

Analysis II – Tutorium

Aufgabenblatt: Normen, Topologie & Stetigkeit

Mirkan Deniz Günkaya

Hinweise zur Bearbeitung

- Das Blatt enthält **vier Aufgaben** und ist auf eine zweistündige Tutoriumssitzung ausgelegt. Die Aufgaben sind von *mittlerem bis schwerem* Niveau.
- Inhaltlich wird der gesamte Themenkreis aus Kapitel 13 vermischt: Normen auf \mathbb{R}^n , Folgen- und Matrixnormen, Inneres / Abschluss / Rand von Mengen, sowie Stetigkeit (Folgenkriterium und topologische Charakterisierung).
- Sämtliche Aussagen sind **vollständig zu begründen**. Verwendet bei Beweisen ausschließlich Definitionen und Sätze aus der Vorlesung.
- Zu jeder Aufgabe findet ihr im Anschluss eine **ausführlich kommentierte Musterlösung**. Versucht euch zunächst selbst – die Schritte sind bewusst kleinteilig erklärt.

Bezeichnungen: $\overset{\circ}{A}$ Inneres, \bar{A} Abschluss, $\partial A = \bar{A} \setminus \overset{\circ}{A}$ Rand einer Menge A ; $B_\varepsilon(x) = \{y : d(x, y) < \varepsilon\}$ offene Kugel.

Aufgabe 1 Eine Menge zeichnen und topologisch bestimmen

Wir betrachten im \mathbb{R}^2 (mit der euklidischen Metrik) die Menge

$$M = \left(\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 < 4\} \setminus \left\{ \left(\frac{3}{2}, 0 \right) \right\} \right) \cup \{(x, 0) : 2 \leq x \leq 3\}.$$

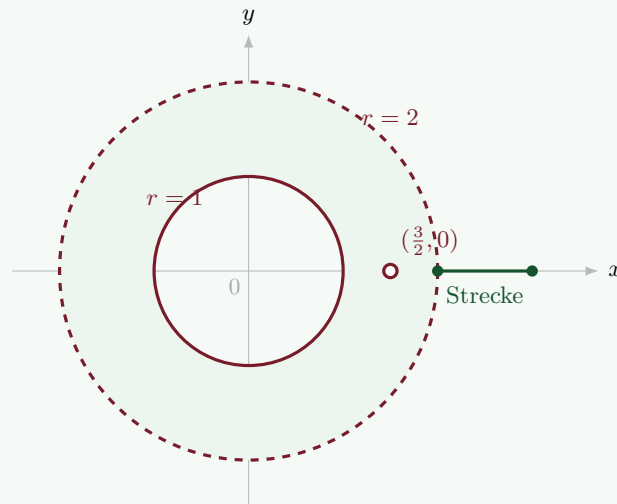
M besteht also aus einem Kreisring (innerer Rand mitgezählt, äußerer Rand nicht), aus dem ein *einzelner innerer Punkt* entfernt wurde, vereinigt mit einer waagrechten Strecke, die am äußeren Kreis ansetzt.

- (a) Fertigen Sie eine sorgfältige Skizze von M an. Kennzeichnen Sie deutlich, welche Randstücke zu M gehören (durchgezogen) und welche nicht (gestrichelt), sowie den entfernten Punkt.
- (b) Bestimmen Sie $\overset{\circ}{M}$, \overline{M} und ∂M als Mengen (in mengentheoretischer Schreibweise). Begründen Sie insbesondere, welche Rolle der entfernte Punkt $(\frac{3}{2}, 0)$ für $\overset{\circ}{M}$, \overline{M} und ∂M spielt.

