right) = (\exp(i\pi/4))^2 = \frac{1}{2}(1+i)^2 = i$$

und $i^2 = -1$ ergeben sich damit die folgenden Formeln:

$$(6.12) \quad e^{i\pi/2} = i, \quad e^{i\pi} = -1, \quad e^{2i\pi} = 1.$$

Nach diesen Vorbereitungen sind wir nun in der Lage, den folgenden fundamentalen Satz zu beweisen:

(6.13) Die cis-Funktion bildet das Intervall $[0, 2\pi]$ bijektiv (bis auf $\text{cis } 0 = \text{cis } 2\pi = 1$) und stetig auf S^1 ab.

□ Folgendes ist schon gezeigt: cis führt das Intervall $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ bijektiv in den Bogen AB , das heisst: in den Viertelkreis mit Scheitel 1 über. Wir wollen nun als nächstes das cis-Bild des Intervalls $[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]$ bestimmen.

Aus (6.12) folgt die Identität

$$\text{cis}\left(t + \frac{\pi}{2}\right) = \exp\left(i\left(t + \frac{\pi}{2}\right)\right) = e^{i\pi/2} \cdot e^{it} = i \text{cis } t \quad (t \in \mathbb{R}) \quad (3)$$

und somit

$$\text{cis}\left(t + \frac{\pi}{2}\right) = T(\text{cis } t) \quad (t \in \mathbb{R}), \quad (4)$$

wobei wir explizit die Abbildung

$$T: \quad z = x + iy \quad \mapsto \quad iz = -y + ix$$

eingeführt haben. Wie die Fig. 6.4.2 zeigt, ist T nichts anderes als eine Vierteldrehung der Ebene um 0. Aus (4) folgt daher: Man erhält allgemein das cis-Bild des t -Intervalls $[\alpha + \frac{\pi}{2}, \beta + \frac{\pi}{2}]$, indem man das cis-Bild des Intervalls $[\alpha, \beta]$ längs S^1 um 90° im Gegenuhrzeigersinn verschiebt.

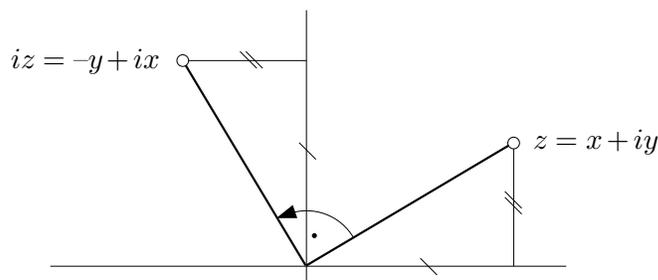


Fig. 6.4.2

Hieraus folgt: Die cis-Funktion bildet das Intervall $[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]$ bijektiv auf den Viertelkreis mit Scheitel i und weiter die Intervalle

$$\left[\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right], \quad \left[\frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right], \quad \left[\frac{7\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}\right]$$

bijektiv auf die Viertelkreise mit den Scheiteln -1 , $-i$ und wiederum 1 ab, wobei jedesmal der Intervallmittelpunkt in den Scheitel übergeht. — Zusammengekommen wird insbesondere das Intervall $[0, 2\pi]$ in der behaupteten Art auf S^1 abgebildet. □

In diesem Satz haben wir die Einschränkung der cis-Funktion auf das Intervall $[0, 2\pi]$ betrachtet. Denken wir uns die Beweiskonstruktion mit Hilfe von (3) bzw. (4) auf die ganze reelle t -Achse fortgesetzt, so können wir anschaulich sagen: Die cis-Funktion wickelt die reelle Achse auf den Einheitskreis der komplexen Ebene auf, und zwar entspricht jedem t -Intervall der Länge 2π ein voller Umgang auf S^1 .

Periodische Funktionen

Wir haben das zu präzisieren. Hierzu benötigen wir noch den folgenden Begriff: Eine auf ganz \mathbb{R} definierte Funktion f heisst **periodisch**, wenn es eine Zahl $p > 0$ gibt mit

$$\forall t \in \mathbb{R} : \quad f(t+p) = f(t) .$$

Ein solches p heisst **Periode** von f ; mit p sind auch alle Zahlen np , $n \in \mathbb{N}^*$, Perioden von f . Ist p die kleinste Periode von f , so heisst p **Fundamentalperiode**, jedes abgeschlossene Intervall der Länge p ein **Fundamentalebereich** von f . Es genügt offenbar, die Werte von f auf einem Fundamentalebereich zu kennen. — Die Beschreibung der cis-Funktion wird nun durch den folgenden Satz vervollständigt:

(6.14) Die cis-Funktion ist periodisch mit der Fundamentalperiode 2π ; es gilt nämlich

$$e^{it} = e^{it'} \quad \iff \quad t - t' = 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} . \quad (5)$$

Insbesondere ist

$$e^{it} = 1 \quad \iff \quad t = 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} . \quad (6)$$

