Technische Universität Chemnitz

Vorbereitung zur Vordiplomprüfung Analysis

begleitend zur Vorlesung
Analysis I-IV (2004 - 2006)
Prof. Dr. Peter Stollmann

erstellt von

Philipp Krone, Martin Wolf

<philipp.krone@physik.tu-chemnitz.de, mail@martin-wolf.org>

Datum: 04.09.2006

Inhaltsverzeichnis

1 Wichtige Definitionen

1.1 Cauchy-Folge (Fundamentalfolge)

Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}$ heißt Cauchy-Folge, wenn gilt:

Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $|a_n - a_m| < \varepsilon$ für alle $n, m \geq N$

In Worten:

Eine Folge ist eine Cauchy-Folge, wenn die Folgenglieder untereinander beliebig wenig abweichen, falls nur die Indizes genügend groß sind.

Beachte:

Es reicht nicht, dass nur die aufeinander folgenden Folgenglieder beliebig zusammenrücken!

1.1.1 Satz [konvergente Folge]

Jede konvergente Folge reeller Zahlen ist eine Cauchy-Folge.

Beweis: Die Folge (a_n) konvergiere gegen a. Dann gibt es für alle $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $|a_n - a| < \frac{\epsilon}{2}$ für alle $n \geq N$. Für alle $n, m \geq N$ gilt dann:
$|a_n - a_m| = |(a_n - a) - (a_m - a)| \leq |a_n - a| + |a_m - a| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$.

In $\mathbb{R}$ konvergiert jede Cauchy-Folge.

Beweis: Vollständigkeitsaxiom.

1.2 Berührpunkt

Sei $A \subset \mathbb{R}$ eine Teilmenge der Zahlengeraden und $a \in \mathbb{R}$.

Der Punkt a heißt Berührpunkt von A, falls in einer ε-Umgebung von a $U_\varepsilon(a) := (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$ mindestens ein Punkt von A liegt.

1.3 Häufungspunkt

Sei $A \subset \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$.

Der Punkt a heißt Häufungspunkt von A, falls in jeder ε-Umgebung von a unendlich viele Punkte von A liegen.

1.3.1 Beispiel

Jedes $x \in \mathbb{R}$ ist Häufungspunkt der irrationalen Zahlen. Dies impliziert: Sowohl die rationalen als auch die irrationalen Zahlen liegen *dicht* in $\mathbb{R}$.

1.4 Wronski-Determinante

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ ein n-tupel von Lösungen einer homogenen Differentialgleichung n-ter Ordnung. Diese Lösungen sind genau dann linear unabhängig, wenn für ein und damit für alle $x \in I$ die Wronski-Determinante $W(x)$

$$W(x) := \det \begin{pmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) & \ldots & \varphi_n(x) \\ \varphi_1'(x) & \varphi_2'(x) & \ldots & \varphi_n'(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \varphi_1^{n-1}(x) & \varphi_2^{n-1}(x) & \ldots & \varphi_n^{n-1}(x) \end{pmatrix}$$

von Null verschieden ist.

1.5 Residuum

Sei $f \in \mathfrak{H}(U_{r,R}(z_0))$, $f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k(z - z_0)^k$ die Laurententwicklung von f. Dann heißt a_{-1} das Residuum von f bei z_0

2 Wichtige Sätze

2.1 Bolzano-Weierstraß [Konvergenz]

Jede beschränkte Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ besitzt mindestens eine konvergente Teilfolge $(x_{n_k})_{n,k\in\mathbb{N}}$.

2.1.1 Beweisidee

1. Da die Folge beschränkt ist, gibt es Zahlen $A, B \in \mathbb{R}$ mit $A \leq a_n \leq B$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Die ganze Folge ist also in dem Intervall $[A, B] := \{x \in \mathbb{R} : A \leq x \leq B\}$ enthalten. Man konstruiert nun durch vollständige Induktion eine Folge von abgeschlossenen Intervallen $I_k \subset \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}$ mit folgenden Eigenschaften:
   - In I_k liegen unendlich viele Glieder der Folge (a_n)
   - $I_k \subset I_{k-1}$ für $k \geq 1$

- diam(I_k)= 2^{-k}diam(I_0)

2. Man definiert nun induktiv eine Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ mit $a_{n_k} \in I_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$
3. Man beweist nun, dass die Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert, indem man zeigt, dass sie eine Cauchy-Folge ist.

2.2 Zwischenwertsatz

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f(a) < 0$ und $f(b) > 0$ (bzw. $f(a) > 0$ und $f(b) < 0$), dann existiert ein $p \in [a, b]$ mit $f(p) = 0$.

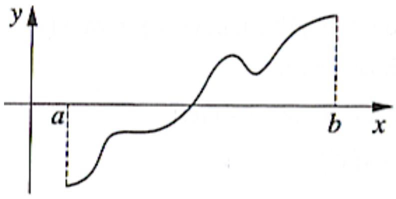

Abbildung 1: geometrische Deutung des Zwischenwertsatzes

Bemerkung: Dieser Satz gilt nicht im Körper der rationalen Zahlen, da es dort z.B. keine $sqrt(2)$ gibt!

2.2.1 Beweisidee

Benutzung der Intervall-Halbierungsmethode und Beweis der Konvergenz von einer monoton wachsenden und einer monoton fallenden Folge im gemeinsamen Punkt p.

2.3 Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (HDI)

Sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und F eine Stammfunktion von f. Dann gilt für alle $a, b \in I$:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Beweis: Für $x \in I$ sei $F_0(x) := \int_a^x f(t)dt$. Ist nun F eine beliebige Stammfunktion von f, so gibt es ein $c \in \mathbb{R}$ mit $F - F_0 = c$. Deshalb ist $F(b) - F(a) = F_0(b) - F_0(a) = F_0(b) = \int_a^b f(t)dt$.

2.4 Identitätssatz [holomorphe Funktionen]

Sei $U \subset \mathbb{C}$ ein zusammenhängendes Gebiet, $f \in \mathfrak{H}(U)$, dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1. $f \equiv 0$
2. es gibt $z_0 \in U$ mit $f^{(n)}(z_0) = 0$, $n \in \mathbb{N}_0$
3. Die Nullstellenmenge $N = \{z | f(z) = 0\}$ ist nicht diskret in U.

Daraus folgt:

Seien f und g holomorphe Funktionen auf einer zusammenhängenden offenen Menge $U \subset \mathbb{C}$. Besitzt die Menge $\{z \in U | f(z) = g(z)\}$ einen Häufungspunkt in U, so gilt $f = g$.

Nach diesem Satz ist eine in einem Gebiet holomorphe Funktion vollständig bestimmt durch ihre Werte auf Teilmengen, die mindestens einen Häufungspunkt haben, etwa durch ihre Werte auf einer Strecke. Man kann dies manchmal benützen, um bekannte Identitäten vom Reellen ins Komplexe auszudehnen.

2.5 Satz von Morera [holomorphe Funktionen]

Dies ist im Allgemeinen die Umkehrung des Cauchyschen Integralsatzes (vgl. 4.24.3 Seite 35).

Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $f : U \to \mathbb{C}$ stetig, α ein Dreiecksweg. Ist $\int_\alpha f(z)\mathrm{d}z = 0 \; \forall \alpha$, so ist $f \in \mathfrak{H}(U)$ und analytisch (so besitzt f lokal eine Stammfunktion).

2.6 Satz von Goursat [holomorphe Funktionen]

Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $f \in \mathfrak{H}(U)$, so ist f analytisch.