Lösung 1 Eine Menge zeichnen und topologisch bestimmen

Orientierung. Mit $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ist der Ring $\{1 \leq r < 4^{1/2}\} = \{1 \leq r < 2\}$ gemeint: der Innenkreis $r = 1$ gehört dazu, der Außenkreis $r = 2$ nicht. Der entfernte Punkt $(\frac{3}{2}, 0)$ hat $r = \frac{3}{2} \in (1, 2)$, liegt also *echt im Inneren* des Rings. Die Strecke verläuft auf der x -Achse von $(2, 0)$ (auf dem Außenkreis) bis $(3, 0)$ nach außen.

(a) **Skizze.**



Lesehilfe zur Skizze

Durchgezogen = gehört zu M (Innenkreis $r = 1$, Strecke samt Endpunkten). *Gestrichelt* = gehört nicht zu M (Außenkreis $r = 2$). Der *offene weiße Punkt* bei $(\frac{3}{2}, 0)$ ist das "Loch" im Ring.

(b) **Inneres, Abschluss, Rand.**

Inneres \mathring{M} . Ein Punkt ist innerer Punkt, wenn eine ganze Kreisscheibe um ihn in M liegt.

- Im *offenen* Ring $\{1 < r < 2\}$ ist das für jeden Punkt $\neq (\frac{3}{2}, 0)$ erfüllt.
- Punkte auf $r = 1$ sind *keine* inneren Punkte (jede Kugel ragt in $\{r < 1\} \not\subseteq M$).
- Der entfernte Punkt $(\frac{3}{2}, 0)$ liegt nicht in M , also erst recht nicht in \mathring{M} .
- Die Strecke ist eindimensional und besitzt im \mathbb{R}^2 *keine* inneren Punkte.

Damit

$$\mathring{M} = \{(x, y) : 1 < x^2 + y^2 < 4\} \setminus \{(\frac{3}{2}, 0)\}.$$

(Das Entfernen eines Punktes aus einer offenen Menge liefert wieder eine offene Menge – deshalb taucht das Loch hier explizit auf.)

Abschluss \overline{M} . Wir nehmen alle Berührungspunkte hinzu.

- Der Abschluss des Rings $\{1 \leq r < 2\}$ ist der *abgeschlossene* Ring $\{1 \leq r \leq 2\}$ (der Außenkreis $r = 2$ kommt als Häufungsrand hinzu).
- Das Loch verschwindet im Abschluss: $(\frac{3}{2}, 0)$ ist Grenzwert benachbarter Ringpunkte, liegt also in \overline{M} .
- Die Strecke $\{(x, 0) : 2 \leq x \leq 3\}$ ist bereits abgeschlossen.

Damit

$$\overline{M} = \{(x, y) : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\} \cup \{(x, 0) : 2 \leq x \leq 3\}.$$

Rand $\partial M = \overline{M} \setminus \overset{\circ}{M}$. Wir subtrahieren das Innere vom Abschluss:

- Aus dem abgeschlossenen Ring bleiben *Innenkreis* $\{r = 1\}$ und *Außenkreis* $\{r = 2\}$ übrig.
- Der entfernte Punkt $(\frac{3}{2}, 0)$ ist in \overline{M} , aber nicht in $\overset{\circ}{M}$, gehört also zum Rand.
- Die ganze Strecke gehört zum Rand (sie enthält keine inneren Punkte).

Damit

$$\partial M = \{x^2 + y^2 = 1\} \cup \{x^2 + y^2 = 4\} \cup \{(x, 0) : 2 \leq x \leq 3\} \cup \{(\frac{3}{2}, 0)\}.$$

Der entfernte Punkt als isolierter Randpunkt

Der Punkt $(\frac{3}{2}, 0)$ ist ein besonders lehrreicher Fall:

- Er ändert den **Abschluss nicht** (er wird durch umliegende Ringpunkte “wieder eingefangen”).
- Er erzeugt aber im **Inneren ein Loch** und ist damit ein **Randpunkt**.
- Innerhalb von ∂M ist er *isoliert*: die nächsten anderen Randpunkte liegen auf $r = 1$ bzw. $r = 2$, jeweils im Abstand $\frac{1}{2}$.

