Aufgaben und Lösungen zu Mathematik für Studierende der Ingenieurwissenschaften II

Heinrich Voß

Institut für Angewandte Mathematik
der Universität Hamburg

1991

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 10

Folgen und Reihen

10.1 Einführende Beispiele

Aufgabe 10.1 *Ein Ball werde aus der Höhe* $h_0 > 0$ *fallengelassen. Beim Aufprallen auf den Boden wird er senkrecht reflektiert, wobei seine kinetische Energie um* 10% *abnimmt. Bestimmen Sie*

a) seine maximale Höhe h_n *nach dem* n*-ten Abprallen und*

b) die Dauer t_n *zwischen dem* n*-ten und dem* $(n+1)$*-ten Aufprallen,*

wobei Reibung während der Flugphase nicht berücksichtigt wird, bei der Abprallgeschwindigkeit v_n *die Höhe zur Zeit* $t \in (0, t_n)$ *also* $h(t) = v_n t - 0.5gt^2$ *ist.*

Was ändert sich, wenn man das Experiment auf dem Mond ausführt?

Lsung von Aufgabe 10.1
Ist v_n die Anfangsgeschwindigkeit nach dem n-ten Aufprallen, so ist zur Zeit $t \in (0, t_n)$ die Höhe $h(t) = v_n t - 0.5gt^2$. Die Geschwindigkeit zur Zeit t ist also $v(t) = v_n - gt$, und der höchste Punkt wird zur Zeit $\tilde{t}_n = v_n/g$ ($\Longleftrightarrow v(\tilde{t}_n) = 0$) erreicht. Damit ist die maximale Höhe

$$h_n = v_n \cdot \tilde{t}_n - 0.5g\tilde{t}_n^2 = \frac{v_n^2}{2g},$$

und der Ball erreicht den Boden wieder zur Zeit

$$t_n = \frac{2v_n}{g}.$$

Um die Folgen $\{h_n\}$ und $\{t_n\}$ zu bestimmen, benötigen wir die Anfangsgeschwindigkeit v_n nach dem n-ten Aufprallen.

Die Phase vor dem ersten Aufprallen wird beschrieben durch $h(t) = h_0 - 0.5gt^2$. Der Ball erreicht also zur Zeit $\tilde{t} = \sqrt{2h_0/g}$ den Boden, und seine Geschwindigkeit v_0 beim Aufprallen ist $v_0 = -g \cdot \tilde{t} = -\sqrt{2gh_0}$. Da die kinetische Energie durch den Aufprall um 10% abnimmt, ist somit die Anfangsgeschwindigkeit nach dem ersten Aufprallen

$$v_1 = \sqrt{0.9} \cdot v_0 = \sqrt{0.9} \cdot \sqrt{2gh_0}.$$

Beim nächsten Aufprallen ist die Geschwindigkeit $-v_1$, die Anfangsgeschwindigkeit nach dem zweiten Aufprallen also $v_2 = \sqrt{0.9}v_1 = (\sqrt{0.9})^2 \cdot v_0$, und durch vollständige Induktion erhält man

$$v_n = (\sqrt{0.9})^n \cdot \sqrt{2gh_0}.$$

Setzt man dies ein, folgt

$$h_n = \frac{v_n^2}{2g} = (0.9)^n \cdot h_0$$

und

$$t_n = \frac{2v_n}{g} = 2(\sqrt{0.9})^n \cdot \sqrt{\frac{2h_0}{g}}.$$

Führt man das Experiment auf dem Mond durch, so ändert sich h_n nicht, die Dauer der Flugphasen wird aber um den Faktor $\sqrt{g/g_{\text{Mond}}}$ verlängert. □

Aufgabe 10.2 *Von Fibonacci wurde im 13. Jahrhundert das folgende Problem beschrieben: Ein Kaninchenpaar werde zum Zeitpunkt $t = 0$ geboren. Es wird nach einem Monat geschlechtsreif, und danach wird nach jedem weiteren Monat ein neues Paar als Nachkommen des ersten Paares geboren. Alle neuen Paare verhalten sich genauso: Nach einem Monat sind sie geschlechtsreif und danach bringen sie jeden Monat ein neues Paar als Nachkommen hervor. Wieviele Kaninchenpaare gibt es nach n Monaten, wenn man annimmt, dass Kaninchen unsterblich sind?*

Lsung von Aufgabe 10.2

Um die Entwicklung der Kaninchenpopulation zu beschreiben, unterteilen wir sie in junge und erwachsene Tiere. Es sei e_n die Anzahl der erwachsenen Paare und j_n die Anzahl der jungen Paare, die gerade geboren sind, am Ende des n-ten Monats. Dann gilt $e_{n+1} = e_n + j_n$ (erwachsene Tiere bleiben erwachsen, und es kommen die Jungtiere des letzten Monats hinzu) und $j_{n+1} = e_n$ (jedes reife Paar erzeugt im

$(n+1)$-ten Monat ein Jungpaar). Eliminiert man aus diesen Rekursionsformeln j_n, so erhält man

$$e_{n+1} = e_n + e_{n-1}.$$

Als Anfangsbedingungen hat man $e_0 = 0$ und $e_1 = 1$ (erst am Ende des ersten Monats ist das Urpaar reif).

Die Gesamtzahl der Paare am Ende des n-ten Monats ist

$$a_n = e_n + j_n = e_n + e_{n-1} = e_{n+1},$$

und genügt daher derselben Rekursionsformel

$$a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$$

mit den verschobenen Anfangsbedingungen $a_0 = e_1 = 1$ und $a_1 = e_2 = e_1 + e_0 = 1$.

Die Zahlen a_n heißen **Fibonacci Zahlen**. □

Aufgabe 10.3 *Es sei a_n bzw. b_n die Seitenlänge eines dem Einheitskreis ein- bzw. umbeschriebenen regelmäßigen $6 \cdot 2^n$-Ecks ($n \in \mathbb{N}$). Dann gilt offenbar*

$$6 \cdot 2^{n-1} \cdot a_n \leq \pi \leq 6 \cdot 2^{n-1} \cdot b_n.$$

a) *Zeigen Sie, dass $\{a_n\}$ und $\{b_n\}$ den folgenden Rekursionsformeln genügen:*

$$a_{n+1} = \sqrt{2\Big(1 - \sqrt{1 - 0.25a_n^2}\Big)}, \quad a_0 = 1, \tag{10.1}$$

$$b_{n+1} = 4\frac{\sqrt{1 + 0.25b_n^2} - 1}{b_n}, \quad b_0 := \frac{2}{\sqrt{3}}. \tag{10.2}$$

b) *Zeigen Sie, dass die Rekursionsformel in (10.1) äquivalent ist zu*

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{\sqrt{2\Big(1 + \sqrt{1 - 0.25a_n^2}\Big)}}, \tag{10.3}$$

und die Rekursionsformel in (10.2) äquivalent zu

$$b_{n+1} = \frac{b_n}{\sqrt{1 + 0.25b_n^2} + 1}. \tag{10.4}$$

c) *Berechnen Sie mit den angegeben Rekursionsformeln für a_n und b_n Näherungen für π für $n = 1, \ldots, 15$.*

Abbildung 10.1: Zu Aufgabe 10.3

Lsung von Aufgabe 10.3

a): Aus der linken Skizze in Abbildung 10.1 liest man ab, dass $c_n = \sqrt{1 - 0.25a_n^2}$ gilt. Daher folgt

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \sqrt{0.25a_n^2 + \Big(1 - \sqrt{1 - 0.25a_n^2}\Big)^2} \\ &= \sqrt{0.25a_n^2 + \Big(1 - 2\sqrt{1 - 0.25a_n^2} + 1 - 0.25a_n^2\Big)} \\ &= \sqrt{2\Big(1 - \sqrt{1 - 0.25a_n^2}\Big)}, \end{aligned}$$

d.h. die Rekursionsformel in (10.1). Der Anfangswert $a_0 = 1$ ist ebenfalls unmittelbar klar, da das Sechseck aus 6 gleichseitigen Dreiecken zusammengesetzt ist.