2.7 Residuensatz

Ziel: $\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = \sum_{\text{isolierte Singularitäten}} (\text{Residuen}) \cdot (\text{Umlaufzahl von } \gamma)$

Sei $f \in \mathfrak{H}(U \backslash \{z_1, \ldots, z_n\})$, γ eine stückweise glatte geschlossene Kurve in $U \backslash \{z_1, \ldots, z_n\}$, U einfach zusammenhängend, dann gilt:

$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = \sum_{j=1}^{n} \mathrm{res}(f(z), z_j) \cdot n(\gamma, z_j)$

3 Grundlagen

3.1 Reihen

3.1.1 Definition [Reihe]

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen. So ist $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ die Reihe zur Folge (a_n).

3.1.2 Konvergenzkriterien

Cauchysches Konvergenz-Kriterium Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen. Die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert genau dann, wenn gilt:

Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $\left|\sum\limits_{k=m}^{n} a_k\right| < \varepsilon$ für alle $n \geq m \geq N$.

Bemerkung: Das Konvergenzverhalten einer Reihe ändert sich nicht, wenn man endlich viele Summanden abändert; nur die Summe ändert sich.

Leibniz'sches Konvergenz-Kriterium Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Folge nicht-negativer Zahlen mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Dann konvergiert die alternierende Reihe $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$.

Quotienten-Kriterium Sei $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ eine Reihe mit $a_n \neq 0$ für alle $n \geq n_0$. Es gebe eine reelle Zahl Θ mit $0 < \Theta < 1$, so dass $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq \Theta$ für alle $n \geq n_0$. Dann konvergiert die Reihe $\sum a_n$ absolut.

Majoranten-Kriterium Sei $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ eine konvergente Reihe mit lauter nicht-negativen Gliedern und $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $|a_n| \leq c_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ absolut.

3.1.3 Definition [absolute Konvergenz von Reihen]

Eine Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ heißt absolut konvergent, falls die Reihe der Absolutbeträge $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ konvergiert.

3.1.4 Definition [Umordnung von Reihen]

Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ eine Reihe, $\tau : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine bijektive Abbildung. Dann nennt man $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_{\tau(n)}$ eine Umordnung der Reihe.

3.1.5 Satz [Umordnungssatz]

Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ eine absolut konvergente Reihe. Dann kovergiert auch jede Umordnung dieser Reihe absolut und gegen denselben Grenzwert.

4 Prüfungsfragen

4.1 Was verstehen Sie unter Konvergenz in metrischen Räumen? Wann heißt ein metrischer Raum vollständig? Geben Sie Beispiele.

4.1.1 Topologie der Räume

topologischer Raum $\supset$ metrischer Raum $\supset$ normierter Raum $\supset$ Banachraum $\supset$ Prähilbertraum $\supset$ Hilbertraum

4.1.2 Definition [metrischer Raum]

Sei M eine Menge, $d : M \to [0, \infty)$ eine Abbildung, genannt Abstand, mit folgenden Axiomen:

(M1) $d(x, y) = d(y, x)$ (Symmetrie)
(M2) $d(x, y) = 0 \Rightarrow x = y$
(M3) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (Schwartz-Ungleichung / Dreiecksungleichung)

Beispiel für metrische Räume:
$(\mathbb{R}, d_p)$, $p \in [1, \infty)$, $d_p(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{d} |x_i - y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$:
d_1 Betragssummenmetrik
d_2 euklidische Metrik
$d_\infty := \max\limits_{i=1,\dots,d} |x_i - y_i|$

4.1.3 Definition [Konvergenz] (das Lied :o)

Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge im metrischen Raum M. Die Folge heißt konvergent gegen $x \in M$, falls gilt:
Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $|x_n - x| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$.

4.1.4 Definition [Vollständigkeit]

Ein metrischer Raum (M, d) heißt vollständig, g.d.w. jede Cauchy-Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset M$ in M konvergiert und somit einen Grenzwert in M besitzt.

4.1.5 Beispiele

$\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ sind vollständig
$\mathbb{Q}$ ist nicht vollständig

4.2 Erläutern Sie den Begriff der Stetigkeit. Was machen stetige Funktionen mit konvergenten Folgen bzw. kompakten Mengen?

Seien (M_1, d_1) und (M_2, d_2) zwei metrische Räume, $f : M_1 \to M_2$ eine Abbildung.

4.2.1 Definition [abgeschlossene Menge]

Eine Menge $M \subset \mathbb{C}$ heißt abgeschlossen, wenn es eine Zahl K gibt, so dass gilt: $|z| \leq K$ für alle $z \in M$

4.2.2 Satz [kompakte Menge]

Eine Menge $M \subset \mathbb{C}$ heißt kompakt, wenn sie abgeschlossen und beschränkt ist. Die Definition der kompakten Mengen erfolgt analog zur Definition der kompakten Räumen (vgl. 4.2.3, Seite 14).

4.2.3 Definition [kompakter Raum]

Ein Raum X heißt kompakt, wenn jede offene Überdeckung $X = \bigcup_{t \in I} u_t$ eine endliche Teilüberdeckung $X = u_{t_1} \cup u_{t_2} \cup \cdots \cup u_{t_n}$ besitzt.

Lemma (Bolzano-Weierstraß-Charakterisierung): Eine Teilmenge $M \subset \mathbb{C}$ ist genau dann kompakt, wenn jede Folge in M eine Teilfolge besitzt, die gegen einen Punkt in M konvergiert.

4.2.4 Definition [Stetigkeit von Funktionen]

Die Funktion f heißt stetig im Punkt $x_0 \in M_1$, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass $d\,(f(x) - f(x_0)) < \varepsilon$ für alle $x \in M_1$ mit $d\,(x - x_0) < \delta$.
f heißt stetig in M_1, wenn f in jedem Punkt von M_1 stetig ist.

Es gilt: $f(B_\delta(x_0)) \subset B_\varepsilon(f(x_0))$

4.2.5 Satz [stetige Funktionen und konvergente Folgen]

Ist f stetig in $x_0 \in M_1$ und ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset M_1$ eine Folge mit $x_n \to x_0$, dann gilt: $f(x_n) \to f(x_0)$.

4.2.6 Satz [stetige Funktionen und kompakte Mengen]

Ist f stetig und $K \subset M_1$ eine kompakte Menge, dann ist $f(K) \subset M_2$ ebenfalls kompakt und $f : K \to M_2$ ist gleichmäßig stetig.

4.3 Wann heißt eine Funktion $f : \mathbb{R} \supset D(f) \to \mathbb{R}$ (an einer Stelle) differenzierbar? Wie lassen sich Monotonieeigenschaften differenzierbarer Funktionen mit Hilfe der Ableitung ausdrücken?

Sei $D \subset \mathbb{R}$ eine Teilmenge von $\mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$ eine Abbildung.

4.3.1 Definition [Differenzierbarkeit]

Für eine Dimension: f heißt differenzierbar in x_0, wenn der Differentialquotient $f'(x_0) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ existiert.

Für mehrere Dimensionen: f heißt differenzierbar in x_0, wenn f linear, mit einem Fehler, der schneller als linear verschwindet, approximiert werden kann (vgl. 4.5.1, Seite 17):

$f(x) = f(x_0) + L(x - x_0) + \varphi(x, x_0)$ mit $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{\varphi(x,x_0)}{|x-x_0|} = 0$

Mit dem Differenzialquotienten lässt sich schließlich eine Tangente an den Graph von f an der Stelle x_0 beschreiben:

$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

4.3.2 Definition [Monotonie mittels Funktionswerte]

Sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ eine Abbildung, dann heißt f

monoton wachsend $:\Leftrightarrow x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$ für alle $x, y \in (a, b)$,
monoton fallend $:\Leftrightarrow x < y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$ für alle $x, y \in (a, b)$

4.3.3 Lemma [Monotonie mittels Ableitung]

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Abbildung, die differenzierbar bei $x_0 \in D$ ist, dann heißt f

monoton wachsend $:\Leftrightarrow f'(x_0) \geq 0$,
monoton fallend $:\Leftrightarrow f'(x_0) \leq 0$

4.4 Was besagt der Satz von Rolle? Skizzieren Sie den Beweis und geben Sie Anwendungen.

4.4.1 Satz [lokale Extrema und Differenzierbarkeit]

Die Funktion $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ besitze an der Stelle $x_0 \in (a, b)$ ein lokales Extremum und sei in x_0 differenzierbar. Dann ist $f'(x_0) = 0$

4.4.2 Satz [Satz von Rolle]

Sei $a < b$ und $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f(a) = f(b)$. Die Funktion f sei in (a, b) differenzierbar. Dann existiert ein $\zeta \in (a, b)$ mit $f'(\zeta) = 0$.