Merksatz: Entfernt man einen *inneren* Punkt einer Menge, so entsteht ein neuer Randpunkt, während der Abschluss unverändert bleibt.



Aufgabe 2 Reine Beweisaufgabe: Eigenschaften des Randes

Sei (X, d) ein metrischer Raum und $A \subseteq X$. Wir schreiben $A^c = X \setminus A$ und benutzen die Definitionen

$$\overset{\circ}{A} = \{x \in X : \exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x) \subseteq A\}, \quad \overline{A} = \{x \in X : \forall \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x) \cap A \neq \emptyset\},$$

sowie $\partial A := \overline{A} \setminus \overset{\circ}{A}$. Beweisen Sie:

(a) Es gilt die Dualität $(\overset{\circ}{A})^c = \overline{A^c}$, und damit

$$\partial A = \overline{A} \cap \overline{A^c}.$$

Insbesondere ist $\partial A = \partial(A^c)$.

(b) Der Rand ∂A ist stets **abgeschlossen**.

(c) Es gilt die Äquivalenz

$$A \text{ abgeschlossen} \iff \partial A \subseteq A.$$

Hinweis: Sie dürfen verwenden, dass Inneres bzw. Abschluss durch die obigen ε -Bedingungen charakterisiert sind. Andere "bekannte" Eigenschaften (z. B. "Abschlüsse sind abgeschlossen") sollen Sie hier *selbst* beweisen.

Lösung 2 Reine Beweisaufgabe: Eigenschaften des Randes

Wir stellen einen kleinen Hilfssatz voran, der mehrfach gebraucht wird.

Hilfssatz: Abschlüsse sind abgeschlossen

Für jede Menge $C \subseteq X$ ist \overline{C} abgeschlossen, d. h. $(\overline{C})^c$ ist offen.

Beweis. Sei $x \in (\overline{C})^c$, also $x \notin \overline{C}$. Nach Definition existiert ein $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(x) \cap C = \emptyset$. Wir zeigen $B_\varepsilon(x) \subseteq (\overline{C})^c$: Sei $y \in B_\varepsilon(x)$ und $\delta := \varepsilon - d(x, y) > 0$. Für $z \in B_\delta(y)$ gilt nach Dreiecksungleichung $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) < d(x, y) + \delta = \varepsilon$, also $B_\delta(y) \subseteq B_\varepsilon(x)$ und somit $B_\delta(y) \cap C = \emptyset$. Damit ist $y \notin \overline{C}$, d. h. $y \in (\overline{C})^c$. Also ist $B_\varepsilon(x) \subseteq (\overline{C})^c$, und $(\overline{C})^c$ ist offen. \square

(a) Dualität und Darstellung des Randes.

Schritt 1: $(\mathring{A})^c = \overline{A^c}$. Wir rechnen die definierenden Bedingungen “durch Negation” um. Für $x \in X$ gilt:

$$\begin{aligned}x \in (\mathring{A})^c &\iff x \notin \mathring{A} \iff \neg(\exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x) \subseteq A) \\ &\iff \forall \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x) \not\subseteq A \iff \forall \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x) \cap A^c \neq \emptyset \\ &\iff x \in \overline{A^c}.\end{aligned}$$

Dabei wurde benutzt: $B_\varepsilon(x) \not\subseteq A$ heißt, es gibt ein $y \in B_\varepsilon(x)$ mit $y \notin A$, also $y \in A^c$, d. h. $B_\varepsilon(x) \cap A^c \neq \emptyset$. Damit ist die Dualität bewiesen.