Mit den Bezeichnungen der rechten Skizze ist

$$\tan\varphi = \frac{\sqrt{1 + 0.25b_n^2} - 1}{0.5b_{n+1}} = \frac{0.5b_n}{1},$$

und hieraus erhält man die Rekursionsformel in (10.2). Die Anfangsbedingung $b_0 = 2/\sqrt{3}$ folgt aus dem Satz von Pythagoras.

b): (10.3) erhält man aus (10.1) durch Erweitern mit $\sqrt{1 + \sqrt{1 + 0.25a_n^2}}$, und (10.4) aus (10.2) durch Erweitern mit $\sqrt{1 + 0.25b_n^2} + 1$.

c): Tabelle 10.1 bzw. Tabelle 10.2 zeigen die Fehler bei der Berechnung von π unter Benutzung der Formeln (10.1) und (10.2) bzw. (10.3) und (10.4) (unter Verwendung von Turbo Pascal 6.0 in einfacher Genauigkeit). Die unsinnigen Ergebnisse im ersten Fall, dass die Fehler dem Betrage nach ab $n = 11$ wieder wachsen, erhält man, weil in (10.1) und (10.2) für große n zwei fast gleich große Zahlen voneinander abgezogen werden und dabei Auslöschung auftritt. □

Tabelle 10.1: Aufgabe 10.3; instabile Rekursion nach Teil a)

n	$a_n - \pi$	$b_n - \pi$
1	$-1.4159265359E-01$	$3.2250896155E-01$
2	$-3.5764112363E-02$	$7.3797655605E-02$
3	$-8.9640403494E-03$	$1.8067288624E-02$
4	$-2.2424506606E-03$	$4.4935615952E-03$
5	$-5.6070277424E-04$	$1.1219459993E-03$
6	$-1.4018235015E-04$	$2.8039928293E-04$
7	$-3.5055869375E-05$	$7.0094702096E-05$
8	$-8.8021442934E-06$	$1.7485555873E-05$
9	$-2.2280764824E-06$	$4.3544969230E-06$
10	$-1.0327930795E-06$	$3.1421768654E-06$
11	$-3.0818519008E-06$	$7.0865717134E-06$
12	$-5.8139303292E-06$	$2.4998731533E-05$
13	$-5.8139303292E-06$	$1.3822515757E-04$
14	$-9.3241731520E-05$	$2.4998731533E-05$
15	$-6.1785963408E-04$	$1.3822515757E-04$

Tabelle 10.2: Aufgabe 10.3; stabile Rekursion nach Teil b)

n	$a_n - \pi$	$b_n - \pi$
1	$-1.4159265359E-01$	$3.2250896155E-01$
2	$-3.5764112359E-02$	$7.3797655583E-02$
3	$-8.9640403130E-03$	$1.8067288507E-02$
4	$-2.2424505441E-03$	$4.4935615369E-03$
5	$-5.6070270512E-04$	$1.1219460503E-03$
6	$-1.4018131333E-04$	$2.8039637982E-04$
7	$-3.5045686673E-05$	$7.0093450631E-05$
8	$-8.7614535005E-06$	$1.7522994312E-05$
9	$-2.1903724701E-06$	$4.3807121983E-06$
10	$-5.4760312196E-07$	$1.0951589502E-06$
11	$-1.3691169443E-07$	$2.7376881917E-07$
12	$-3.4237018554E-08$	$6.8419467425E-08$
13	$-8.5747160483E-09$	$1.7080310499E-08$
14	$-2.1609594114E-09$	$4.2455212679E-09$
15	$-5.5661075749E-10$	$1.0295480024E-09$

Aufgabe 10.4 *Eine Population werde in $m+1$ Altersklassen eingeteilt, wobei die Klassen gleich lange Zeitspannen umfassen, die alle einem Zeitschritt des Evolutionsmodells entsprechen. Es bezeichne $a_i^{(n)}$ die Anzahl der Individuen, die im n-ten Zeitschritt der i-ten Altersklasse angehören und $a_0^{(n)}$ die Anzahl der im n-ten Zeitschritt Geborenen. Es sei p_i die Wahrscheinlichkeit, mit der ein Individuum der i-ten Klasse nach einem Zeitschritt in die $(i+1)$-te Klasse gelangt (also nicht stirbt und nicht auswandert) und b_i die mittlere Anzahl der Nachkommen eines Individuums der i-ten Altersklasse im Verlauf einer Zeitspanne. Einwanderung finde nicht statt.*

Beschreiben Sie die Entwicklung der Population mathematisch.

Lsung von Aufgabe 10.4

Die Entwicklung wird beschrieben durch

$$a_{i+1}^{(n+1)} = p_i \cdot a_i^{(n)}, \quad i = 0, \ldots, m-1,$$

(man kann in die nächste Alterklasse nur durch Älterwerden gelangen; Einwanderung findet nicht statt) und

$$a_0^{(n+1)} = \sum_{j=1}^{m} b_j \cdot a_j^{(n)}.$$

Mit dem Vektor $\boldsymbol{a}^n := (a_0^{(n)}, a_1^{(n)}, \ldots, a_m^{(n)})^T$ und der Matrix

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 0 & b_1 & b_2 & \ldots & b_{m-1} & b_m \\ p_0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & p_1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & p_{m-1} & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(m+1,m+1)}$$

gilt also

$$\boldsymbol{a}^{n+1} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{a}^n.$$

□

Aufgabe 10.5 *Beim Evakuieren eines Behälters vom Volumen V mit einer Pumpe mit dem Hubraum H kann der Druck wegen des Volumens A der Anschlussrohre nicht beliebig klein gemacht werden. Man bestimme (unter Beachtung des Boyle-Mariotte-Gesetzes) für den Druck p_n im Rezipienten nach n Pumpenschritten eine Rekursionsformel.*

Ein Pumpenschritt läuft folgendermaßen ab: Es wird V_1 geschlossen und V_2 geöffnet. Danach wird der Kolben von P nach Q bewegt. Jetzt wird V_2 geschlossen, V_1 geöffnet und der Kolben von Q nach P geführt.

Lsung von Aufgabe 10.5
Es sei p_0 der Außendruck.