Der Satz von Rolle sagt insbesondere, dass zwischen zwei Nullstellen einer differenzierbaren Funktion eine Nullstelle der Ableitung liegt.

Beweis:

Falls f konstant ist, ist der Satz trivial. Ist f nicht konstant, so gibt es ein $x_0 \in (a, b)$ mit $f(x_0) > f(a)$ oder $f(x_0) < f(a)$. Dann wird das absolute Maximum bzw. Minimum der Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ in einem Punkt $\zeta \in (a, b)$ angenommen. Nach Satz 4.4.1 ist $f'(\zeta) = 0$, q.e.d.

4.4.3 Anwendung [Mittelwertsatz]

Sei $a < b$ und $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, die in (a,b) differenzierbar ist. Dann existiert ein $\zeta \in (a, b)$, so dass $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\zeta)$.

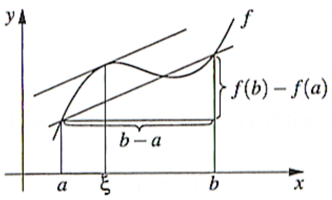

Abbildung 2: geometrische Deutung des Mittelwertsatzes

Geometrisch bedeutet der Mittelwertsatz, dass die Steigung der Sekante durch die Punkte $(a, f(a))$ und $(b, f(b))$ gleich der Steigung der Tangente an den Graphen von f an einer gewissen Zwischenstelle $(\zeta, f(\zeta))$ ist.

Durch Drehung und Verschiebung der Funktion, lässt sich diese den Vorraussetzungen des Satzes von Rolle anpassen und der Satz somit beweisen.

4.5 Wie ist die Ableitung einer Funktion $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ definiert? Welche Ableitungsregeln kennen Sie?

Sei $U \subset \mathbb{R}^m$ eine offene Menge, $f : U \to \mathbb{R}^n$ eine Abbildung, $x_0 \subset U$ ein Punkt in U.

4.5.1 Definition [Differenzierbarkeit in mehr Dimensionen (lineare Approximation)]

Die Funktion f ist in x_0 differenzierbar, g.d.w. ein $L \in \mathfrak{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ und eine Abbildung $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ existiert, so dass gilt:

$f(x) = f(x_0) + L(x - x_0) + \varphi(x)$ mit $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{\varphi(x)}{|x-x_0|} = 0$

Notation: $Df(x_0) := L$

Ist f differenzierbar in x_0, dann existieren die partiellen Ableitungen mit der dazugehörigen Jacobi-Matrix und es gilt:

$$Df(x_0) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0)\right)_{\substack{i=1\dots m\\ j=1\dots n}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x_0) & \dots \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x_0) & \dots \\ \vdots & \vdots & \end{pmatrix}$$

4.5.2 Definition [Gradient]

Sei $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ differenzierbar in x_0, dann heißt $Df(x_0)^{\mathrm{T}}$ der Gradient von f und es gilt:

$$Df(x_0)^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} \partial_1 f(x_0) \\ \vdots \\ \partial_m f(x_0) \end{pmatrix} =: \mathrm{Grad} f(x_0) = \nabla f(x_0)$$

4.5.3 Ableitungsregeln

Summenregel:

$D\left(\alpha f + \beta g\right) = \alpha Df + \beta Dg$

Produktregel:

Sei $U \subset \mathbb{R}^m$ eine offene Menge, $x_0 \in U$ ein Punkt, $f : U \to \mathbb{R}$ differenzierbar in x_0 eine Abbildung und $g : U \to \mathbb{R}^n$ differenzierbar in x_0 eine Abbildung, dann ist das Produkt (fg) ebenfalls differenzierbar in x_0 und es gilt:

$$D(fg)(x_0) = \underbrace{f(x_0)}_{\in\mathbb{R}}\underbrace{Dg(x_0)}_{\in\mathbb{R}^n} + \underbrace{Df(x_0)}_{\in\mathbb{R}}\underbrace{g(x_0)}_{\in\mathbb{R}^n}$$

Dies gilt analog für partielle Ableitungen $\partial_j(fg)(x_0)$

Kettenregel:

Seien $U \subset \mathbb{R}^m$ und $V \subset \mathbb{R}^n$ offene Mengen, $f : U \to \mathbb{R}^n$ differenzierbar in $x_0 \in U$ und $g : V \to \mathbb{R}^p$ differenzierbar in $f(x_0)$, dann ist $h : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$, $h := g \circ f$ ebenfalls differenzierbar in x_0 und es gilt:

$$Dh(x_0) = \underbrace{\underbrace{Dg(f(x_0))}_{\in\mathfrak{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^p)}\ \underbrace{Df(x_0)}_{\in\mathfrak{L}(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^n)}}_{\in\mathfrak{L}(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^p)}$$

4.6 Erläutern Sie die Begriffe richtungsstetig, partiell stetig, stetig bzw. Richtungsableitung, partielle Ableitung und Ableitung für Funktionen $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ und arbeiten Sie die Zusammenhänge heraus.

Sei $U \subset \mathbb{R}^m$ offen, $f : U \to \mathbb{R}^n$.

4.6.1 Definition [richtungsstetig]

f ist richtungsstetig $:\Leftrightarrow t \mapsto f(x_0 + t \cdot e)$ stetig mit $e \in U$ beliebig, $\|e\| = 1$.

4.6.2 Definition [partiell stetig]

f ist partiell stetig $:\Leftrightarrow f_i$, $i = 1...m$ stetig

4.6.3 Definition [stetig]

f ist stetig $:\Leftrightarrow f$ ist richtungsstetig $\forall e \in U$.

4.6.4 Definition [Richtungsableitung]

f besitzt Richtungsableitung $:\Leftrightarrow \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x_0+h\cdot e)-f(x_0)}{h}$ existiert.

$\Rightarrow \partial_e f(x_0) = (\nabla f(x_0)|e)$, f differenzierbar.

4.6.5 Definition [partiell differenzierbar]

f ist partiell differenzierbar $:\Leftrightarrow \partial_i f,\ i = 1...m$ existieren.

4.6.6 Definition [differenzierbar]

f ist differenzierbar $:\Leftrightarrow \exists L \in \mathfrak{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n), \varphi$ mit $f(x) = f(x_0) + L(x - x_0) + \varphi(x - x_0)$ mit $\frac{\varphi(x-x_0)}{|x-x_0|} \to 0$ für $x \to x_0$

4.6.7 Zusammenhänge

stetig $\Rightarrow$ richtungsstetig $\Rightarrow$ partiell stetig
differenzierbar $\Rightarrow$ Richtungsableitungen existieren $\Rightarrow$ partiell differenzierbar
stetig partiell differenzierbar $\Rightarrow$ differenzierbar
differenzierbar $\Rightarrow$ stetig

4.7 Welche hinreichenden und notwendigen Kriterien für Extremwertaufgaben kennen Sie? Was passiert bei Extremwertaufgaben mit Nebenbedingungen?