Schritt 2: Darstellung des Randes. Mit der Definition $\partial A = \overline{A} \setminus \mathring{A}$ und $S \setminus T = S \cap T^c$ folgt

$$\partial A = \overline{A} \setminus \mathring{A} = \overline{A} \cap (\mathring{A})^c \stackrel{\text{Schritt 1}}{=} \overline{A} \cap \overline{A^c}.$$

Schritt 3: Symmetrie. Der Ausdruck $\overline{A} \cap \overline{A^c}$ ist in A und A^c *symmetrisch* (wegen $(A^c)^c = A$):

$$\partial(A^c) = \overline{A^c} \cap \overline{(A^c)^c} = \overline{A^c} \cap \overline{A} = \partial A.$$

(b) ∂A ist abgeschlossen.

Nach (a) ist $\partial A = \overline{A} \cap \overline{A^c}$. Nach dem Hilfssatz sind \overline{A} und $\overline{A^c}$ beide abgeschlossen. Es genügt also:

Durchschnitt zweier abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen. Seien F_1, F_2 abgeschlossen, d. h. F_1^c, F_2^c offen. Nach den de Morgan'schen Regeln ist

$$(F_1 \cap F_2)^c = F_1^c \cup F_2^c,$$

und die Vereinigung zweier offener Mengen ist offen (zu $x \in F_1^c \cup F_2^c$ liegt x in einem der beiden, das eine passende Kugel $B_\varepsilon(x)$ enthält, die dann auch in der Vereinigung liegt). Also ist $(F_1 \cap F_2)^c$ offen, mithin $F_1 \cap F_2$ abgeschlossen.

Mit $F_1 = \overline{A}$, $F_2 = \overline{A^c}$ folgt: ∂A ist abgeschlossen.

(c) A abgeschlossen $\iff \partial A \subseteq A$.

Vorbereitung. Aus den Definitionen folgt unmittelbar

$$\mathring{A} \subseteq A \subseteq \overline{A},$$

denn $B_\varepsilon(x) \subseteq A$ erzwingt $x \in A$ (es ist $x \in B_\varepsilon(x)$), und $x \in A$ liefert $B_\varepsilon(x) \cap A \ni x \neq \emptyset$. Ferner ist wegen $\mathring{A} \subseteq A$

$$\overline{A} = \mathring{A} \cup (\overline{A} \setminus \mathring{A}) = \mathring{A} \cup \partial A. \quad (*)$$

Richtung “ \Rightarrow ”. Sei A abgeschlossen, also $A = \bar{A}$. Dann

$$\partial A = \bar{A} \setminus \overset{\circ}{A} = A \setminus \overset{\circ}{A} \subseteq A.$$

Richtung “ \Leftarrow ”. Gelte $\partial A \subseteq A$. Mit (*) und $\overset{\circ}{A} \subseteq A$ folgt

$$\bar{A} = \overset{\circ}{A} \cup \partial A \subseteq A \cup A = A,$$

also $\bar{A} \subseteq A$. Zusammen mit $A \subseteq \bar{A}$ ergibt sich $A = \bar{A}$, d. h. A ist abgeschlossen.

Merksatz

Der Rand ist genau die “Nahtstelle” zwischen A und A^c : $\partial A = \bar{A} \cap \overline{A^c}$. Eine Menge ist genau dann abgeschlossen, wenn sie *ihren eigenen Rand enthält*; sie ist genau dann offen, wenn sie ihren Rand *meidet* ($\partial A \cap A = \emptyset$, dual zu (c)).



Aufgabe 3 Verschiedene Normen – Matrizen, Folgen, Gewichte

In dieser Aufgabe treten bewusst *nicht* die euklidische Norm, sondern andere wichtige Normen auf.