Am Amfang des n-ten Pumpenschritts herrscht in dem Volumen V der Druck p_n und in dem Anschlussrohr der Druck p_0. Schließt man das Ventil V_1 und öffnet dann das Ventil V_2, so erhält man den Druck $\tilde{p}_n$ aus

$$(V + H)\tilde{p}_n = V p_n + H p_0.$$

Wir der Kolben von der Stellung P in die Stellung Q bewegt, so wird der Druck erniedrigt auf p_{n+1}:

$$(V+H)\tilde{p}_n = (V+H+A)p_{n+1},$$

der nach dem Schließen von V_2 in V herrscht. Damit erhält man

$$p_{n+1} = \frac{V+H}{V+H+A}\tilde{p}_n = \frac{Vp_n + Hp_0}{V+H+A}.$$

□

10.2 Konvergenz von Folgen

Aufgabe 10.6 *Es sei $a > 0$ gegeben. Zeigen Sie, dass die Folge $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$,*

$$a_n := \sqrt{a+n} - \sqrt{n},$$

gegen 0 konvergiert.

Lsung von Aufgabe 10.6
Es gilt

$$\begin{aligned} \left|\sqrt{a+n} - \sqrt{n} - 0\right| &= \left(\sqrt{a+n} - \sqrt{n}\right) \cdot \frac{\sqrt{a+n} + \sqrt{n}}{\sqrt{a+n} + \sqrt{n}} \\ &= \frac{a}{\sqrt{a+n} + \sqrt{n}} \leq \frac{a}{2\sqrt{n}}. \end{aligned}$$

Ist $\varepsilon > 0$ vorgegeben, so erreichen wir also $|a_n - 0| < \varepsilon$, wenn n so groß ist, dass

$$\frac{a}{2\sqrt{n}} < \varepsilon \iff \frac{a}{2\varepsilon} < \sqrt{n} \iff \frac{a^2}{4\varepsilon^2} < n.$$

Wir wählen daher

$$N \in \mathbb{N} \quad \text{mit} \quad \frac{a^2}{4\varepsilon^2} < N.$$

Dann folgt für alle $n \geq N$

$$\left|\sqrt{a+n} - \sqrt{n} - 0\right| \leq \frac{a}{2\sqrt{n}} \leq \frac{a}{2\sqrt{N}} < \varepsilon.$$

Anmerkung: Das Vorgehen in diesem einfachen Beispiel ist typisch für den Nachweis der Konvergenz gegen einen bekannten oder vermuteten Grenzwert. Durch Umformungen rechnet man den Ausdruck $|a_n - a|$ solange um, bis man zu gegebenem $\varepsilon > 0$ ein zugehöriges $N \in \mathbb{N}$ leicht angeben kann, für das die Konvergenzbedingung $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$ gilt. □

Aufgabe 10.7 *Zeigen Sie, dass die reelle Folge* $\{a_n\}$,

$$a_n := \frac{n^3 + 5n^2 - 1}{3n^3 + 9n + 6},$$

gegen $a = 1/3$ *konvergiert.*

Lsung von Aufgabe 10.7

Wie in Aufgabe 10.6 formen wir $|a_n - a|$ zunächst wieder um:

$$\begin{aligned} |a_n - a| &= \Big|\frac{n^3 + 5n^2 - 1}{3n^3 + 9n + 6} - \frac{1}{3}\Big| = \Big|\frac{n^3 + 5n^2 - 1 - (n^3 + 3n + 2)}{3n^3 + 9n + 6}\Big| \\ &= \Big|\frac{5n^2 - 3n - 3}{3n^3 + 9n + 6}\Big|. \end{aligned}$$

Um nachzuweisen, dass zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ ein N existiert mit $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$, schätzen wir den etwas unübersichtlichen Ausdruck $|a_n - a|$ nach oben ab (vergrößern ihn also), und zeigen, dass sogar die entstehende gliedweise vergrößerte Folge $\{b_n\}$ eine Nullfolge ist. Dabei werden wir natürlich die Vergrößerungen so vornehmen, dass die Konvergenz von $\{b_n\}$ leichter zu erkennen ist als die von $|a_n - a|$.

In der folgenden Ungleichungskette verwenden wir die Dreiecksungleichung. Ferner verkleinern wir den (positiven) Nenner und vergrößern so die auftretenden Brüche:

$$\begin{aligned} |a_n - a| &= \frac{|5n^2 - 3n - 3|}{3n^3 + 9n + 6} \leq \frac{5n^2 + 3n + 3}{3n^3 + 9n + 6} \leq \frac{5n^2 + 3n + 3}{3n^3} \\ &= \frac{5}{3} \cdot \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} \leq \frac{5}{3} \cdot \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n} = \frac{11}{3} \cdot \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Nach diesen Umformungen ist klar, dass mit $N > 11/(3\varepsilon)$

$$|a_n - a| < \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq N$$

gilt und daher $\{a_n\}$ gegen a konvergiert.

Anmerkung: Wir werden noch Rechenregeln bereitstellen, mit denen man viel schneller die Konvergenz der hier betrachteten Folge $\{a_n\}$ nachweisen kann und dabei zugleich den Grenzwert a ermitteln kann. Das Vorgehen in dieser Lösung ist aber typisch für den Konvergenznachweis bei bekanntem oder vermutetem Grenzwert. Man vergrößert die Abweichung des n-ten Folgengliedes vom Grenzwert (nicht zu stark, damit die Konvergenz erhalten bleibt) und zeigt die Konvergenz mit Hilfe einer majorisierenden Nullfolge. Wir werden dieser Vorgehensweise in Aufgabe 10.19 und Aufgabe 10.32 wiederbegegnen. $\square$

Aufgabe 10.8 *Es sei* $\{\boldsymbol{a}^n\} \subset V$ *eine Folge in einem normierten Raum* V *und* $\boldsymbol{a} \in V$.

Es sei $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ *eine reelle Funktion mit der Eigenschaft:*

$$\text{Für alle } \varepsilon > 0 \text{ existiert ein } \delta > 0 \text{ mit } x \in (0, \delta] \quad \Longrightarrow \quad f(x) \in (0, \varepsilon].$$

Zeigen Sie, dass $\{\boldsymbol{a}^n\}$ *gegen* $\boldsymbol{a}$ *konvergiert, wenn es zu jedem* $\varepsilon > 0$ *ein* $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ *gibt mit*

$$\|\boldsymbol{a}^n - \boldsymbol{a}\| < f(\varepsilon) \quad \text{für alle } n \geq N.$$

Lsung von Aufgabe 10.8
Es sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Wir wählen dann $\delta > 0$ wie im Aufgabentext und hierzu $N = N(\delta)$ mit

$$\|\boldsymbol{a}^n - \boldsymbol{a}\| < f(\delta) \quad \text{für alle } n \geq N(\delta).$$

Dann folgt

$$\|\boldsymbol{a}^n - \boldsymbol{a}\| < f(\delta) \leq \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq N(\delta),$$

was die Konvergenz von $\{\boldsymbol{a}^n\}$ gegen $\boldsymbol{a}$ zeigt. □

Aufgabe 10.9 *Es sei* $\{\boldsymbol{a}^n\} \subset V$ *ein Folge in dem normierten Vektorraum* V. *Zeigen Sie:*

a) *Ist* $\{\boldsymbol{a}^n\}$ *konvergent gegen* $\boldsymbol{a} \in V$ *und ist* $\{\boldsymbol{a}^{n_j}\}$ *eine beliebige Teilfolge, so konvergiert auch* $\{\boldsymbol{a}^{n_j}\}$ *gegen* $\boldsymbol{a}$.