Sei $U \subset \mathbb{R}^m$ offen, $f : U \to \mathbb{R}$.

f hat bei x_0 ein (strenges) Maximum $:\Leftrightarrow$
notwendige Bedingung: $\nabla f(x_0) = 0$
hinreichende Bedingung: Hess $f(x_0)x|x) < 0$

Weiterhin gilt: Es existiert ein $\delta > 0$, so dass $|x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) \leq (<) f(x_0)$

4.7.1 Definition [Hyperfläche]

Eine Hyperfläche im $\mathbb{R}^m$ ist eine Menge der Form $M = \{x|g(x) = 0\}$, wobei $g \in C^1(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}), \nabla g(x) \neq 0$ für alle $x \in M$.
Beispiel: Hyperfläche: $g(\vec{x}) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} - 5$, Nebenbedingung: $f(\vec{x}) = 3x_1 + 4x_2 + 5x_3$

4.7.2 Extrema unter Nebenbedingungen

Sei $U \subset \mathbb{R}^m$ offen, $f, g : U \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, $i = 1...k$ (k = Anzahl der Nebenbedingungen), $M_i = \{x \in U|g_i(x) = 0\}, M := \bigcap\limits_{i=1}^{k} M_i, p \in M, \{\nabla g_i(x), i = 1...k\}$
Dann gilt: f lokales Extremum in $p \Leftrightarrow \nabla f(p) \in \{\nabla g_i(p)|i = 1...k\}$, d.h. es existieren $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ mit: $\nabla f(p) = \sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i \nabla g_i(p)$
Für nur eine Nebenbedingung kann man folgende Veranschaulichung treffen: Der Gradient

von f und der Gradient von g an der Stelle p (also $\nabla f(p)$ und $\lambda \nabla g(p)$) müssen parallel sein.

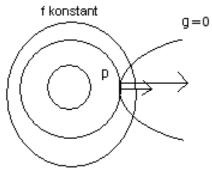

Abbildung 3: Lokale Extrema unter Nebenbedingungen

4.8 Erläutern Sie den Begriff des Riemann-Integrals. Was besagt die eindimensionale Substitutionsregel? Geben Sie Beispiele.

4.8.1 Definition [Treppenfunktion]

$\varphi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ heißt Treppenfunktion, falls $\varphi(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i \chi_{I_i}$ mit $\chi_I = 1$, falls $x \in I$, 0 sonst.
$T(\mathbb{R}^m)$ ist die Menge der Treppenfunktionen über $\mathbb{R}^m$.

4.8.2 Definition [Riemann-Integral]

Sei M beschränkt, $f : M \to \mathbb{R}$ beschränkt.

Für das Oberintegral gilt: $\overline{\int} f(x)dx = inf \left\{ \int\limits_a^b \varphi(x)dx | \varphi \in T[a,b], \varphi \geq f \right\}$
Für das Unterintegral gilt: $\underline{\int} f(x)dx = sup \left\{ \int\limits_a^b \varphi(x)dx | \varphi \in T[a,b], \varphi \leq f \right\}$
f ist riemannintegrierbar $\Leftrightarrow \overline{\int} = \underline{\int} = \int$.

4.8.3 1-dimensionale Substitutionsregel

Sei $f : I \to \mathbb{R}$ stetig, $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, $\varphi[a,b] \subset I$.
$\Rightarrow \int\limits_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int\limits_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx$

Beispiel: $\int\limits_0^1 \sqrt{1-x^2}dx$. Substitution $x = sin(t) \Leftrightarrow t = \arcsin(x) \Rightarrow dx = cos(t)dt$
$\Rightarrow \int\limits_0^1 \sqrt{1-x^2}dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2(t)}\cos(t)dt = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t)dt = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos(2t)}{2}dt$

4.9 Erklären Sie die Begriffe punktweise und gleichmäßige Konvergenz von Funktionenfolgen. Was gilt für den gleichmäßigen Grenzwert stetiger Funktionen? Unter welchen Bedingungen sind Vertauschungen von Integral und Grenzwertbildung zulässig?

Sei M eine Menge, (Y, d_y) metrischer Raum, $f_n : M \to Y, n \in \mathbb{N}, f : M \to Y$.

4.9.1 Definition [punktweise Konvergenz]

$f_n \to f$ konvergiert punktweise $\Leftrightarrow \forall x \in M : \forall \epsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}; \forall n \geq n_0 : d_y(f_n(x), f(x)) \leq \epsilon$.
Sprich: $n_0 = n_0(x, \epsilon)$

4.9.2 Definition [gleichmäßige Konvergenz]

$f_n \to f$ konvergiert gleichmäßig $\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $\forall n \geq n_0; \forall x \in M : d_y(f_n(x), f(x)) \leq \epsilon$.
Sprich: $n_0 = n_0(\epsilon) \neq n_0(x)$

Konvergiert eine Funktionenfolge gleichmäßig, so konvergiert sie auch punktweise.

4.9.3 gleichmäßiger Grenzwert stetiger Folgen

Sei $I \subset \mathbb{R}$ Intervall, $f_n : I \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar für alle $n \in \mathbb{N}$. Seien $f, g : I \to \mathbb{R}$ mit $f_n \to f$ punktweise und $f'_n \to g$ gleichmäßig konvergent.
Dann gilt: ist f stetig differenzierbar und $f' = g : \lim\limits_{n\to\infty} f'_n = (\lim\limits_{n\to\infty} f_n)' = g$.

4.9.4 Vertauschungssatz Grenzwertbildung - Integration

Sei $a < b$, $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar. Dann gilt: $f_n \to f$ gleichmäßig $\Rightarrow \int\limits_a^b \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)dx \to \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_a^b f_n(x)dx$.

4.10 Was ist eine Potenzreihe? Welche Eigenschaften von Potenzreihen (z.B. bezüglich Konvergenz, Differentation) kennen Sie? Geben Sie ein Beispiel.

4.10.1 Definition [Potenzreihe und Konvergenzradius]

Sei $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge in $\mathbb{C}$, $a \in \mathbb{C}$, $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ eine Potenzreihe, die für ein $z_1 \in \mathbb{C}, z_1 \neq a$ konvergiert. Sei $r \in \mathbb{R}, 0 < r < |z_1 - a|$: $K(a,r) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-a| \leq r\}$.

Dann konvergiert die Potenzreihe absolut und gleichmäßig auf $K(a,r)$. Ebenso konvergiert $g(z) = f'(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} nc_n(z-a)^{n-1}$ absolut und gleichmäßig.

Beispiel: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}z^n = \exp(z)$.

Eigenschaften: Vertauschung: Limesbildung $\leftrightarrow$ Differentation $\leftrightarrow$ Integration

Die größte Zahl $r > 0$, für die die Potenzreihe noch konvergiert, heißt Konvergenzradius.

4.10.2 Satz [Satz von Taylor]

Sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine N-mal stetig differenzierbare Funktion und $x_0 \in I$. Dann gilt für alle $x \in I$

$f(x) = \sum\limits_{n=0}^{N-1} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_N(x_0, x)$

mit $R_N(x_0, x) = \frac{1}{n!} \int\limits_{x_0}^{x} (x-t)^{N-1} f^{(N-1)}(t)dt$

Bemerkung: Der Satz von Taylor macht im Überwiegenden Aussagen über das Restglied R_N!

4.11 Was wissen Sie über Kurvenintegrale? Gehen Sie insbesondere auf Wegunabhängigkeit ein und vergleichen Sie mit der eindimensionalen Situation.

Sei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar.

4.11.1 Definition [Kurvenintegral 1. Art]

Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist $\int\limits_a^b f(\gamma(t))|\gamma'(t)|dt$ das Kurvenintegral 1. Art.

4.11.2 Definition [Kurvenintegral 2. Art - Arbeitsintegral]

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $F : U \to \mathbb{R}^n$, $\gamma[a, b] \to \mathbb{R}^n$ stückweise stetig differenzierbar. Dann ist $\int\limits_a^b (F(\gamma(t))|\gamma'(t))dt = \int\limits_\gamma F(x)dx$.