- (a) (**Matrixnorm.**) Auf dem Vektorraum $\mathbb{R}^{m \times n}$ der reellen $m \times n$ -Matrizen sei die *Zeilen-summennorm*

$$\|A\|_\infty := \max_{1 \leq i \leq m} \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \quad (A = (a_{ij})).$$

Zeigen Sie, dass $\|\cdot\|_\infty$ alle drei Normaxiome erfüllt. Berechnen Sie anschließend $\|A\|_\infty$ für

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & -5 \end{pmatrix}.$$

- (b) (**Folgenorm.**) Sei $\ell^\infty = \{x = (x_k)_{k \in \mathbb{N}} : x_k \in \mathbb{R}, \sup_k |x_k| < \infty\}$ der Raum der beschränkten reellen Folgen mit

$$\|x\|_\infty := \sup_{k \in \mathbb{N}} |x_k|.$$

Begründen Sie kurz, dass ℓ^∞ ein Vektorraum ist, und weisen Sie nach, dass $\|\cdot\|_\infty$ eine Norm ist. Geben Sie außerdem eine Folge $x \in \ell^\infty$ an, für die das Supremum *kein Maximum* ist.

- (c) (**Die Summe als Norm.**) Zeigen Sie, dass durch

$$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \sum_{k=1}^n k |x_k|$$

eine Norm auf \mathbb{R}^n definiert wird (eine *gewichtete* 1-Norm). Zeigen Sie ferner, dass f als Abbildung $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ bezüglich der gewöhnlichen Topologie **stetig** ist.

Lösung 3 Verschiedene Normen – Matrizen, Folgen, Gewichte

(a) **Zeilensummennorm auf $\mathbb{R}^{m \times n}$.**

Wir prüfen die drei Axiome (N1) Definitheit, (N2) Homogenität, (N3) Dreiecksungleichung.

(N1) Definitheit. Als Maximum von Summen nichtnegativer Zahlen ist $\|A\|_\infty \geq 0$. Ferner:

$$\|A\|_\infty = 0 \iff \max_i \sum_j |a_{ij}| = 0 \iff \sum_j |a_{ij}| = 0 \forall i \iff |a_{ij}| = 0 \forall i, j \iff A = 0.$$

(N2) Homogenität. Für $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\|\lambda A\|_\infty = \max_i \sum_j |\lambda a_{ij}| = \max_i |\lambda| \sum_j |a_{ij}| = |\lambda| \max_i \sum_j |a_{ij}| = |\lambda| \|A\|_\infty,$$

da $|\lambda| \geq 0$ als konstanter Faktor aus Summe und Maximum gezogen werden darf.

(N3) Dreiecksungleichung. Für jede feste Zeile i gilt mit der Dreiecksungleichung in \mathbb{R} :

$$\sum_j |a_{ij} + b_{ij}| \leq \sum_j (|a_{ij}| + |b_{ij}|) = \sum_j |a_{ij}| + \sum_j |b_{ij}| \leq \|A\|_\infty + \|B\|_\infty.$$

Die rechte Seite ist von i unabhängig, also eine obere Schranke für alle Zeilensummen; folglich auch für deren Maximum:

$$\|A + B\|_\infty = \max_i \sum_j |a_{ij} + b_{ij}| \leq \|A\|_\infty + \|B\|_\infty.$$

Damit ist $\|\cdot\|_\infty$ eine Norm.

Konkrete Berechnung. Zeilensummen der Beträge:

$$\text{Zeile 1: } 2 + 3 + 1 = 6, \quad \text{Zeile 2: } 1 + 4 + 0 = 5, \quad \text{Zeile 3: } 0 + 2 + 5 = 7.$$

Also

$$\|A\|_\infty = \max\{6, 5, 7\} = 7.$$

(b) **Folgnorm auf ℓ^∞ .**

Vektorraum. Sind $x, y \in \ell^\infty$ mit $|x_k| \leq S, |y_k| \leq T$ für alle k , so gilt $|x_k + y_k| \leq S + T$ und $|\lambda x_k| = |\lambda|S$, beide beschränkt. Also liegen $x + y$ und λx wieder in ℓ^∞ ; die Nullfolge ist neutrales Element. Damit ist ℓ^∞ ein Untervektorraum des Folgenraums.