□ Zu gegebenem $t \in \mathbb{R}$ lässt sich stets ein $k \in \mathbb{Z}$ und ein $\tau \in [0, 2\pi[$ finden mit

$$t = 2k\pi + \tau . \quad (7)$$

Dann gilt wegen **(6.12)**:

$$e^{it} = e^{i(2k\pi + \tau)} = (e^{2\pi i})^k \cdot e^{i\tau} = e^{i\tau} .$$

Nach Satz **(6.13)** hat aber $e^{i\tau}$ mit $\tau \in [0, 2\pi[$ genau dann den Wert 1, wenn $\tau = 0$ ist. Wegen (7) ist damit (6) bewiesen, und (5) ergibt sich nun aus der Bemerkung, dass $e^{it} = e^{it'}$ mit $e^{i(t-t')} = 1$ äquivalent ist. □

Wir zeigen zum Schluss, dass cis die reelle Achse *längentreu* auf den Einheitskreis aufwickelt. Ohne den Begriff der Bogenlänge schon im einzelnen zu diskutieren, können wir das etwa folgendermassen einsehen: Wir betrachten ein festes $t \in]0, 2\pi[$. Die cis-Funktion bildet das Intervall $[0, t] \subset \mathbb{R}$ bijektiv auf einen bei 1 beginnenden Bogen $\gamma \subset S^1$ ab (Fig. 6.4.3). Teilen wir das Intervall $[0, t]$ in N gleiche Teile, so bestimmen die Bilder der Teilungspunkte

$$t_k := kt/N \quad (0 \leq k \leq N)$$

ein Sehnepolygon γ_N mit Eckpunkten $z_k := \text{cis } t_k = e^{ikt/N}$. Die Länge einer Teilstrecke ist gegeben durch

$$|z_{k+1} - z_k| = \left| e^{i(k+1)t/N} - e^{ikt/N} \right| = \left| e^{ikt/N} \right| \left| e^{it/N} - 1 \right| = \left| e^{it/N} - 1 \right| ,$$

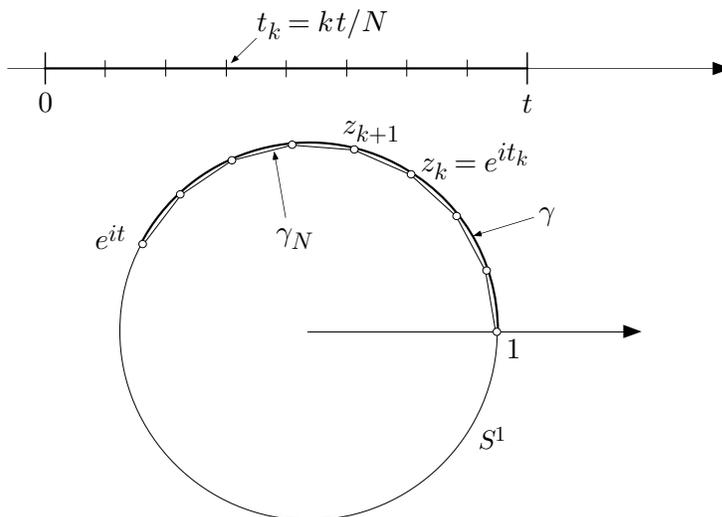


Fig. 6.4.3

unabhängig von k , so dass sich die Länge des ganzen Sehnepolygons berechnet zu

$$L(\gamma_N) = N \left| e^{it/N} - 1 \right| = t \left| \frac{e^{it/N} - 1}{it/N} \right|,$$

und mit (5.21) folgt $\lim_{N \rightarrow \infty} L(\gamma_N) = t$. Hieraus ziehen wir den Schluss, dass die Länge des von den γ_N approximierten Bogens gleich t ist; in anderen Worten: Die cis-Funktion bildet das Intervall $[0, t]$ auf einen Bogen der Länge t ab.

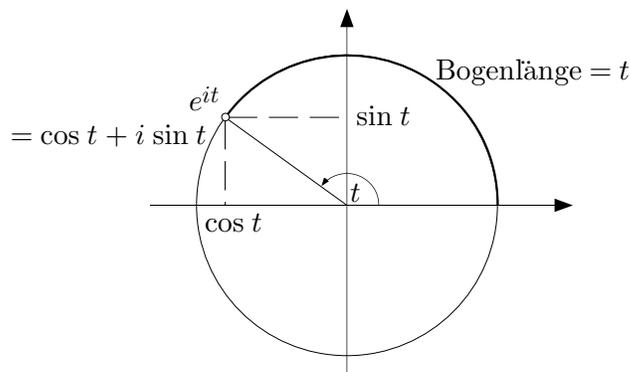


Fig. 6.4.4

Der Fig. 6.4.4 können wir nun nachträglich entnehmen, dass die analytische Definition der Funktionen \cos und \sin mit deren geometrischer Definition als “Winkelfunktionen” konsistent ist.