4.11.3 Zusammenhänge - Wegunabhängigkeit, Gradientenfeld, Konservativität

F heißt konservativ $\Leftrightarrow \int\limits_\gamma F(x)dx = 0$.
Existiert $V : U \to \mathbb{R}, V \in C^1, \nabla V = F$, dann heißt F Gradientenfeld.
F konservativ $\Leftrightarrow$ F Gradientenfeld
Beweisidee:
Rückrichtung: $\int\limits_\gamma F(x)dx = \int\limits_a^b (\nabla V(\gamma(t))|\gamma'(t))dt = \int\limits_a^b V(\gamma(t))'dt = V(\gamma(b)) - V(\gamma(a))$.
Hinrichtung: Polygonzüge

4.12 Was ist ein Wahrscheinlichkeitsraum? Geben Sie Beispiele.

4.12.1 Definition [Wahrscheinlichkeitsraum]

Ein Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, F, P) besteht aus einer Menge Ω, einer σ-Algebra $F \subset P(\Omega) = \{A|A \subset \Omega\}$ und einem Wahrscheinlichkeitsmaß $P : F \to [0, 1]$.
Dabei hat eine σ-Algebra folgende Eigenschaften:

1. $\Omega \in F$
2. $A \in F \to A^{\mathrm{C}} := \Omega \setminus A \in F$
3. $A_1, A_2, .. \in F \Rightarrow \bigcup\limits_{i=1} A_i \in F$

Und ein Wahrscheinlichkeitsmaß $P : F \to [0, 1]$:

1. $P(\Omega) = 1$
2. $A_1, A_2, \ldots$ paarweise disjunkt $\Rightarrow P(\bigcup\limits_{i=1} A_i) = \sum\limits_{i=1} P(A_i)$

4.12.2 Beispiele

1. diskreter Wahrscheinlichkeitsraum: Ω endlich, $F = P(\Omega)$.
   z.B. Gleichverteilung: $|\Omega| = N, P(A) = \frac{\#A}{N}$. (z.B. zwei mal Würfeln: $\Omega = \{1, 2, ..., 6\}^2$, $P(\{\omega\}) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$ $(\omega \in \Omega)$)
2. Binomialverteilung:

   Ziehen mit Zurücklegen von j roten Kugeln aus einer Urne mit Rotanteil p:

   $P(x = j) = (\begin{matrix} n \\ j \end{matrix}) p^j (1-p)^{n-j}$

   $x \cong$ Anzahl gezogener roter Kugeln nach n-mal ziehen

4.13 Formulieren Sie den Satz von Gauß und erklären Sie die darin benutzen Konzepte. Kennen Sie Anwendungen?

4.13.1 Definition [glatter Rand]

Sei $A \subset \mathbb{R}^m$ glatter Rand $\Leftrightarrow \forall x \in \partial\Omega$ existiert eine offene Umgebung $U \subset \mathbb{R}^m$ und eine stetige differenzierbare Funktion $\Psi : U \to \mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften:

1. $A \cap U = \{x \in U : \ \Psi(x) \leq 0\}$
2. grad $\Psi(x) = 0 \ \forall \ x \in U$

In Worten: Der Rand ist lokal als Graph darstellbar.

4.13.2 Satz [Satz von Gauß]

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ offen, beschränkt, mit glattem Rand, $\overline{\Omega} \subset U, F : U \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbares Vektorfeld.
$\Rightarrow \int\limits_{\Omega}$ div $F(x)dx = \int\limits_{\overline{\Omega}} (F(y)|n(y))d\sigma(y)$

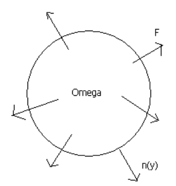

Abbildung 4: Satz von Gauß

Dabei ist:

1. div $F(x) = \nabla \bullet F(x) = \sum_{i=1}^{d} \partial_i F_i$
2. $n(y)$ der äußere Einheitsnormalenvektor
3. $\overline{\Omega}$ der Abschluss von Ω ($\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$)
4. $\partial\Omega$ der Rand von Ω

4.13.3 Anwendungen

Gaußsche Flächen, 'was strömt durch eine Fläche hindurch $\Rightarrow$ was im Innern entsteht, muss über den Rand abfließen' (inkompressible Flüssigkeiten), ...

4.13.4 Satz von Stokes

Der Satz von Stokes ist eine Verallgemeinerung des Satzes von Gauß.

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ eine offene, beschränkte Menge mit glattem Rand, $f \in C(\overline{\Omega}) \cap C^1(\Omega)$ eine auf Ω stetig differenzierbare und auf dem Rand stetige Abbildung, dann gilt:

$\int_\Omega \nabla f(x)\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} f(y)n(y)\mathrm{d}\sigma(y)$

Der Satz von Stokes ist somit auf skalare Funktionen und Vektorfelder anwendbar.

4.14 Wie lautet der Satz über implizite Funktionen? Erläutern Sie die Aussage anhand eines Bildes.

4.14.1 Satz [Satz über implizite Funktionen]

Sei $U \subset \mathbb{R}^n, V \subset \mathbb{R}^m$ offen, $g : U \times V \to \mathbb{R}^m$ stetig differenzierbar. Ist $g(x_0, y_0) = 0$ und $D_y g(x_0, y_0)$ invertierbar, so gibt es $\alpha > 0, \beta > 0$ und eine stetig differenzierbare Abbildung $f : U_\alpha(x_0) \to V_\beta(y_0)$ mit $\{\ (x, y) \in U_\alpha(x_0) \times V_\beta(y_0) \mid g(x, y) = 0\ \} = \{\ (x, f(x)) \mid x \in U_\alpha(x_0)\ \}$ und es gilt:

$Df(x_0) = -[D_y g(x_0, y_0)]^{-1} D_x g(x_0, y_0)$.

In Worten: Die implizite Funktion kann lokal als explizite Funktion dargestellt werden.

4.14.2 Beispiel

implizite Funktion: $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$
explizite Funktion: $f(x) = y = \pm\sqrt{1 - x^2}$
Problem bei der Auflösung: + oder - kann gewählt werden.
Anwendung des Satzes: $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1 \rightarrow \frac{\partial g(x,y)}{\partial y} = 2y$. Diese Zahl ist für alle $y \neq 0$ invertierbar. Somit ist für alle $y \neq 0$ diese Gleichung nach y auflösbar. Also sind $x = 1$ und $x = -1$ die Problempunkte.

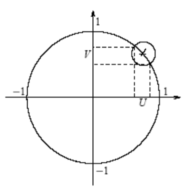

Abbildung 5: Satz über implizite Funktionen

4.15 Was wissen Sie über die Invertierbarkeit differenzierbarer Funktionen in einer und zwei Dimensionen?

4.15.1 Invertierbarkeit in einer Dimension

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, streng monoton. Sei $J := f(I), x \in I, f$ in x differenzierbar, $f'(x) \neq 0$, $g = f^{-1} : J \rightarrow I$.
$\Rightarrow g$ in $y := f(x)$ differenzierbar und $g'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(g(y))}$.