(N1) Definitheit. $\|x\|_\infty = \sup_k |x_k| \geq 0$, und

$$\|x\|_\infty = 0 \iff \sup_k |x_k| = 0 \iff |x_k| = 0 \forall k \iff x = 0.$$

(N2) Homogenität. $\|\lambda x\|_\infty = \sup_k |\lambda| |x_k| = |\lambda| \sup_k |x_k| = |\lambda| \|x\|_\infty$ (Herausziehen des nichtnegativen Faktors aus dem Supremum).

(N3) Dreiecksungleichung. Für jedes k ist

$$|x_k + y_k| \leq |x_k| + |y_k| \leq \sup_j |x_j| + \sup_j |y_j| = \|x\|_\infty + \|y\|_\infty.$$

Die rechte Seite ist eine von k unabhängige obere Schranke; das Supremum über k liefert

$$\|x + y\|_\infty = \sup_k |x_k + y_k| \leq \|x\|_\infty + \|y\|_\infty.$$

Supremum ohne Maximum. Sei $x_k = 1 - \frac{1}{k}$ für $k \geq 1$, also $x = (0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots)$. Dann ist $\sup_k |x_k| = 1$, aber $x_k < 1$ für *alle* k ; das Supremum 1 wird also nie angenommen und ist kein Maximum.

Warum hier sup und nicht max?

Im Endlichdimensionalen (\mathbb{R}^n) ist $\|x\|_\infty = \max_k |x_k|$, da ein Maximum endlich vieler Zahlen stets existiert. Im Folgenraum ℓ^∞ kann das Maximum fehlen – deshalb steht dort zwingend das Supremum.

(c) Die Summe $f(x) = \sum_{k=1}^n k |x_k|$ als Norm.

Dies ist eine *gewichtete 1-Norm* mit Gewichten $w_k = k > 0$. Wir prüfen die Axiome.

(N1) Definitheit. $f(x) = \sum_k k |x_k| \geq 0$ als Summe nichtnegativer Terme. Da jeder Summand $k|x_k| \geq 0$ ist, gilt

$$f(x) = 0 \iff k|x_k| = 0 \forall k \iff |x_k| = 0 \forall k \text{ (denn } k \geq 1 > 0) \iff x = 0.$$

(N2) Homogenität. $f(\lambda x) = \sum_k k |\lambda x_k| = |\lambda| \sum_k k |x_k| = |\lambda| f(x)$.

(N3) Dreiecksungleichung.

$$f(x + y) = \sum_k k |x_k + y_k| \leq \sum_k k (|x_k| + |y_k|) = \sum_k k |x_k| + \sum_k k |y_k| = f(x) + f(y).$$

Also ist f eine Norm.

Stetigkeit (direkter Nachweis). Wir zeigen, dass f als reellwertige Funktion auf \mathbb{R}^n (mit der gewöhnlichen euklidischen Topologie) stetig ist. Die Koordinatenprojektionen $\pi_k : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $\pi_k(x) = x_k$, sind als Polynome (bzw. lineare Abbildungen) stetig (Skript S. 40). Die Betragsfunktion $|\cdot| : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist stetig. Nach Proposition 13.30 ist daher die Komposition

$$x \mapsto |x_k| = |\pi_k(x)|$$

stetig, und mit Satz 13.31 ist auch $x \mapsto k|x_k|$ (Produkt mit der Konstanten k) stetig. Als *endliche Summe* stetiger Funktionen ist

$$f(x) = \sum_{k=1}^n k |x_k|$$

nach Satz 13.31 (i) stetig.

Zwei Wege zur Stetigkeit – und eine Feinheit

Man könnte auch Lemma 13.32 zitieren: “jede Norm ist stetig”. Vorsicht: Lemma 13.32 liefert die Stetigkeit von f bezüglich der *von f selbst* erzeugten Metrik. Dass f auch bezüglich der *euklidischen* Topologie stetig ist, folgt zusätzlich aus der **Äquivalenz aller Normen auf \mathbb{R}^n** . Der oben gegebene direkte Beweis (Projektionen + Betrag + Summe) umgeht diese Feinheit und ist daher die sauberere Begründung.