6.5 Die Argumentfunktion

\mathbb{R} modulo 2π

Da sich die Werte der cis -Funktion in Abständen von 2π wiederholen, ist cis sicher nicht injektiv, besitzt also auch keine Umkehrfunktion. Um trotzdem die Injektivität und damit die Existenz einer Umkehrfunktion zu erzwingen, könnten wir zur Einschränkung von cis auf das Intervall $[0, 2\pi[$ übergehen. Natürlicher ist der folgende abstrakte Kunstgriff: Wir erklären je zwei Punkte $t \in \mathbb{R}$, in denen cis denselben Wert annimmt, als **äquivalent** und fassen die Äquivalenzklassen (je eine für jeden Wert von cis) als “Punkte” eines neuen Raumes auf. In anderen Worten: Wir betrachten auf \mathbb{R} die Relation

$$t_1 \sim t_2 \quad :\iff \quad \text{cis } t_1 = \text{cis } t_2 . \quad (1)$$

Da \sim durch die Gleichheit von Funktionswerten erklärt ist, handelt es sich tatsächlich um eine Äquivalenzrelation. Nach Satz (1.1) wird dadurch die Menge \mathbb{R} in disjunkte Äquivalenzklassen zerlegt, und zwar ist die von der Zahl $t_0 \in \mathbb{R}$ erzeugte **Äquivalenzklasse modulo 2π** wegen (6.14) gegeben durch

$$[t_0] := \{t \in \mathbb{R} \mid t = t_0 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$$

und bildet damit ein eindimensionales **Gitter** von äquidistanten Punkten. Die Menge der Äquivalenzklassen wird mit $\mathbb{R}/2\pi$, gelesen “ \mathbb{R} modulo 2π ”, bezeichnet. Die Konstruktion des neuen Raumes $\mathbb{R}/2\pi$ ermöglicht nun den folgenden Satz:

(6.15) *Durch die Abbildung*

$$\text{cis}^\sim : \quad \mathbb{R}/2\pi \rightarrow S^1, \quad [t] \mapsto \text{cis } t \quad (2)$$

wird eine bijektive Zuordnung der “Punkte” von $\mathbb{R}/2\pi$ zu den Punkten von S^1 hergestellt.

□ Man beachte, dass hier cis^\sim mit Hilfe der nicht eindeutig bestimmten Darstellung $[t]$ der “Punkte” von $\mathbb{R}/2\pi$ festgelegt wird. Wir müssen daher mitbeweisen, dass cis^\sim als Abbildung wohldefiniert ist.

Auf Grund von (1) und dem beim Beweis von (1.1) Gesagten haben wir

$$[t] = [t'] \quad \iff \quad \text{cis } t = \text{cis } t' .$$

Hieraus folgt unmittelbar: cis^\sim ist erstens durch (2) wohldefiniert und zweitens injektiv. Da alle cis -Werte auch von cis^\sim angenommen werden, ist cis^\sim auch surjektiv. └

Nach diesem Satz besitzt cis^\sim eine Umkehrfunktion, genannt **Argumentfunktion**:

$$\arg : \quad S^1 \rightarrow \mathbb{R}/2\pi, \quad z \mapsto \arg z ,$$

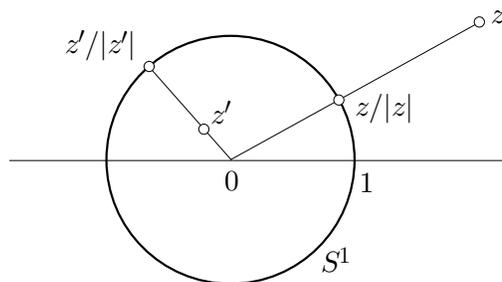


Fig. 6.5.1

die für jeden Punkt $z = x + iy \in S^1$ eine Äquivalenzklasse von reellen Zahlen modulo 2π festlegt. Aufgrund unserer Definitionen gilt:

$$z = e^{it}, \quad t \in \mathbb{R} \quad \Longleftrightarrow \quad \arg z = [t], \quad |z| = 1. \quad (3)$$

Die Argumentfunktion lässt sich auf die ganze **punktierte Ebene**, gemeint ist die Menge \mathbb{C}^* aller von 0 verschiedenen komplexen Zahlen, fortsetzen: Für jedes $z \in \mathbb{C}^*$ ist $z/|z| \in S^1$. Die Figur 6.5.1 legt nahe, $\arg z$ zu definieren durch

$$\arg z := \arg \frac{z}{|z|} \quad (z \in \mathbb{C}^*)$$

(die rechte Seite ist bereits erklärt). Damit wird das Argument zu einer Funktion

$$\arg : \quad \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{R}/2\pi,$$

und zwar ist \arg auf jedem von 0 ausgehenden Strahl konstant.

(6.16) Jedes $z \in \mathbb{C}^*$ besitzt eine im wesentlichen eindeutig bestimmte Darstellung der Form

$$z = r e^{i\phi}, \quad r > 0, \quad \phi \in \mathbb{R}; \quad (4)$$

und zwar ist $r = |z|$, $[\phi] = \arg z$.

□ Es sei $\arg z = \arg(z/|z|) =: [\phi]$. Wegen (3) ist dann $z/|z| = e^{i\phi}$, und es gilt (4) mit $r := |z|$. — Aus (4) folgt umgekehrt $|z| = r \cdot 1$ und hieraus weiter $z/|z| = e^{i\phi}$, wegen (3) also $\arg z = \arg(z/|z|) = [\phi]$. □

Man nennt (4) die **Polardarstellung** der komplexen Zahl z .