4.15.2 Invertierbarkeit in zwei Dimensionen - Der Satz über lokale Invertierbarkeit

Sei $U \subset \mathbb{R}^m$ offen, $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ stetig differenzierbar, $x_0 \in U$. Ist $Df(x_0) \in GL(\mathbb{R}^m)$ (GL $\cong$ Menge aller invertierbarer Matrizen), so gibt es Umgebungen U_0 von x_0 und V_0 von $f(x_0) = y_0$ mit:

1. $f : U_0 \rightarrow V_0$ bijektiv, lokal invertierbar
2. $f^{-1} : V_0 \rightarrow U_0$ stetig differenzierbar
3. $(Df^{-1})(f(x)) = [Df(x)]^{-1}$

4.16 Was wissen Sie über die Existenz von Lösungen zu gewöhnlichen Differentialgleichungen?

4.16.1 Satz [Satz von Peano]

Sei $W \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$ offen, $f : W \to \mathbb{R}^N$ stetig, $(t_0, x_0) \in W$.
$\Rightarrow$ $\exists \alpha, \beta > 0$ und eine Lösung $\Phi : [t_0 - \alpha, t_0 + \beta] \to \mathbb{R}^N$ des Anfangswertproblemes $\dot{x} = f(t, x), x(t_0) = x_0$

4.16.2 Maximale Lösung

Eine Lösung $\Phi : I \to \mathbb{R}^N$ ist maximal $\Leftrightarrow$ Es gibt keine Fortsetzung von Φ.
$\Psi : J \to \mathbb{R}^N$ ist Fortsetzung von $\Phi : I \to \mathbb{R}^N \Leftrightarrow J \supset I, \Psi|_I = \Phi$

4.16.3 Lösungen auf Kompakta

Im Setting des Satzes von Peano hat AWP mindestens eine maximale Lösung $\Phi : I \to \mathbb{R}^N$.
Für jede dieser Lösungen gilt:

1. I offen
2. Jedes $K \subset W$ kompakt wird verlassen

Falls I endlich ist, explodiert die Lösung am Rand des endlichen Intervalls I.

4.17 Was wissen Sie über die Eindeutigkeit von Lösungen gewöhnlicher Differentialgleichungen?

4.17.1 Definition [Lipschitz-Stetigkeit]

Seien V und W normierte Räume mit den Normen $|\cdot|_V$ bzw. $|\cdot|_W$ (man denke zum Beispiel an $V = \mathbb{R}^n$ und $W = \mathbb{R}^m$ jeweils ausgestattet mit der euklidischen Norm). Außerdem sei $G \subset V$.

Eine Funktion $f : G \to W$ erfüllt in einer Menge $M \subseteq G$ die Lipschitz-Bedingung, wenn es eine (nichtnegative) reelle Zahl L gibt, mit der die Bedingung

$\forall x_1, x_2 \in M : \|f(x_1) - f(x_2)\|_W \leq L \cdot \|x_1 - x_2\|_V$

erfüllt ist.

Beispiel:

$\dot{x}(t) = A(t)x + b(t) = f(t,x)$
$\Rightarrow |f(t_1,x_1) - f(t_2,x_2)| = |A(t)(x_1 - x_2)| \leq ||A(t)|||x_1 - x_2|$ (da $A(t)$ stetig und beschränkt (vgl. Matrixnorm))

4.17.2 Satz [Satz von Picard-Lindelöf]

Sei $W \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$ offen, $f : W \to \mathbb{R}^N$ stetig mit lokaler Lipschitzbedingung.
$\Rightarrow$ AWP $\dot{x} = f(t,x), x(t_0) = x_0$ hat lokal eine eindeutige Lösung.

4.18 Was sind lineare Differentialgleichungen, und wie löst man sie?

4.18.1 Definition [lineare Differentialgleichungen]

Sei $I \subset \mathbb{R}$ Intervall, $A : I \to \mathbb{R}^{N \times N}$.
$\dot{x} = A(t)x$ heißt lineare homogene Differentialgleichungen 1. Ordnung.

Sei zusätzlich $b : I \to \mathbb{R}^N$ stetig, so heißt
$\dot{x} = A(t)x + b(t)$ inhomogene lineare Differentialgleichung 1. Ordnung.

4.18.2 Definition [Lösungs-Fundamentalsystem]

Sei $I \subset \mathbb{R}$ Intervall, $A : I \to \mathbb{R}^{N \times N}$ stetig.

Unter einem Lösungs-Fundamentalsystem der homogenen Differentialgleichung $\dot{x} = A(t)x$ versteht man eine Basis $(\varphi_1, \ldots, \varphi_k, \ldots, \varphi_N)$ des Vektorraumes ihrer Lösungen.

4.18.3 Defintion [Fundamentalmatrix]

Sei $(\varphi_k)_{k=1,\ldots,N}$ ein Lösungs-Fundamentalsystem der homogenen Differentialgleichung $\dot{x} = A(t)x$ und schreibt man dieses als Spaltenvektoren

$$\varphi_k = \begin{pmatrix} \varphi_{1k} \\ \varphi_{2k} \\ \vdots \\ \varphi_{Nk} \end{pmatrix}$$

so ist $\Phi := (\varphi_1, \ldots, \varphi_k, \ldots, \varphi_N)$ eine $N \times N$-Matrix

$$\Phi = \begin{pmatrix} \varphi_{11} & \dots & \varphi_{1k} & \dots & \varphi_{1N} \\ \vdots & & \vdots & & \\ \varphi_{N1} & \dots & \varphi_{Nk} & \dots & \varphi_{NN} \end{pmatrix}$$

und heißt Lösungs-Fundamentalmatrix. Die Lösungen φ_k, $k = 1, \dots, N$ sind genau dann linear unabhängig, wenn für die Matrix Φ gilt:

$\det \Phi(x_0) \neq 0$

für wenigstens ein $x_0 \in I$

4.18.4 allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung

Sei $\Phi = (\varphi_1, \dots, \varphi_k, \dots, \varphi_N)$ ein Lösungsfundamentalsystem der homogenen Differentialgleichung $\dot{x} = A(t)x$, so lässt sich eine allgemeine Lösung $\varphi_{\text{allg.,homogen}}$ der homogenen Differentialgleichung als Linearkombination der Basislösungen φ_k schreiben:

$\varphi_{\text{allg.,homogen}}(t) = c_1\varphi_1(t) + \dots + c_k\varphi_k(t) + \dots + c_N\varphi_N(t)$

mit den Konstanten $c_k \in \mathbb{R}^N$.

In Matrixschreibweise gilt schließlich mit den Anfangspunkten $t_0 \in \mathbb{R}$ und $x_0 \in \mathbb{R}^N$:

$\varphi_{\text{allg.,homogen}}(t) = \Phi(t)\Phi(t_0)^{-1}x_0$

4.18.5 allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung

Man erhält die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung als Summe einer einzelnen speziellen Lösung der inhomogenen Differentialgleichung und der allgemeinen Lösung der homogenen Gleichung:

$\varphi_{\text{allg.}}(t) = \varphi_{\text{allg.,homogen}}(t) + \Psi_{\text{spez.,inhomogen}}(t)$

Eine solche einzelne spezielle Lösung Ψ der inhomogenen Differentialgleichung kann man sich durch die Methode der Variation der Konstanten beschaffen.

4.18.6 Variation der Konstanten

Eine Lösung $\Psi : I \to \mathbb{R}^N$ der inhomogenen Differentialgleichung erhält man mit dem Ansatz

$\Psi(t) = \Phi(t)u(t)$

Dabei ist $u : I \to \mathbb{R}^N$ eine differenzierbare Funktion mit $\Phi(t)\dot{u}(t) = b(t)$, d.h.

$u(t) = \int\limits_{t_0}^{t} \Phi(s)^{-1} b(s) \mathrm{d}s + \text{const.}$

Somit gilt für die allgemeine Lösung $\varphi_{\text{allg.}}(t)$ für die inhomogene Differentialgleichung 1. Ordnung:

$\varphi_{\text{allg.}}(t) = \varphi_{\text{allg.,homogen}}(t) + \Psi_{\text{spez.,inhomogen}}(t) = \Phi(t)\Phi(t_0)^{-1}x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} \Phi(t)\Phi(s)^{-1}b(s)\mathrm{d}s$

4.19 Wie erhält man bei linearen Differentialgleichungssystemen mit konstanten Koeffizienten aus Eigenwerten und linear unabhängigen Eigenvektoren der Koeffizientenmatrix linear unabhängige Lösungen?