Aufgabe 4 Stetigkeit – gemischt und vollständig

(a) Betrachten Sie $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

- (i) Zeigen Sie, dass f auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ stetig ist.
- (ii) Zeigen Sie, dass die Einschränkung von f auf *jede* Gerade durch den Ursprung im Punkt 0 den Grenzwert $0 = f(0, 0)$ besitzt.
- (iii) Zeigen Sie dennoch, dass f in $(0, 0)$ **nicht** stetig ist. (Tipp: Untersuchen Sie das Verhalten entlang der Parabel $y = x^2$.)

(b) Bestimmen Sie mit der *topologischen Charakterisierung* der Stetigkeit (Satz 13.33), ob die folgenden Mengen offen bzw. abgeschlossen sind:

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < z^2 + 1\}, \quad C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^2 = 1\}.$$

(c) (**Synthese.**) Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ eine feste Matrix. Zeigen Sie, dass

$$\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = \|Ax\|_2^2 + \|x\|_1$$

stetig ist. Geben Sie für jeden Baustein das verwendete Vorlesungsresultat an.

Lösung 4 Stetigkeit – gemischt und vollständig

(a) Die kritische Funktion $f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$.

(i) **Stetigkeit außerhalb des Ursprungs.** Zähler $x^2 y$ und Nenner $x^4 + y^2$ sind Polynome, also nach Satz 13.31 stetig. Für $(x, y) \neq (0, 0)$ ist der Nenner positiv, denn $x^4 + y^2 = 0 \iff x = y = 0$. Nach Satz 13.31 (iii) (Quotient stetiger Funktionen mit nichtverschwindendem Nenner) ist f auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ stetig.

(ii) **Grenzwert entlang jeder Geraden durch 0.** Gerade $y = mx$ ($m \in \mathbb{R}$): für $x \neq 0$

$$f(x, mx) = \frac{x^2 (mx)}{x^4 + (mx)^2} = \frac{m x^3}{x^2 (x^2 + m^2)} = \frac{m x}{x^2 + m^2} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0 = f(0, 0).$$

Senkrechte Gerade $x = 0$: $f(0, y) = \frac{0}{y^2} = 0 \rightarrow 0$. Damit besitzt die Einschränkung auf jede Ursprungsgerade in 0 den Grenzwert 0.

(iii) **Unstetigkeit in $(0, 0)$.** Wir nähern uns entlang der Parabel $y = x^2$:

$$f(x, x^2) = \frac{x^2 \cdot x^2}{x^4 + (x^2)^2} = \frac{x^4}{x^4 + x^4} = \frac{x^4}{2x^4} = \frac{1}{2} \quad (x \neq 0).$$

Entlang dieser Kurve ist f also konstant $\frac{1}{2} \neq 0$. Konkret betrachten wir die Folge

$$p_n = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2} \right) \rightarrow (0, 0),$$

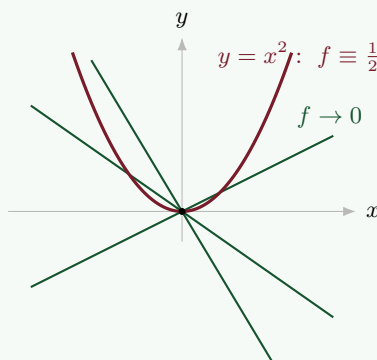
für die

$$f(p_n) = \frac{(1/n)^2 (1/n^2)}{(1/n)^4 + (1/n^2)^2} = \frac{1/n^4}{1/n^4 + 1/n^4} = \frac{1/n^4}{2/n^4} = \frac{1}{2} \not\rightarrow 0 = f(0, 0).$$

Nach dem **Folgenkriterium** (Satz 13.28) ist f daher in $(0, 0)$ *nicht* stetig.