b) *Es sei* $\{\boldsymbol{a}^n\}$ *zerlegt in die beiden Teilfolgen* $\{\boldsymbol{a}^{n_j}\}$ *und* $\{\boldsymbol{a}^{m_j}\}$, *d.h. jedes Folgenglied* $\boldsymbol{a}^n$ *ist in genau einer der beiden Teilfolgen enthalten. Dann konvergiert* $\{\boldsymbol{a}^n\}$ *genau dann gegen* $\boldsymbol{a} \in V$, *wenn beide Teilfolgen,* $\{\boldsymbol{a}^{n_j}\}$ *und* $\{\boldsymbol{a}^{m_j}\}$, *gegen* $\boldsymbol{a}$ *konvergieren.*

Lsung von Aufgabe 10.9
a): Es sei $\varepsilon > 0$ beliebig gegeben. Dann folgt aus der Konvergenz von $\{\boldsymbol{a}^n\}$, dass es ein $N \in \mathbb{N}$ gibt mit

$$\|\boldsymbol{a}^n - \boldsymbol{a}\| < \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq N.$$

Nach Definition der Teilfolge gilt $n_1 < n_2 < \ldots$. Daher folgt mit $J := \min\{j : n_j \geq N\}$

$$\|\boldsymbol{a}^{n_j} - \boldsymbol{a}\| < \varepsilon \quad \text{für alle } j \geq J,$$

d.h. die Folge $\{a_{n_j}\}$ konvergiert gegen $\boldsymbol{a}$.

b): Dass aus der Konvergenz der Folge $\{\boldsymbol{a}^n\}$ gegen $\boldsymbol{a}$ die Konvergenz der beiden Teilfolgen $\{\boldsymbol{a}^{n_j}\}$ und $\{\boldsymbol{a}^{m_j}\}$ gegen $\boldsymbol{a}$ folgt, erhält man aus Teil a).

Konvergieren umgekehrt die beiden Teilfolgen $\{\boldsymbol{a}^{n_j}\}$ und $\{\boldsymbol{a}^{m_j}\}$ gegen denselben Grenzwert $\boldsymbol{a}$, so gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $J_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\|\boldsymbol{a}^{n_j} - \boldsymbol{a}\| < \varepsilon \quad \text{für alle } j \geq J_0$$

und ein $J_1 \in \mathbb{N}$ mit

$$\|\boldsymbol{a}^{m_j} - \boldsymbol{a}\| < \varepsilon \quad \text{für alle } j \geq J_1.$$

Wir wählen

$$N := \max\{N_{J_0}\,,\, N_{J_1}\}.$$

Dann gilt für alle $n \geq N$ entweder $n = n_j$ für ein $j \geq J_0$ oder $n = m_j$ für ein $j \geq J_1$. In jedem der beiden Fälle folgt daher

$$\|\boldsymbol{a}^n - \boldsymbol{a}\| < \varepsilon.$$

$\square$

Aufgabe 10.10 *a) Negieren Sie die Aussage: "Die Folge $\{\boldsymbol{a}^n\}$ ist konvergent."*

b) Prüfen Sie die Folgen $\{a_n\}$ und $\{b_n\}$, die definiert sind durch

$$a_n := (-1)^n(3 - \frac{1}{n})\ , \quad b_n := n \cdot \Big(1 - (-1)^n(1 + \frac{1}{n^2})\Big),$$

auf Konvergenz.

Lsung von Aufgabe 10.10
a): Die Negation von

> "es existiert $\boldsymbol{a} \in V$, so dass es für alle $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt mit $\|\boldsymbol{a}^n - \boldsymbol{a}\| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$"

ist

> "für alle $\boldsymbol{a} \in V$ gibt es ein $\varepsilon > 0$, so dass für alle $N \in \mathbb{N}$ ein $n \geq N$ existiert mit $\|\boldsymbol{a}^n - \boldsymbol{a}\| \geq \varepsilon$,"

oder mit anderen Worten

"für alle $\boldsymbol{a} \in V$ gibt es ein $\varepsilon > 0$ und ein Teilfolge $\{n_j\} \subset \mathbb{N}$, so dass $\|\boldsymbol{a}^{n_j} - \boldsymbol{a}\| \geq \varepsilon$ für alle j gilt."

b): Wir führen den Nachweis, dass die Folge $\{a_n\}$ divergiert indirekt, nehmen also an, dass die Folge $\{a_n\}$ gegen ein $a \in \mathbb{R}$ konvergiert. Wir wählen $\varepsilon = 1$ und zeigen, dass es eine Teilfolge $\{a_{n_j}\}$ von $\{a_n\}$ gibt mit $|a_{n_j} - a| \geq 1$ für alle j.

Ist $a \geq 0$, so wählen wir $n_j = 2j - 1$, $j \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$a_{n_j} = -\Big(3 - \frac{1}{2j-1}\Big) \leq -2, \quad \text{und damit } |a_{n_j} - a| \geq a + 2 > \varepsilon.$$

Für $a < 0$ erhält man genauso für $n_j = 2j$, $j \in \mathbb{N}$,

$$a_{n_j} = 3 - \frac{1}{2j} > 2, \quad \text{d.h. } |a_{n_j} - a| \geq |a| + 2 > \varepsilon.$$

Die Folge $\{b_n\}$ divergiert, da die Teilfolge $\{b_{n_j}\}$, $n_j := 2j - 1$, wegen

$$b_{n_j} = (2j-1) \cdot \Big(1 + (1 + \frac{1}{(2j-1)^2})\Big) > 2(2j-1)$$

unbeschränkt ist. □

Aufgabe 10.11 *Es sei* $\{\boldsymbol{a}^n\} \subset V$ *eine Folge in dem normierten Raum* V *und* $k \in \mathbb{N}$ *fest. Wir definieren hiermit die Folgen* $\{\boldsymbol{b}^n\}$ *und* $\{\boldsymbol{c}^n\}$ *durch* $\boldsymbol{b}^n := \boldsymbol{a}^{n+k}$ *und* $\boldsymbol{c}^n := \boldsymbol{a}^{nk}$. *Zeigen Sie*

a) $\{\boldsymbol{a}^n\}$ *konvergiert genau dann, wenn* $\{\boldsymbol{b}^n\}$ *konvergiert,*

b) konvergiert $\{\boldsymbol{a}^n\}$, *so konvergiert auch* $\{\boldsymbol{c}^n\}$.

In beiden Fällen stimmen die Grenzwerte von $\{\boldsymbol{a}^n\}$ *und* $\{\boldsymbol{b}^n\}$ *bzw.* $\{\boldsymbol{a}^n\}$ *und* $\{\boldsymbol{c}^n\}$ *überein.*

Kann man die Behauptung in b) auch umkehren?

Lsung von Aufgabe 10.11
a): Ist $\{\boldsymbol{a}^n\}$ konvergent gegen $\boldsymbol{a}$, so folgt die Konvergenz der Teilfolge $\{\boldsymbol{b}^n\}$ von $\{\boldsymbol{a}^n\}$ gegen $\boldsymbol{a}$ aus Satz 10.??.