Seien $c \in \mathbb{K}$, $A \in \mathbb{K}^{N \times N}$, $y' = Ay$ eine homogene lineare Differentialgleichung 1. Ordnung, λ_i die Eigenwerte von A, dann gilt der Ansatz:

$y_i = ce^{\lambda_i x}$

4.19.1 Satz [Eigenwerte und Eigenvektoren]

Sei $A \in K^{N \times N}, \lambda_1, \ldots, \lambda_k$ Eigenwerte mit linear unabhängigen Eigenvektoren $c_1, \ldots, c_k$ $\Rightarrow \varphi_j(t) = e^{\lambda_j t} c_j$, $j = 1 \ldots k$ sind linear unabhängige Lösungen von $y' = Ay$.

4.19.2 Vorgehensweise

1. Bestimmen der Eigenwerte von A: $\det(A - \lambda I) = 0$ (Nullstellen des charakteristischen Polynoms).
2. Aufstellen der Lösungsbasis: $\varphi_j = e^{\lambda_j t}$, bzw. für entartete Nullstellen: $\varphi_{j,k} = x^k e^{\lambda_j t}$, wobei die j-te Nullstelle k-fach entartet ist.
3. Aufstellen des Fundamentalsystems (siehe oben).
4. Unter Umständen eine inhomogene Lösung suchen und Gesamtlösung aufstellen.

4.20 Erläutern Sie die Vorgehensweise bei der Lösung (inhomogener) linearer Differentialgleichungen n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Geben Sie Beispiele.

Man betrachte folgende Differentialgleichungen:

$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + ... + a_0 y = 0$ (homogene Differentialgleichung)
$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + ... + a_0 y = b(x)$ (inhomogene Differentialgleichung)

4.20.1 Lösung der homogenen Differentialgleichung

1. Nullstellen des charakteristischen Polynoms

   $p(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + ... + a_0$

   bestimmen.

2. Für $p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{k_1} \cdot ... \cdot (\lambda - \lambda_r)^{k_r}$ mit r Anzahl verschiedener Nullstellen mit Vielfachheiten k_1 bis k_r hat die homogene Differentialgleichung folgende Lösungsbasis:

   $\varphi_{j,m} = x^m e^{\lambda_j x}$, $\left({}^{j=1,...,r}_{m=0,...,k_j-1} \right)$

3. Die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung ergibt sich schließlich als Linearkombination der Lösungsbasis:

   $y_{\text{allg, homogen}} = \sum_{j,m} c_{j,m}\varphi_{j,m}$

4.20.2 spezielle Lösung der inhomogenen Differentialgleichung

Diese kann bestimmt werden durch:

- Variation der Konstanten durch Zurückführung auf Differentialgleichungen 1. Ordnung

  $y_{\text{spez, inhomogen}}(x) = \sum_{j,m} c_{j,m}(x)\varphi_{j,m}(x)$

- geeigneten Ansatz wählen, der an $b(x)$ angepasst ist

4.20.3 Beispiele

Federschwinger, gedämpfter Schwinger, freier Fall

4.21 Was ist ein Hilbertraum? Illustrieren Sie die Definition mit Beispielen.

4.21.1 Definition [Skalarprodukt]

Sei V ein Vektorraum über dem Körper K der reellen oder komplexen Zahlen. Ein Skalarprodukt ist eine Abbildung der Form

$(\cdot|\cdot) : V \times V \to K$

falls folgende Bedingungen für $x, y, z \in V$ und $a \in K$ erfüllt sind:

(S1) $(x|x) \geq 0$ (positiv), $(x|x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (definit)
(S2) $(ax|y) = a(x|y)$ (skalarfaktorlinear)
(S3) $(x + y|z) = (x|z) + (y|z)$ (vektorlinear)
(S4) $(x|y) = \overline{(y, x)}$ (hermitesch)

4.21.2 Definition [Prähilbertraum]

Ein Prähilbertraum ist ein normierter Vektorraum H mit einem Skalarprodukt $(\cdot|\cdot)$. Die Abbildung $\|\cdot\| \to [0, \infty)$, genannt Norm, mit folgenden Eigenschaften:

(N1) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
(N2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$
(N3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

ist in ihm wie folgt definiert:

$\|x\| = \sqrt{(x|x)}$

Mit einer solchen Norm und einem Skalarprodukt ist ein Prähilbertraum automatisch ein unitärer Raum. Ein solcher Raum hat folgende bemerkenswerte Eigenschaften:

1. Orthogonalität

   $x \perp y :\Rightarrow (x|y) = 0$

2. Dreiecksungleichung

   $\|x + y\|^2 \leq (\|x\| + \|y\|)^2$

3. Cauchy-Schwarz-Ungleichung

   $|(x|y)| \leq \sqrt{(x|x)}\sqrt{(y|y)}$

4. Parallelogrammgleichung

   In der Klasse aller normierten Räume charakterisiert sie die unitären Räume.

   $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)$

4.21.3 Definition [Hilbertraum]

Ein unitärer Raum (Prähilbertraum) heißt Hilbertraum, falls dieser vollständig ist.

4.21.4 Beispiele

- $(\mathbb{R}^d, (\cdot|\cdot))$ ist Hilbertraum mit dem Skalarprodukt und der euklidischen Norm $\|\cdot\|_2$.
- Sei $l_2(\mathbb{N}) := \left\{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset K | \sum_{i\in\mathbb{N}} |x_i|^2 < \infty\right\}$, dann ist $(l_2(\mathbb{N}), (\cdot|\cdot))$ ein Hilbertraum mit dem Skalarprodukt $(x|y) := \sum_{i=1}^{\infty} x_i \overline{y_i}$
- Sei $L^2[0,2\pi] := \left\{f : [0,2\pi] \to \mathbb{C} | \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 \,\mathrm{d}x < \infty\right\}$ die Menge der quadratintegrierbaren Funktionen, dann ist $(L_2[0,2\pi], (\cdot|\cdot))$ ein Hilbertraum mit dem Skalarprodukt $(f|g) := \underbrace{\int_0^{2\pi} f(x)\overline{g(x)}\mathrm{d}x}_{\text{Lebesque-Integral}}$.

4.22 Wie ist die Fouriertransformation definiert? Was sind wichtige Eigenschaften der Fouriertransformation?

4.22.1 Definition [Fouriertransformation]

Sei $f \in L^1[0,2\pi]$ eine periodische, über das Intervall $[0,2\pi]$ integrierbare Funktion, dann ist f darstellbar als

$f(x) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e^{inx}$

Die Koeffizienten a_n heißen dabei Fourierkoeffizienten von f und die Reihe $\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e^{inx}$ heißt Fourierreihe von f.

Die Fourierkoeffizienten a_n sind dabei gegeben durch:

$a_n := \widehat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} \mathrm{d}x$, für $n \in \mathbb{Z}$

Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ heißt Fouriertransformierte $\mathfrak{F}f$.

4.22.2 Eigenschaften der Fouriertransformation

- $\mathfrak{F}f$ ist linear und beschränkt.
- Die Fouriertransformation überführt die Differentation in die Multiplikation über. Sei dazu $f \in C^1[0,2\pi]$, $f(0) = f(2\pi)$, dann gilt: $\widehat{f'}(n) = in\widehat{f}(k)$

4.23 Erläutern Sie Unterschiede und Gemeinsamkeiten zwischen reell und komplex differenzierbaren Funktionen

Sei $U \subset \mathbb{C}$ eine offene Teilmenge, $f : U \to \mathbb{C}$ eine komplexwertige Abbildung, $z_0 \in U$.