Bezug zum Skript, S. 41

Dies ist genau die Warnung aus der Vorlesung: Die Stetigkeit *aller* Einschränkungen auf Geraden (sogar auf alle Geraden, nicht nur die Koordinatenachsen) erzwingt **nicht** die Stetigkeit der Funktion. Der “Verräter” ist hier eine *gekrümmte* Annäherung – die Parabel $y = x^2$, die exakt zur vierten Potenz im Nenner passt.



(b) **Topologische Charakterisierung (Satz 13.33).**

S ist offen. Setze $h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2 - 1$. Als Polynom ist h stetig. Es gilt

$$S = \{h < 0\} = h^{-1}((-\infty, 0)).$$

Das Intervall $(-\infty, 0)$ ist offen in \mathbb{R} . Nach Satz 13.33 (ii) ist das Urbild einer offenen Menge unter einer stetigen Funktion offen; also ist S offen.

C ist abgeschlossen. Setze $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x, y) = x^2 - y^2$. Als Polynom ist g stetig, und

$$C = \{g = 1\} = g^{-1}(\{1\}).$$

Die einpunktige Menge $\{1\}$ ist abgeschlossen in \mathbb{R} . Nach Satz 13.33 (iii) ist das Urbild einer abgeschlossenen Menge abgeschlossen; also ist C abgeschlossen.

Faustregel

Niveau- und Subniveaumengen stetiger Funktionen erbt man bequem: $\{g < c\}$, $\{g > c\}$ sind *offen*; $\{g \leq c\}$, $\{g \geq c\}$, $\{g = c\}$ sind *abgeschlossen*. Man muss nur eine geeignete stetige Funktion g finden und die rechte Seite als offene/abgeschlossene Menge in \mathbb{R} erkennen.

(c) Synthese: $\varphi(x) = \|Ax\|_2^2 + \|x\|_1$.

Wir zerlegen φ in stetige Bausteine.

Baustein 1: $x \mapsto Ax$. Die Abbildung $x \mapsto Ax$ ist linear, also stetig (Skript S. 40: lineare Abbildungen $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $x \mapsto Ax$, sind stetig).

Baustein 2: $x \mapsto \|Ax\|_2$. Die euklidische Norm $\|\cdot\|_2 : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ ist stetig (Lemma 13.32, sogar Lipschitz-stetig). Als Komposition $x \mapsto \|Ax\|_2$ stetiger Abbildungen ist sie nach Proposition 13.30 stetig.

Baustein 3: $x \mapsto \|Ax\|_2^2$. Die Abbildung $t \mapsto t^2$ ist stetig (Polynom). Komposition mit Baustein 2 ergibt nach Proposition 13.30 die Stetigkeit von $x \mapsto \|Ax\|_2^2$.

Baustein 4: $x \mapsto \|x\|_1$. Es ist $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$. Jede Abbildung $x \mapsto |x_i| = |\pi_i(x)|$ ist als Komposition der stetigen Projektion π_i mit dem stetigen Betrag stetig (Prop. 13.30); die endliche Summe ist nach Satz 13.31 (i) stetig. (Damit ist die Stetigkeit bezüglich der gewöhnlichen euklidischen Topologie sauber begründet.)

Zusammensetzung. φ ist die Summe der Bausteine 3 und 4, also nach Satz 13.31 (i) stetig:

$$\varphi(x) = \|Ax\|_2^2 + \|x\|_1 \text{ ist stetig auf } \mathbb{R}^n.$$

Strategie bei Stetigkeits-Synthesen

Komplizierte Ausdrücke nie “am Stück” angreifen, sondern in elementare stetige Bausteine zerlegen (Projektionen, Betrag, Norm, Polynome) und mit den drei Werkzeugen verbinden: **Summe/Produkt/Quotient** (Satz 13.31), **Komposition** (Prop. 13.30) und **Stetigkeit der Norm** (Lemma 13.32). ■