Addition von Argumenten

Bis hierher war $\mathbb{R}/2\pi$ für uns nur eine Menge (von Mengen). Wir gehen nun einen Schritt weiter, indem wir die additive Struktur von \mathbb{R} auf $\mathbb{R}/2\pi$ “durchdrücken”: Äquivalenzklassen modulo 2π (und damit Argumente von komplexen Zahlen) werden addiert nach der Vorschrift

$$[t_1] + [t_2] := [t_1 + t_2],$$

und das additive Inverse der Klasse $[t]$ ist die Klasse $-[t] := [-t]$. Hierdurch ist die Summe von zwei Klassen wohldefiniert: Gilt nämlich $[t_1] = [t'_1]$ und $[t_2] = [t'_2]$, so unterscheiden sich t_1 und t'_1 bzw. t_2 und t'_2 je um ein Vielfaches von 2π . Dasselbe trifft dann auch zu für $t_1 + t_2$ und $t'_1 + t'_2$; somit ist $[t_1 + t_2] = [t'_1 + t'_2]$. Ähnlich schliesst man für das Inverse.

Im Sinne dieser Addition genügt die Argumentfunktion der Funktionalgleichung des Logarithmus:

$$(6.17)(a) \quad \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}^* : \quad \arg(z_1 \cdot z_2) = \arg z_1 + \arg z_2 ,$$

□ Es sei $z_k = r_k e^{i\phi_k}$ ($k = 1, 2$). Aus

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 e^{i(\phi_1 + \phi_2)}$$

folgt dann wegen der Eindeutigkeitsaussage von (6.16):

$$\arg(z_1 \cdot z_2) = [\phi_1 + \phi_2] = [\phi_1] + [\phi_2] = \arg z_1 + \arg z_2 . \quad \square$$

Kurz: *Bei der Multiplikation von komplexen Zahlen multiplizieren sich die Beträge und addieren sich die Argumente.* Aus

$$\arg z + \arg \bar{z} = \arg(z \cdot \bar{z}) = \arg(|z|^2) = [0]$$

ergibt sich noch die weitere Rechenregel

$$(6.17)(b) \quad \forall z \in \mathbb{C}^* : \quad \arg \bar{z} = -\arg z .$$

Wurzelziehen im Komplexen

Wir sind nun auch in der Lage, aus komplexen Zahlen n -te Wurzeln zu ziehen (Fig. 6.5.2):

(6.18) *Es sei $c \in \mathbb{C}^*$, $\arg c = [\gamma]$, eine gegebene komplexe Zahl und $n \geq 1$. Dann besitzt die Gleichung*

$$z^n = c \tag{5}$$

genau n verschiedene Wurzeln, nämlich die Zahlen

$$z_k := \sqrt[n]{|c|} \operatorname{cis} \left(\frac{\gamma}{n} + k \frac{2\pi}{n} \right) \quad (0 \leq k \leq n-1) . \tag{6}$$

□ Die komplexe Zahl $z = r e^{i\phi}$ ist genau dann eine Lösung der Gleichung (5), wenn gilt:

$$r^n e^{in\phi} = c = |c| e^{i\gamma} .$$

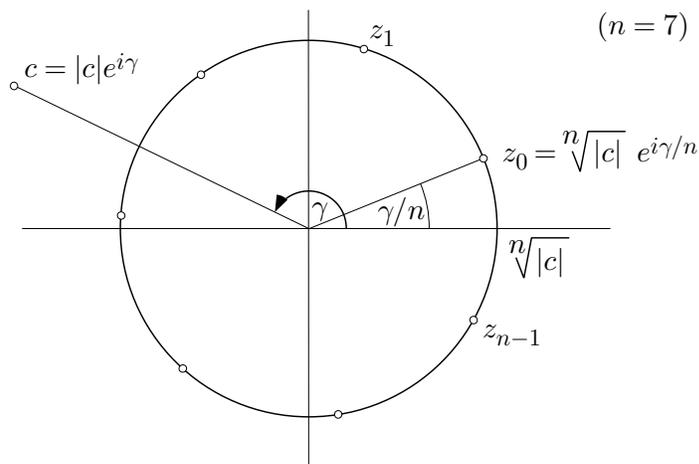


Fig. 6.5.2

Dies ist nach **(6.16)** äquivalent mit

$$r^n = |c| \quad \wedge \quad [n\phi] = [\gamma],$$

das heisst aber:

$$r = \sqrt[n]{|c|} \quad \wedge \quad n\phi = \gamma + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Hiernach kann ϕ irgendeinen der Werte $\frac{\gamma}{n} + k \cdot \frac{2\pi}{n}$ annehmen, woraus sich aber für $\arg z = [\phi]$ nur die n verschiedenen Möglichkeiten ergeben, die in (6) angeführt sind. \square

Ist speziell $c = 1$, so erhält man die sogenannten **n -ten Einheitswurzeln**. Wegen $|c| = 1$, $\gamma = 0$ bilden sie ein reguläres n -Eck auf dem Einheitskreis mit einer Ecke im Punkt 1. Nach der allgemeinen Formel sind sie gegeben durch

$$z_k = e^{ik\frac{2\pi}{n}}.$$

Setzt man zur Abkürzung $z_1 = e^{2\pi i/n} =: \omega$ (Fig. 6.5.3), so kann man alle übrigen mit Hilfe dieses ω darstellen:

$$z_k = \omega^k \quad (0 \leq k \leq n-1).$$

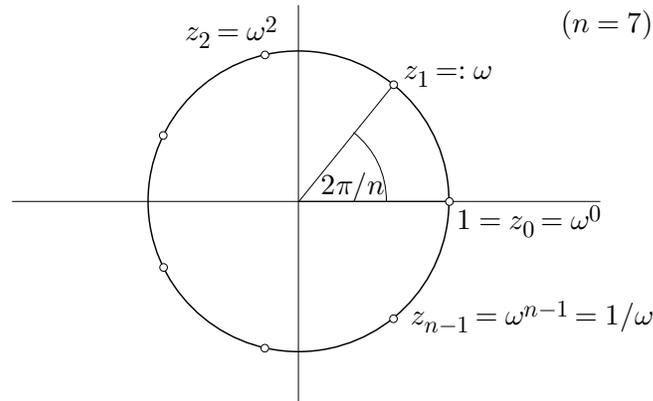


Fig. 6.5.3

Polarkordinaten in der (x, y) -Ebene

Fassen wir die z -Ebene als reelle (x, y) -Ebene auf, so können wir in natürlicher Weise die Argumentfunktion von \mathbb{C}^* her übernehmen: Wir bezeichnen die reelle punktierte Ebene mit $\dot{\mathbb{R}}^2$ und setzen

$$\arg(x, y) := \arg(x + iy) \quad ((x, y) \in \dot{\mathbb{R}}^2)$$

(die rechte Seite ist bereits erklärt). Damit erhalten wir die folgende reelle Formulierung der Proposition (6.16):

(6.19) Jeder Punkt $(x, y) \in \dot{\mathbb{R}}^2$ besitzt eine im wesentlichen eindeutig bestimmte Darstellung der Form

$$(x, y) = (r \cos \phi, r \sin \phi), \quad r > 0, \phi \in \mathbb{R}, \quad (7)$$

und zwar ist $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $[\phi] = \arg(x, y)$.

□ Die Darstellung (7) ergibt sich aus (4) durch Trennung von Real- und Imaginärteil. ┘

Die zwei Größen r und $[\phi]$ heissen die **Polarkordinaten** des Punktes (x, y) . Aus Bequemlichkeitsgründen werden die Klammern bei ϕ im allgemeinen weggelassen; das darf aber nicht darüber hinwegtäuschen, dass ϕ keine “gewöhnliche reelle Variable” darstellt. Ähnliches gilt für den von zwei Vektoren $\mathbf{z}, \mathbf{z}' \in \dot{\mathbb{R}}^2$ eingeschlossenen **Winkel**. Je nach Zusammenhang versteht man darunter den im Intervall $[0, 2\pi[$ oder den im Intervall $]-\pi, \pi]$ gelegenen Repräsentanten von $\arg \mathbf{z}' - \arg \mathbf{z}$, oder aber den Betrag des zweitgenannten Repräsentanten. Dieser Betrag ist nichts anderes als die Länge des kürzeren der beiden durch $\mathbf{z}/|\mathbf{z}|$ und $\mathbf{z}'/|\mathbf{z}'|$ bestimmten Teilbögen von S^1 .

Was uns noch fehlt, ist eine Darstellung der Argumentfunktion mit Hilfe von “Standardfunktionen”. Eine derartige Formel wird im nächsten Abschnitt nachgeliefert; mit ihrer Hilfe können wir dann auch die Stetigkeit des Arguments erörtern.

Aufgaben

1. Bestimme alle Lösungen z der folgenden Gleichungen:

$$(a) \quad \exp\left(\pi \frac{i+z}{1+iz}\right) = 1, \quad (b) \quad z^4 = 8(i\sqrt{3} - 1).$$

2. Bestimme Real- und Imaginärteil der folgenden komplexen Zahlen:

$$(a) \quad \exp\left(\pi \frac{1+i\sqrt{2}}{\sqrt{2}+i}\right), \quad (b) \quad \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right)^{1991},$$

$$(c) \quad \left(\frac{24-7i}{20+15i}\right)^{17}.$$

3. Es sei $c := \frac{\log 2}{2\pi} + i$. Man stelle die Funktion

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, \quad t \mapsto e^{ct}$$

in geeigneter Weise graphisch dar.

4. Auf einem Bild erkennt man Stunden-, Minuten- und Sekundenzeiger einer Uhr, aber keine Marken auf dem Zifferblatt. Zeige, dass der Aufnahmezeitpunkt t (modulo 12 Stunden) durch die Stellung der drei Zeiger zueinander bestimmt ist, und leite eine Formel dafür her. *Hinweis:* Wähle als Zeiteinheit 12 Stunden. Bezeichnen z_h, z_m, z_s die Lagen der drei Zeiger zum Aufnahmezeitpunkt, so gilt zum Beispiel $z_h = i e^{-2\pi it}$. Dem Bild lassen sich die beiden Winkel

$$\arg z_m - \arg z_h =: [2\pi\tau_m], \quad \arg z_s - \arg z_h =: [2\pi\tau_s]$$

entnehmen. Hieraus ergeben sich zwei Gleichungen, aus denen t modulo 1 bestimmt werden kann. Beachte: Dividieren ist in $\mathbb{R}/1$ nicht erlaubt!