Ist umgekehrt $\{\boldsymbol{b}^n\}$ konvergent gegen $\boldsymbol{b}$, so gibt es zu gegebenem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit $\|\boldsymbol{b}^n - \boldsymbol{b}\| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$, und daher folgt für für alle $n \geq M := N + k$

$$\|\boldsymbol{a}^n - \boldsymbol{b}\| = \|\boldsymbol{b}^{n-k} - \boldsymbol{b}\| < \varepsilon.$$

b): Ist $\{\boldsymbol{a}^n\}$ konvergent gegen $\boldsymbol{a}$, so folgt die Konvergenz der Teilfolge $\{\boldsymbol{c}^n\}$ von $\{\boldsymbol{a}^n\}$ gegen $\boldsymbol{a}$ aus Satz 10.??.

Die Umkehrung gilt nicht. Wir wählen z.B. die Folge $\{a_n\}$, $a_n := (-1)^n$ und $k = 2$. Dann ist die Folge $\{c_n\}$, $c_n = a_{2k} = 1$ konstant, also konvergent, aber $\{a_n\}$ konvergiert nicht. □

Aufgabe 10.12 *Es sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine bijektive Abbildung und $\{\boldsymbol{a}^n\}$ eine Folge. Dann heißt die Folge $\{\boldsymbol{b}^n\}$, die definiert ist durch $\boldsymbol{b}^n := \boldsymbol{a}^{f(n)}$ eine* **Umnumerierung** *von $\{\boldsymbol{a}^n\}$. Zeigen Sie, dass die Folge $\{\boldsymbol{a}^n\}$ genau dann konvergiert, wenn jede Umnumerierung von $\{\boldsymbol{a}^n\}$ konvergiert, und dass die Grenzwerte aller Umnumerierungen dann übereinstimmen.*

Lsung von Aufgabe 10.12

Es sei die Folge $\{\boldsymbol{a}^n\}$ konvergent gegen $\boldsymbol{a}$, und es sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Dann gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so dass

$$\|\boldsymbol{a}^n - \boldsymbol{a}\| < \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq N$$

gilt.

Es sei $\{\boldsymbol{b}^n\}$ irgendeine Umnumerierung von $\{\boldsymbol{a}^n\}$. Wir wählen

$$M := \max\Big\{f^{-1}(k) \,:\, k \in \{1, \ldots, N\}\Big\}.$$

Dann gilt für alle $k \geq M$ zunächst $k \notin \{f^{-1}(j) \,:\, j = 1, \ldots, N\}$, und daher $f(k) \notin \{1, \ldots, N\}$, d.h. $f(k) > N$. Es folgt also

$$\|\boldsymbol{b}^k - \boldsymbol{a}\| = \|\boldsymbol{a}^{f(k)} - \boldsymbol{a}\| < \varepsilon \quad \text{für alle } k \geq M,$$

und daher konvergiert auch $\{\boldsymbol{b}^n\}$ gegen $\boldsymbol{a}$.

Konvergiert umgekehrt jede Umnumerierung von $\{\boldsymbol{a}^n\}$, so auch diejenige zur bijektiven Abildung $j : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $j(n) = n$. Dies ist aber die Folge $\{\boldsymbol{a}^n\}$. □

Aufgabe 10.13 *Es konvergiere die Folge $\{\boldsymbol{a}^n\}$ gegen $\boldsymbol{a}$. Zeigen Sie, dass dann auch die Folge der arithmetischen Mittel*

$$\{\boldsymbol{b}^n\}, \quad \boldsymbol{b}^n := \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{a}^j,$$

gegen $\boldsymbol{a}$ konvergiert.

Gilt auch die Umkehrung, folgt aus der Konvergenz von $\{\boldsymbol{b}^n\}$ auch die Konvergenz der Ausgangsfolge $\{\boldsymbol{a}^n\}$?

Lsung von Aufgabe 10.13

Zunächst folgt aus der Konvergenz der Folge $\{\boldsymbol{a}^n\}$ die Beschränktheit dieser Folge und damit auch die Beschränktheit der Folge $\{\boldsymbol{a}^n - \boldsymbol{a}\}$. Es gibt also ein $K \geq 0$ mit

$$\|\boldsymbol{a}^n - \boldsymbol{a}\| \leq K \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Wegen der Konvergenz von $\{\boldsymbol{a}^n\}$ gibt es zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit $\|\boldsymbol{a}^n - \boldsymbol{a}\| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$. Hiermit folgt

$$\begin{aligned}
\Big\|\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n} \boldsymbol{a}^j - \boldsymbol{a}\Big\| &= \Big\|\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} (\boldsymbol{a}^j - \boldsymbol{a})\Big\| \leq \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \|\boldsymbol{a}^j - \boldsymbol{a}\| \\
&= \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{N} \|\boldsymbol{a}^j - \boldsymbol{a}\| + \frac{1}{n}\sum_{j=N+1}^{n} \|\boldsymbol{a}^j - \boldsymbol{a}\| \\
&\leq \frac{NK}{n} + \frac{(n-N)\varepsilon}{n}.
\end{aligned}$$

Da $\{(NK)/n\}$ eine Nullfolge ist und $\{(n-N)/n\}$ gegen 1 konvergiert, zeigt die letzte Ungleichung, dass $\|\boldsymbol{b}^n - \boldsymbol{a}\|$ für wachsendes n beliebig klein wird. Entsprechend der Bemerkung 10.?? ist also die Konvergenz von $\{\boldsymbol{b}^n\}$ gegen $\boldsymbol{a}$ gezeigt.

Man kann natürlich auch den Beweis noch einmal durchgehen und alles so hindrehen, dass am Ende ein schönes ε steht: Ist $\varepsilon > 0$ vorgegeben, so wählen wir $N \in \mathbb{N}$ so groß, dass $\|\boldsymbol{a}^n - \boldsymbol{a}\| < \varepsilon/2$ für alle $n \geq N$ gilt. Dann folgt wie oben

$$\Big\|\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n} \boldsymbol{a}^j - \boldsymbol{a}\Big\| \leq \frac{NK}{n} + \frac{(n-N)\varepsilon}{2n} \leq \frac{NK}{n} + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Wählen wir nun also

$$M := \max\Big\{N, \lfloor\frac{2NK}{\varepsilon}\rfloor + 1\Big\},$$

so erhalten wir schließlich

$$\Big\|\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{\boldsymbol{a}^j} - \boldsymbol{a}\Big\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Diese letzte Rechenübung hat uns aber keine neuen Erkenntnisse gebracht.

Die Umkehrung gilt natürlich nicht, denn für $a_n := (-1)^n$ ist die Folge der arithmetischen Mittel eine Nullfolge, während $\{a_n\}$ nicht konvergiert. □

Aufgabe 10.14 *Es sei V ein normierter Vektorraum und X die Menge aller konvergenten Folgen in V. Zeigen Sie, dass*

a) X mit der gliedweisen Addition und Multiplikation mit Skalaren

$$\{a_n\} + \{b_n\} := \{a_n + b_n\}\,, \quad \lambda \cdot \{a_n\} := \{\lambda \cdot a_n\}$$

ein Vektorraum ist.

b) die Abbildung

$$f\,:\,X \to V\,, \quad \{a_n\} \mapsto \lim_{n\to\infty} a_n,$$

linear ist.