4.23.1 Definition [komplex differenzierbare Abbildung]

Die Abbildung f ist in z_0 komplex differenzierbar, wenn ihr Differentialquotient bei z_0 existiert:

$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$

Zudem kann f auch als Funktion zweier reeller Variablen aufgefasst werden:

$f(x+iy) = \underbrace{u(x,y)}_{\Re f} + i \underbrace{v(x,y)}_{\Im f}$

Ist f wie oben in $z_0 := x_0 + iy_0$ komplex differenzierbar, dann existieren die partiellen Ableitungen von u und v in (x_0, y_0) und es gilt:

$\partial_x u(x_0, y_0) = \partial_y v(x_0, y_0)$
$\partial_y u(x_0, y_0) = \partial_x v(x_0, y_0)$

Umgekehrt: Ist $f : U \to \mathbb{R}^2$ total differenzierbar und es existieren die partiellen Ableitungen, dann ist f komplex differenzierbar.

(vgl. auch Satz von Morera (2.5, Seite 10))

4.23.2 Definition [holomorphe Abbildung]

Man nennt f holomorph auf U, g.d.w. f in allen Punkten $z_0 \in U$ differenzierbar ist. Man schreibt $f \in \mathfrak{H}(U)$

4.23.3 Gemeinsamkeiten von komplexen und reellen differenzierbaren Funktionen

- Definition über Differentialquotient
- Ableitungsregeln (Summen-, Produkten-, Quotienten- und Kettenregel)
- linear approximierbar

  $f(z) = f(z_0) + L(z - z_0) + o(\varphi)$, $(L := f'(z_0))$

4.23.4 Unterschiede von komplexen und reellen differenzierbaren Funktionen

- Es gibt verschiedene Wege, die $z \to z_0$ realisieren

  Der Begriff komplexdifferenzierbar stellt demzufolge wesentlich schärfere Bedingungen mit noch größeren Auswirkungen dar. Zum Beispiel:

  Sei $f \in \mathfrak{H}(U)$, $z_0 \in U$, $R > 0$ so dass $U_R(z_0) \subset U$, dann ist f analytisch, d.h. f ist lokal als Potenzreihe entwickelbar und somit unendlich oft differenzierbar. Der Konvergenzradius ist dann mindestens R.

  Außerdem gelten der Identitätssatz (vgl. 2.4 S.10) und der Cauchy'sche Integralsatz (vgl. 4.24.3 S.35).

4.24 Wie lautet der Cauchysche Integralsatz? Was besagen die Cauchyschen Integralformeln?

4.24.1 Definition [homotrop]

Sei $U \subset \mathbb{C}$, $\gamma_0, \gamma_1 : [0,1] \to U$ geschlossene Kurven in U. γ_0 ist homotrop zu γ_1 ($\gamma_0\ {}_{\mathrm{h}}\gamma_1$) wenn es eine (Homotopie) stetige Abbildung $\Gamma : [0,1] \times [0,1] \to U$ gibt mit folgenden Eigenschaften:

$\Gamma(t, 0) = \Gamma_0(t)$, $t \in [0,1]$,
$\Gamma(t, 1) = \Gamma_1(t)$, $t \in [0,1]$

Γ deformiert γ_0 zu γ_1

4.24.2 Definition [nullhomotrop]

Ein stückweise stetig differenzierbarer Weg γ heißt nullhomotrop in U, wenn er zu einem konstanten Weg homotrop ist. Man schreibt kurz: $\gamma \sim_{\mathrm{h}} 0$

4.24.3 Definition [Cauchyscher Integralsatz (1. Version)]

Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $\gamma_0 \sim_{\mathrm{h}} \gamma_1$ geschlossene stückweise differenzierbare Kurven in U, $f \in \mathfrak{H}(U)$, dann gilt:

$\int_{\gamma_0} f(z) \mathrm{d}z = \int_{\gamma_1} f(z) \mathrm{d}z$

4.24.4 Definition [Cauchyscher Integralsatz (2. Version)]

Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $\gamma_0 \sim_{\mathrm{h}} 0$ geschlossene stückweise differenzierbare Kurve in U, $f \in \mathfrak{H}(U)$, dann gilt:

$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = 0$

Idee: Ist $\gamma_0 \sim_{\mathrm{h}} 0$, dann umläuft γ kein Loch von U.

4.24.5 Definition [Cauchyscher Integralsatz (3. Version)]

Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und einfach zusammenhängend, γ geschlossene Kurve, $f \in \mathfrak{H}(U)$, dann gilt:

$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = 0$

4.24.6 Satz [Cauchysche Integralformel]

Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $f \in \mathfrak{H}(U)$, γ stückweise glatte nullhomotrope Kurve, dann gilt:

$n(\gamma, z_0) \cdot f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z-z_0}\mathrm{d}z$

Für die Ableitung von f gilt schließlich:

$n(\gamma, z_0) \cdot f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}z$

4.25 Was wissen Sie über die Entwickelbarkeit komplexer Funktionen in Laurentreihen?

4.25.1 Definition [isolierte Singularität einer Funktion]

Eine Funktion f hat eine isolierte Singularität bei z_0, wenn es $R > 0$ so gibt, dass f auf $U_R(z_0)\backslash\{z_0\}$ holomorph ist.

4.25.2 Definition [Klassifikation von Singularitäten]

Sei $U \subset \mathbb{C} \backslash \{z_0\}$, $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph mit isolierter Singularität bei z_0.

hebbar

Die isolierter Singularität bei z_0 heißt hebbar, wenn f auf $U_R(z_0)$ fortsetzbar ist.

Pol

Die isolierter Singularität bei z_0 heißt Pol, wenn sie nicht hebbar ist, es aber ein $m \in \mathbb{N}$ gibt, so dass die Funktion f darstellbar ist als:

$f(z) = \frac{g(z)}{(z-z_0)^m}$

mit $g(z) \in \mathfrak{H}(U)$. Ferner gilt für f:

$|f(z)| \to \infty$ für $z \to z_0$

wesentliche Singularität

Die isolierter Singularität bei z_0 heißt wesentlich, falls sie weder hebbar noch ein Pol ist.

4.25.3 Definition [Laurentreihe]

Sei $0 \leq r < R$, $z_0 \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{Z}$, $(a_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ eine Folge in $\mathbb{C}$, genannt Laurentkoeffizienten.

Reihen der Form $\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$ heißen Laurentreihen. Sie konvergieren auf $U_{r,R}(z_0)$ (möglicherweise $\oslash$) und stellen dort holomorphe Funktionen dar.

4.25.4 Definition [Laurententwicklung einer Funktion]

Sei $0 \leq r < R$, $f \in \mathfrak{H}(U_{r,R}(z_0))$, für $\varrho \in (r, R)$, $k \in \mathbb{Z}$. Setze

$a_k := \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_\varrho(z_0)} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}} \mathrm{d}z$

Dann lässt sich für $z \in U_{r,R}(z_0)$ f mittels der folgenden Laurententwicklung von f darstellen:

$$f(z) = \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} a_{-k}(z - z_0)^{-k}}_{\text{Hauptteil}} + \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k}_{\text{Nebenteil}} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$$

und die Konvergenz ist gleichmäßig für $z \in K$ mit $K \subset U_{r,R}(z_0)$ kompakt.

4.25.5 Eigenschaften der Laurententwicklung einer Funktion

Sei z_0 isolierte Singularität von f, $f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k(z - z_0)^k$ für $z \in U_{0,R}(z_0)$ mit R genügend klein. Dann gilt:

1. f hebbar bei $z_0 \Leftrightarrow a_k = 0$ für $k < 0$
2. f hat Pol bei $z_0 \Leftrightarrow \exists m \in \mathbb{N}$ mit $a_k = 0$ für $k < -m$ (Ordnung: minimales solches m)
3. f hat wesentliche Singularität bei $z_0 \Leftrightarrow a_k \neq 0$ für unendlich viele $k < 0$