6.6 Winkelfunktionen

Weitere Eigenschaften von cos und sin

Wir stellen hier noch einige Eigenschaften der trigonometrischen Funktionen zusammen. Aus den Formeln $\cos t \pm i \sin t = e^{\pm it}$ und $e^{i(u \pm v)} = e^{iu} \cdot e^{\pm iv}$ folgt

$$\cos(u \pm v) + i \sin(u \pm v) = e^{i(u \pm v)} = (\cos u + i \sin u)(\cos v \pm i \sin v) .$$

Trennt man hier auch rechter Hand Real- und Imaginärteil, so ergeben sich die Additionstheoreme

$$\begin{aligned} \text{(6.20)} \quad \cos(u \pm v) &= \cos u \cos v \mp \sin u \sin v , \\ \sin(u \pm v) &= \sin u \cos v \pm \cos u \sin v . \end{aligned}$$

Wir verzichten darauf, hier weitere trigonometrische Formeln dieser Art herzuleiten.

① Als Anwendung von (6.20) diene die sogenannte “geometrische Definition des Skalarprodukts”: Für je zwei Vektoren $\mathbf{z}, \mathbf{z}' \in \mathbb{R}^2$ gilt

$$\mathbf{z} \cdot \mathbf{z}' = |\mathbf{z}| \cdot |\mathbf{z}'| \cos \alpha ; \tag{1}$$

dabei bezeichnet α den von \mathbf{z} und \mathbf{z}' eingeschlossenen Winkel.

□ Setzen wir die Polardarstellung (6.19),

$$\mathbf{z} = (r \cos \phi, r \sin \phi), \quad \mathbf{z}' = (r' \cos \phi', r' \sin \phi'),$$

in die “analytische Definition” 2.7.(1) des Skalarprodukts ein, so ergibt sich

$$\begin{aligned} \mathbf{z} \cdot \mathbf{z}' &= r \cos \phi \cdot r' \cos \phi' + r \sin \phi \cdot r' \sin \phi' \\ &= rr'(\cos \phi \cos \phi' + \sin \phi \sin \phi') \\ &= |\mathbf{z}| |\mathbf{z}'| \cos(\phi - \phi') . \end{aligned} \quad \lrcorner$$

In der Elementargeometrie wird gezeigt, dass die Formel (1) nicht nur in der Ebene gilt, sondern auch im \mathbb{R}^m mit $m > 2$. ○

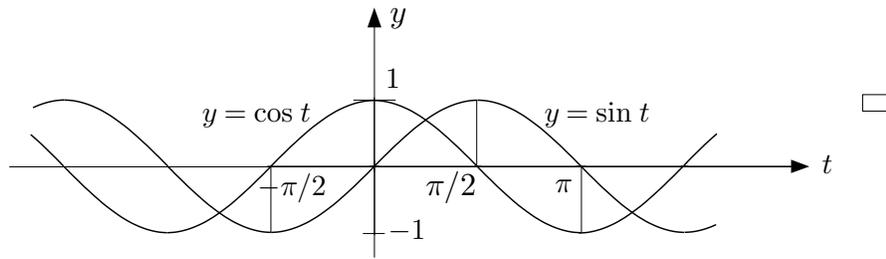


Fig. 6.6.1

Mit Hilfe von (6.14) schliesst man aus

$$\sin t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} = \frac{e^{-it}}{2i} (e^{2it} - 1),$$

dass \sin genau in den Punkten $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, verschwindet. Aus der letzten Formel folgt weiter

$$\frac{\sin t}{t} = e^{-it} \frac{e^{2it} - 1}{2it},$$

mit (5.21) ergibt sich daher der Grenzwert

$$(6.21) \quad \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1.$$

Zerlegt man die äusseren Glieder von 6.4.(3) in Real- und Imaginärteil:

$$\cos\left(t + \frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(t + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin t + i \cos t,$$

so ergeben sich die folgenden Identitäten (a); die weiteren Formeln (b) und (c) sind einfache Konsequenzen von (a):

$$(6.22)(a) \quad \forall t \in \mathbb{R} : \quad \cos\left(t + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin t, \quad \sin\left(t + \frac{\pi}{2}\right) = \cos t,$$

$$(b) \quad \forall t \in \mathbb{R} : \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \sin t,$$

$$(c) \quad \forall t \in \mathbb{R} : \quad \cos(t + \pi) = -\cos t, \quad \sin(t + \pi) = -\sin t;$$

siehe die Fig. 6.6.1. Aus (6.22)(a) ziehen wir noch den Schluss, dass \cos genau in den Punkten $k\pi + \frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$, verschwindet. — Wir beweisen schliesslich:

(6.22) (d) *Cosinus und Sinus besitzen die Fundamentalperiode 2π .*

┌ Beide Funktionen besitzen jedenfalls die Periode 2π . Mit (a) erhält man

$$\forall t \in \mathbb{R} : \quad \operatorname{cis} t = \sin \left(t + \frac{\pi}{2} \right) + i \sin t .$$

Hiernach kann \sin keine kleinere Periode aufweisen als die Fundamentalperiode von cis , also 2π , und dasselbe folgt schliesslich mit (a) für den Cosinus. ┘

Arcusfunktionen

Wir kommen nun zu den Monotonieeigenschaften von Cosinus und Sinus. Da uns die Differentialrechnung, insbesondere Satz (7.19), noch nicht zur Verfügung steht, müssen wir etwas umständlich argumentieren. — Wie wir gesehen haben, ist \sin auf dem Intervall $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ streng monoton wachsend. Somit ist

$$t \mapsto \cos t = \sqrt{1 - \sin^2 t}$$

auf demselben Intervall streng monoton fallend. Ist weiter $t \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$, so ist $\frac{\pi}{2} - t \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$. Hieraus folgt, dass

$$t \mapsto \sin t = \cos \left(\frac{\pi}{2} - t \right)$$

(als Zusammensetzung von streng monoton fallenden Funktionen) auch auf dem Intervall $t \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$ streng monoton wächst. Zusammengenommen ergibt sich, dass \sin auf $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ streng monoton wächst, und aus Symmetriegründen trifft das sogar auf dem Intervall $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ zu.