Lsung von Aufgabe 10.14
a): Da die Menge aller Folgen in V ein Vektorraum ist, haben wir nur die Abgeschlossenheit der Menge der konvergenten Folgen gegenüber der Addition und Multiplikation mit Skalaren zu prüfen. Dies ist aber gerade der Inhalt des Satzes 10.??., der besagt, dass mit $\{a_n\}$ und $\{b_n\}$ auch die Folge $\{a_n + b_n\}$ konvergiert und dass mit $\{a_n\}$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ auch $\{\lambda \cdot a_n\}$ konvergiert.

b): Die Linearität der Abbildung f folgt ebenfalls aus Satz 10.??., denn für $\lambda \in \mathbb{R}$ und $\{a_n\}, \{b_n\} \in X$ gilt

$$\begin{aligned} f(\{a_n\}) + f(\{b_n\}) &= \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = f(\{a_n\} + \{b_n\}) \\ f(\lambda \cdot \{a_n\}) &= \lim_{n\to\infty} (\lambda \cdot a_n) = \lambda \cdot \lim_{n\to\infty} a_n = \lambda \cdot f(\{a_n\}). \end{aligned}$$

□

Aufgabe 10.15 *Es seien $\{a_n\}, \{b_n\} \subset \mathbb{R}$ konvergente Zahlenfolgen mit*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a, \quad \lim_{n\to\infty} b_n = b.$$

Zeigen Sie, dass die Folgen $\{c_n\}$ und $\{d_n\}$, die definiert sind durch

$$c_n := \min(a_n, b_n)\,, \quad d_n := \max(a_n, b_n),$$

konvergieren, und bestimmen Sie ihre Grenzwerte.

Lsung von Aufgabe 10.15
Die Vermutung liegt nahe, dass

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \min(a, b), \quad \lim_{n\to\infty} d_n = \max(a, b)$$

gilt. Wir werden dies beweisen.

Es sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Dann gibt es Zahlen $N_1 \in \mathbb{N}$ und $\mathbb{N}_2 \in \mathbb{N}$ mit

$$a - \varepsilon \leq a_n \leq a + \varepsilon \ \forall n \geq N_1 \ , \quad \text{und} \quad b - \varepsilon \leq b_n \leq b + \varepsilon \ \forall n \geq N_2.$$

Es sei zunächst $a = b$. Dann gilt

$$a - \varepsilon \leq a_n, b_n \leq a + \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq N := \max(N_1, N_2),$$

und daher auch

$$a - \varepsilon \leq c_n, d_n \leq a + \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq N := \max(N_1, N_2).$$

Es gilt also

$$\lim_{n\to\infty} c_n = a = \min(a, b) \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty} d_n = a = \max(a, b).$$

Es sei nun $a < b$ und ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\varepsilon < 0.5(b - a)$. Dann gilt für alle $n \geq N$

$$a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon < b - \varepsilon < b_n < b + \varepsilon.$$

Hieraus folgt $c_n = a_n$ und $d_n = b_n$ für alle $n \geq N$, und daher gilt

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} a_n = a = \min(a, b)$$

und

$$\lim_{n\to\infty} d_n = \lim_{n\to\infty} b_n = b = \max(a, b).$$

Den Fall $b < a$ behandelt man genauso, wobei die Rollen von a und b getauscht werden. $\square$

10.3 Reelle Zahlenfolgen

Aufgabe 10.16 *Untersuchen Sie die angegebenen Zahlenfolgen auf Beschränktheit und Monotonie:*

a) : $a_n := n - \dfrac{1}{n}$, b) : $b_n := n^2 + (-1)^n$,

c) : $c_n := \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$, d) : $d_n := n\sqrt{1 + 1/(n^2)}$,

e) : $e_n := n\Big(2 - \sqrt{4 - 1/n}\Big)$, f) : $f_{n+1} := \dfrac{\alpha}{\beta + f_n}$, $f_1 := \dfrac{\alpha}{\beta}$,

g) : $g_{n+1} := \sqrt{\alpha + g_n^2}$, $g_0 := 0$, h) : $h_{n+1} := \sqrt{\alpha + h_n}$, $h_0 := 0$.

Dabei sind α und β gegebene positive Konstante.

Lsung von Aufgabe 10.16

a): Die Folge $\{a_n\}$ ist streng monoton wachsend, denn es gilt

$$a_n < a_{n+1} \iff n - \frac{1}{n} < n + 1 - \frac{1}{n+1} \iff \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} < 1.$$

Die letzte Ungleichung ist offenbar für alle n erfüllt (der Ausdruck auf der linken Seite ist sogar negativ).

Da die Folge $\{a_n\}$ monoton wächst, ist sie nach unten beschränkt durch $a_n \geq a_1 = 0$. Nach oben ist sie unbeschränkt.

b): Die Folge $\{b_n\}$ ist streng monoton wachsend, denn es gilt

$$\begin{aligned} b_n < b_{n+1} &\iff n^2 + (-1)^n < (n+1)^2 + (-1)^{n+1} = n^2 + 2n + 1 + (-1)^{n+1} \\ &\iff -1 + (-1)^n - (-1)^{n+1} < 2n. \end{aligned}$$

Die letzte Ungleichung ist stets erfüllt, da die linke Seite größer oder gleich 2 ist und die linke Seite kleiner oder gleich 1.

Aus der Monotonie folgt wieder die Beschränktheit nach unten durch $b_n \geq b_1 = 0$. Nach oben ist die Folge $\{b_n\}$ nicht beschränkt.

c): Es gilt

$$\begin{aligned} c_n &= \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \\ &= \frac{(n+1) - n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}. \end{aligned}$$

Hieraus liest man unmittelbar ab, dass die Folge $\{c_n\}$ streng monoton fällt.

$\{c_n\}$ ist nach oben beschränkt durch $c_n \geq c_1 = \sqrt{2} - 1$ und nach unten beschränkt durch $c_n \geq 0$.

d): Es ist

$$d_n = n\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} = \sqrt{n^2 + 1}.$$

Daher ist $\{d_n\}$ offenbar streng monoton wachsend, nach unten beschränkt durch $d_n \geq d_1 = \sqrt{2}$ und nach oben unbeschränkt.

e): Die Folge $\{e_n\}$ vereinfachen wir (ähnlich wie in Teil c)) durch geeignetes Erweitern. Es gilt

$$\begin{aligned} e_n &= n\Big(2 - \sqrt{4 - \frac{1}{n}}\Big) = n \cdot \frac{\Big(2 - \sqrt{4 - \frac{1}{n}}\Big)\Big(2 + \sqrt{4 - \frac{1}{n}}\Big)}{2 + \sqrt{4 - \frac{1}{n}}} \\ &= n \cdot \frac{4 - (4 - \frac{1}{n})}{2 + \sqrt{4 - \frac{1}{n}}} = \frac{1}{2 + \sqrt{4 - \frac{1}{n}}}. \end{aligned}$$

Die Folge $\{1/n\}$ fällt streng monoton; daher wächst die Folge $\{4 - 1/n\}$, und mit ihr auch die Folge $\{2 + \sqrt{4 - 1/n}\}$ streng monoton, und da die letzte Folge positive Glieder hat, fällt die Folge $\{e_n\}$ streng monoton.