Wir bezeichnen die Einschränkung des \sin auf das Intervall $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ für einen Moment mit $\sin \upharpoonright$. Nach dem Hauptsatz (4.24) über monotone Funktionen bildet $\sin \upharpoonright$ das Intervall $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ bijektiv auf das Intervall $[-1, 1]$ ab und besitzt eine stetige Umkehrfunktion

$$(\sin \upharpoonright)^{-1} =: \operatorname{arcsin} : \quad [-1, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] ,$$

genannt **Arcussinus** (Fig. 6.6.2, links). Es gilt die folgende Rechenregel:

$$\sin t = y, \quad t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \quad \iff \quad \operatorname{arcsin} y = t .$$

Setzt man in der ersten Identität (6.22) $t := t' - \frac{\pi}{2}$, so folgt

$$\forall t' \in \mathbb{R} : \quad \cos t' = -\sin \left(t' - \frac{\pi}{2} \right) . \quad (2)$$

Ist $t' \in [0, \pi]$, so ist $t' - \frac{\pi}{2} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Mit (2) und dem über \sin Gesagten ergibt sich daher: Der Cosinus ist auf dem Intervall $[0, \pi]$ streng monoton

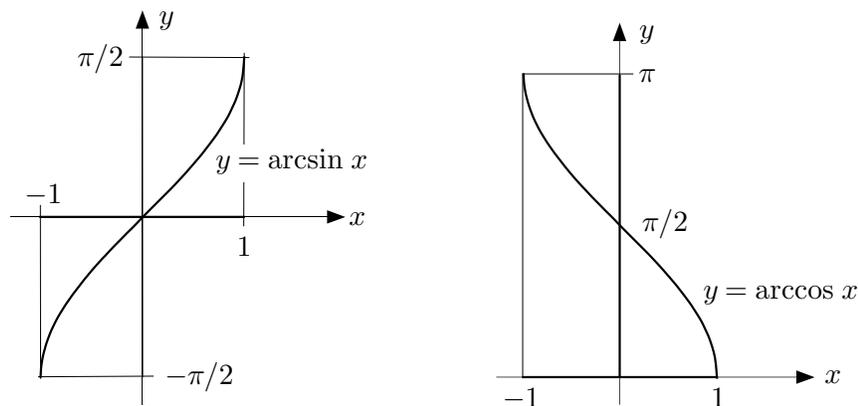


Fig. 6.6.2

fallend. Wir bezeichnen die Einschränkung des \cos auf dieses Intervall für einen Moment mit $\cos \upharpoonright$. Nach dem Hauptsatz über monotone Funktionen bildet $\cos \upharpoonright$ das Intervall $[0, \pi]$ bijektiv auf das Intervall $[-1, 1]$ ab (wobei die Endpunkte “übers Kreuz” ineinander übergehen) und besitzt eine stetige Umkehrfunktion

$$(\cos \upharpoonright)^{-1} =: \arccos : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi],$$

genannt **Arcuscosinus** (Fig. 6.6.2, rechts).

Tangens und Arcustangens

Bekanntlich definiert man noch den **Tangens** und den **Cotangens** durch

$$\tan t := \frac{\sin t}{\cos t} \quad (t \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}), \quad \cot t := \frac{\cos t}{\sin t} \quad (t \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}).$$

Wegen (6.22)(c) besitzen \tan und \cot die Periode π , und zwar ist π Fundamentalperiode (Fig. 6.6.3, links).

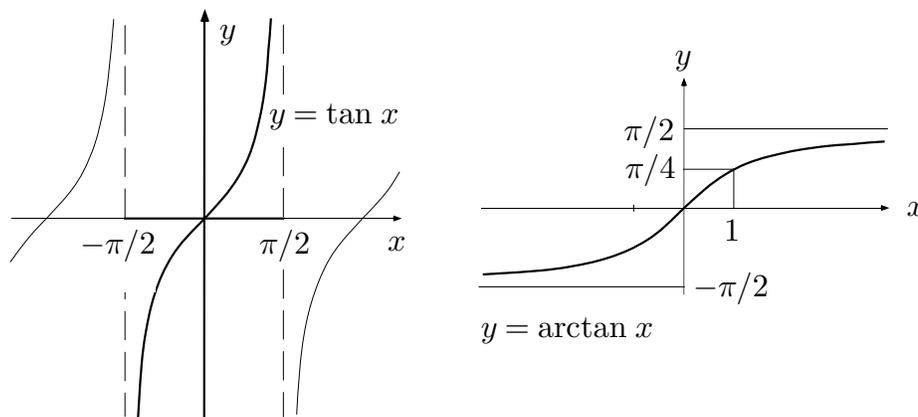


Fig. 6.6.3

Als Quotient einer monoton wachsenden und einer monoton fallenden Funktion ist \tan auf dem Intervall $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ streng monoton wachsend, und aus Symmetriegründen (der Tangens ist eine ungerade Funktion) trifft dies sogar auf dem Intervall $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ zu. Ferner gilt

$$\lim_{t \rightarrow (\pi/2)^-} \tan t = \lim_{t \rightarrow (\pi/2)^-} \frac{\sqrt{1 - \cos^2 t}}{\cos t} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x} = \infty .$$

Bezeichnen wir die Einschränkung des Tangens auf das Intervall $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ für einen Moment mit $\tan|$, so können wir daher folgendes sagen: $\tan|$ bildet das Intervall $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ bijektiv auf das Intervall $\left]-\infty, \infty\right[= \mathbb{R}$ ab und besitzt eine stetige Umkehrfunktion

$$(\tan|)^{-1} =: \arctan : \left]-\infty, \infty\right[\rightarrow \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[,$$

genannt **Arcustangens** (Fig. 6.6.3, rechts). Es gilt die folgende Rechenregel:

$$\tan t = m, \quad t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\iff \arctan m = t . \quad (3)$$

Formeln für das Argument

Damit sind wir in der Lage, die angekündigte Darstellung der Argumentfunktion mit Hilfe von “Standardfunktionen” anzugeben. Es bezeichne

$$H := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\} \quad \left(= \{z = x + iy \in \mathbb{C} \mid x > 0\} \right)$$

die offene rechte Halbebene. Dann gilt:

(6.23) Die Funktion

$$\Phi : H \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto \Phi(x, y) := \arctan \frac{y}{x}$$

ist ein stetiger Repräsentant des Arguments auf H .

Man nennt Φ den **Hauptwert** des Arguments auf H .

□ Die Funktion Φ ist jedenfalls stetig auf H . Jeder Punkt $(x, y) \in H$ besitzt eine Polardarstellung

$$(x, y) = (r \cos \phi, r \sin \phi), \quad r > 0, \quad \phi \in \arg(x, y) \cap \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[.$$

Hieraus folgt $y/x = \tan \phi$, und mit (3) ergibt sich

$$\Phi(x, y) = \arctan \frac{y}{x} = \phi \in \arg(x, y),$$

wie behauptet. □

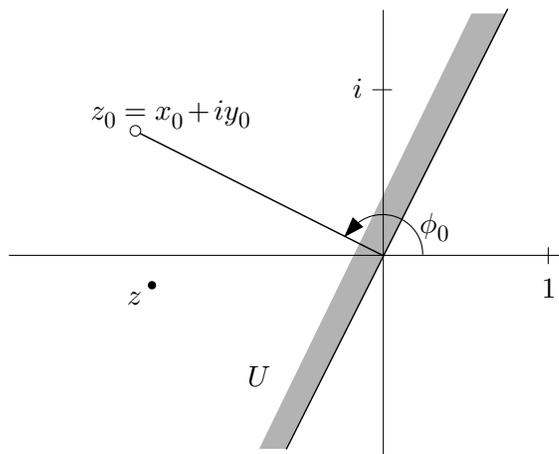


Fig. 6.6.4

Die Funktionalgleichung der Argumentfunktion erlaubt, die Funktion Φ in die Umgebung eines beliebigen Punktes $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ zu transportieren, um einen dort gültigen Repräsentanten des Arguments zu gewinnen (Fig. 6.6.4):

(6.34) Es sei ϕ_0 ein Argumentwert des Punktes $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Dann ist

$$\phi(x, y) := \phi_0 + \arctan \frac{x_0 y - y_0 x}{x_0 x + y_0 y} \quad ((x, y) \in U)$$

ein in der Halbebene $U := \{(x, y) \mid x_0 x + y_0 y > 0\}$ stetiger Repräsentant des Arguments.

□ Die angeschriebene Funktion ist wohldefiniert und als Zusammensetzung von stetigen Funktionen stetig auf U . Nach (6.17) gilt

$$\arg z = \arg z_0 + \arg \bar{z}_0 + \arg z = \arg z_0 + \arg(\bar{z}_0 z),$$

oder, reell geschrieben:

$$\arg(x, y) = \arg(x_0, y_0) + \arg(x_0 x + y_0 y, x_0 y - y_0 x).$$

Ist $(x, y) \in U$, so liegt der Punkt $(x_0 x + y_0 y, x_0 y - y_0 x)$ in H . Mit (6.23) ergibt sich daher

$$\arg(x, y) = [\phi_0] + \left[\arctan \frac{x_0 y - y_0 x}{x_0 x + y_0 y} \right] = [\phi(x, y)],$$

wie behauptet. ┘

Es ist eine Urtatsache der Geometrie (und damit der Analysis), dass sich aus den lokalen Repräsentanten $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}$ der Argumentfunktion kein globaler stetiger Repräsentant $\Phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ des Arguments fabrizieren lässt.

Aufgaben

1. Berechne durch Zurückführung auf eine (endliche) geometrische Reihe die beiden Summen

(a) $\sum_{k=0}^n \cos(kt)$, (b) $\sum_{k=0}^n \sin(kt)$.