Eine obere Schranke erhält man aus $e_n \leq e_1 = 2 - \sqrt{3}$, eine untere Schranke ist $e_n \geq 0$.

f): Es ist $f_1 > 0$. Daher folgt

$$f_2 = \frac{\alpha}{\beta + f_1} < \frac{\alpha}{\beta} = f_1.$$

Wenn also die Folge $\{f_n\}$ monoton ist, so muss sie monoton fallend sein.

Wir versuchen dies durch vollständige Induktion zu beweisen. Die Induktionsverankerung $f_2 < f_1$ wurde schon gezeigt. Gilt $f_n \leq f_{n-1}$ für ein $n \geq 2$, so folgt

$$f_{n+1} = \frac{\alpha}{\beta + f_n} \geq \frac{\alpha}{\beta + f_{n-1}} = f_n.$$

Die Folge $\{f_n\}$ ist also weder monoton wachsend noch fallend.

Die Folge $\{f_n\}$ ist offenbar nach unten beschränkt durch $f_n \geq f_1 = \alpha/\beta$. Hieraus erhält man für alle $n \geq 2$

$$f_n = \frac{\alpha}{\beta + f_{n-1}} \leq \frac{\alpha}{\beta + f_1} = f_2,$$

und dies ist die Beschränktheit nach oben.

g): Die Folge $\{g_n\}$ ist streng monoton wachsend, denn es gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$g_{n+1} = \sqrt{\alpha + g_n^2} > \sqrt{g_n^2} = g_n.$$

Sie ist nach unten beschränkt durch $g_n \geq g_1 = \alpha$, aber nicht nach oben beschränkt. Dies liest man ab aus

$$g_{n+1}^2 = \alpha + g_n^2 = \ldots = n \cdot \alpha + g_1^2.$$

h): Um eine Vorstellung vom Monotonieverhalten der Folge $\{h_n\}$ zu erhalten, betrachten wir die ersten beiden Glieder $h_1 = \alpha$ und $h_2 = \sqrt{2\alpha}$. Hieraus liest man unmittelbar ab, dass $h_1 = h_2$ für $\alpha = 2$ gilt und dann auch $h_n = h_1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. In diesem Fall ist die Folge also monoton wachsend und auch monoton fallend (aber nicht streng).

Für $\alpha > 2$ gilt $h_2 < \sqrt{\alpha^2} = h_1$, und man kann monotones Fallen erwarten. Tatsächlich folgt aus $h_{n-1} < h_n$

$$h_{n+1} = \sqrt{\alpha + h_n} < \sqrt{\alpha + h_{n-1}} = h_n,$$

und die Folge fällt streng monoton. Mit einem ganz ähnlichen Schluss erhält man für $\alpha < 2$, dass die Folge $\{h_n\}$ streng monoton wächst.

Für die konstante Folge im Falle $\alpha = 2$ ist 2 natürlich sowohl eine untere als auch obere Schranke. Im Falle $\alpha > 2$ ist $h_1 = \alpha$ eine obere Schranke und 2 eine untere Schranke, denn aus $h_n \geq 2$ folgt $h_{n+1} = \sqrt{\alpha + h_n} \geq 2$, und genauso erhält man, dass im Falle $\alpha < 2$ eine untere Schranke α und eine obere Schranke 2 ist. $\square$

Aufgabe 10.17 *Wir betrachten noch einmal das Problem des Evakuierens eines Behälters. Welcher Druck p_∞ kann dort in dem Volumen V erreicht werden?*

Lsung von Aufgabe 10.17

Wir haben gesehen, dass nach dem n-ten Schritt der Druck in V die Rekursion

$$p_n = \frac{V}{V+H+A} p_{n-1} + \frac{H}{V+H+A} p_0, \quad n \geq 1$$

erfüllt. Mit den Bezeichnungen

$$\alpha := \frac{V}{V+H+A} \in (0,1), \quad \beta := \frac{H}{V+H+A} \in (0,1)$$

gilt also

$$p_n = \alpha p_{n-1} + \beta p_0.$$

Wegen $\alpha + \beta < 1$ gilt $p_1 < p_0$, und aus

$$p_{n+1} - p_n = (\alpha p_n + \beta p_0) - (\alpha p_{n-1} + \beta p_0) = \alpha(p_n - p_{n-1})$$

erhält man durch Induktion, dass $\{p_n\}$ monoton fallend ist.

Für den Grenzwert p_∞ vermuten wir

$$p_\infty = \alpha p_\infty + \beta p_0,$$

d.h.

$$p_\infty = \frac{\beta}{1-\alpha} p_0 = \frac{S}{S+K} p_0.$$

Tatsächlich gilt

$$\begin{aligned} p_{n+1} - p_\infty &= \alpha p_n + \beta p_0 - \frac{\beta}{1-\alpha} p_0 = \alpha p_n + \beta(1 - \frac{1}{1-\alpha}) p_0 \\ &= \alpha(p_n - \frac{\beta}{1-\alpha} p_0) = \alpha(p_n - p_\infty). \end{aligned}$$

Durch Induktion erhält man hieraus

$$p_n - p_\infty = \alpha^n (p_0 - p_\infty),$$

und wegen $\alpha < 1$ folgt

$$\lim_{n\to\infty}(p_n - p_\infty) = (p_0 - p_\infty)\lim_{n\to\infty} = 0.$$

$\square$

Aufgabe 10.18 *Bestimmen Sie die Grenzwerte der Folgen*

a) : $\{a_n\} := \Big\{\dfrac{4^{n+1}+5^n}{5^n+27.3} + \sqrt[n]{4}\Big\}$, b) : $\{b_n\} := \{\sqrt[n]{5+n^{-1}}\}$,

c) : $\{c_n\} := \{\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2-1}\}$.

Lsung von Aufgabe 10.18

a): Wenn die Folge $\{a_n\}$ konvergiert, so folgt aus den Rechenregeln in Satz 10.?? und Satz 10.??

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty}\Big(\frac{4^{n+1}+5^n}{5^n+27.3} + \sqrt[n]{4}\Big)\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{4^{n+1}}{5^n+27.3} + \lim_{n\to\infty}\frac{5^n}{5^n+27.3} + \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{4}\\
&= \lim_{n\to\infty} 4\cdot\Big(\frac{4}{5}\Big)^n\cdot\frac{1}{1+\dfrac{27.3}{5^n}} + \lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\dfrac{27.3}{5^n}} + \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{4}\\
&= 4\cdot\lim_{n\to\infty}\Big(\frac{4}{5}\Big)^n\cdot\frac{1}{1+27.3\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{5^n}} + \frac{1}{1+27.3\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{5^n}} + \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{4}\\
&= 4\cdot 0\cdot\frac{1}{1+27.3\cdot 0} + \frac{1}{1+27.3\cdot 0} + 1 = 2.
\end{aligned}$$

Wir lesen nun die eben gewonnene Gleichungskette rückwärts und erhalten mit den Rechenregeln aus der Existenz der Grenzwerte einer Zeile die Existenz der Grenzwerte der jeweils vorhergehenden Zeile und die Gültigkeit von

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 2.$$

b): Es gilt sicherlich für alle $n \in \mathbb{N}$ die Ungleichungskette

$$5 \le 5 + \frac{1}{n} \le 6.$$

Wegen der Monotonie der n–ten Wurzel erhält man hieraus

$$\sqrt[n]{5} \le \sqrt[n]{5+\frac{1}{n}} \le \sqrt[n]{6},$$

und wegen

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{5} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{6} = 1$$

folgt aus Satz 10.?? auch

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{5+\frac{1}{n}} = 1.$$

c): Es ist

$$\begin{aligned}\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1} &= \frac{(n^2+1)-(n^2-1)}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2-1}}\\ &= \frac{2}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2-1}}\\ &= \frac{2}{n}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}}\end{aligned}$$

und deshalb

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1}\right)\\ &= 2\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}}+\sqrt{1-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}}}=0.\end{aligned}$$

□

Aufgabe 10.19 *Es sei $k\in\mathbb{N}$ gegeben. Zeigen Sie, dass für $q\in\mathbb{C}$, $|q|<1$, die Folge $\{n^k\cdot q^n\}$ eine Nullfolge ist.*

Lsung von Aufgabe 10.19

Es gilt

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^k\cdot q^{n+1}}{n^k\cdot q^n} = \lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^k\cdot q = q.$$

Daher gibt es zu $p:=0.5(1+|q|)\in(|q|,1)$ ein $N\in\mathbb{N}$ mit

$$|a_{n+1}|\le p\cdot|a_n| \quad \text{für alle } n\ge N,$$

und durch vollständige Induktion erhält man

$$|a_n|\le p^{n-N}\cdot|a_N| \quad \text{für alle } n\ge N.$$

Wegen $0<p<1$ zeigt dies, dass $\{a_n\}$ eine Nullfolge ist.

Alternativ erhält man die Behauptung auch mit dem binomischen Lehrsatz. Es sei h definiert durch $|q|:=1/(1+h)$. Dann gilt $h>0$, und es folgt

$$|n^k\cdot q^n| = \frac{n^k}{(1+h)^n} = \frac{n^k}{\sum_{j=0}^n\binom{n}{j}h^j}.$$

Für $n \geq k+1$ erhält man daraus (wir verkleinern den Nenner, indem wir alle Summanden außer denjenigen mit $j = k+1$ fortlassen)

$$\begin{aligned}
|n^k \cdot q^n| &\leq \frac{n^k}{\binom{n}{k+1} h^{k+1}} = \frac{n^k \cdot (k+1)! \cdot (n-k-1)!}{n! \cdot h^{k+1}} \\
&= \frac{(k+1)!}{n \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{k}{n}\right) \cdot h^{k+1}} \\
&\leq \frac{(k+1)!}{n \cdot \left(1 - \frac{1}{k+1}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{k+1}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{k}{k+1}\right) \cdot h^{k+1}} =: \frac{K}{n}.
\end{aligned}$$

Dabei ist

$$K = \frac{(k+1)!}{\left(1 - \frac{1}{k+1}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{k+1}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{k}{k+1}\right) \cdot h^{k+1}}$$

eine Konstante, die nicht vom Folgenindex n abhängt.

Wir haben damit

$$0 \leq |n^k \cdot q^n| \leq \frac{K}{n} \quad \text{für alle } n \geq k+1,$$

gezeigt, und aus Satz 10.?? folgt, dass $\{n^k \cdot q^n\}$ eine Nullfolge ist. □

Aufgabe 10.20 *Bestimmen Sie die Grenzwerte der angegebenen Folgen, sofern diese existieren.*

a) : $a_n := \dfrac{n^3 - n^2 + 9}{4n^3 + 7n - 5}$.

b) : $b_n := n \cdot \left(\sqrt{9 + 2/n} - 3\right)$,

c) : $c_n := \sqrt{n + \sqrt{n}} - \sqrt{n - \sqrt{n}}$,

d) : $d_n := n^2\left(\sqrt{n^4 + 5} - \sqrt{n^4 - 1}\right)$,

e) : $e_n := \dfrac{\sqrt{n-1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n}}$,

f) : $f_n := \sqrt{n^2 + 3n - 1} - \sqrt{n^2 + n + 5}$,

g) : $g_n := \sqrt{5n} - \sqrt{3n}$,

h) : $h_n := \sum_{j=1}^{n} \dfrac{j}{n^2}$,

i) : $i_n := \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n+3}$.

Lsung von Aufgabe 10.20

Wir formen die angegebenen Folgenglieder um und wenden dann, ohne dies auszuführen, ähnlich wie in Aufgabe 10.18 die Rechenregeln für Grenzwerte an.

a): Es gilt

$$a_n = \frac{n^3 - n^2 + 9}{4n^3 + 7n - 5} = \frac{1 - \frac{1}{n} + 9\frac{1}{n^3}}{4 + 7\frac{1}{n^2} - 5\frac{1}{n^3}},$$

und hieraus liest man

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{4}$$

ab.

b): Es gilt

$$\begin{aligned} b_n &= n\cdot\Big(\sqrt{9+\frac{2}{n}}-3\Big) = n\cdot\frac{(\sqrt{9+2/n}-3)(\sqrt{9+2/n}+3)}{\sqrt{9+2/n}+3} \\ &= \frac{2}{\sqrt{9+2/n}+3}, \end{aligned}$$

und hieraus folgt

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \frac{2}{\lim_{n\to\infty}\sqrt{9+\frac{2}{n}}+3} = \frac{1}{3}.$$

c): Aus

$$\begin{aligned} c_n &= \sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{n-\sqrt{n}} = \frac{(n+\sqrt{n})-(n-\sqrt{n})}{\sqrt{n+\sqrt{n}}+\sqrt{n-\sqrt{n}}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{1+1/\sqrt{n}}+\sqrt{1-1/\sqrt{n}}} \end{aligned}$$

erhält man

$$\lim c_n = \frac{2}{\sqrt{1+\lim_{n\to\infty}1/\sqrt{n}}+\sqrt{1-\lim_{n\to\infty}1/\sqrt{n}}} = 1.$$

d): Es gilt

$$\begin{aligned} d_n &= n^2\Big(\sqrt{n^4+5}-\sqrt{n^4-1}\Big) = n^2\frac{(n^4+5)-(n^4-1)}{\sqrt{n^4+5}+\sqrt{n^4-1}} \\ &= \frac{6}{\sqrt{1+5/n^4}+\sqrt{1-1/n^4}}, \end{aligned}$$

und daher

$$\lim_{n\to\infty} d_n = \frac{6}{\sqrt{1+\lim_{n\to\infty}5/n^4}+\sqrt{1-\lim_{n\to\infty}1/n^4}} = 3.$$

e): Aus

$$e_n = \frac{\sqrt{n-1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n}} = \sqrt{1-1/n}-1$$

folgt

$$\lim_{n\to\infty} e_n = 0.$$

f): Es gilt

$$\begin{aligned} f_n &= \sqrt{n^2+3n-1}-\sqrt{n^2+n+5} = \frac{(n^2+3n-1)-(n^2+n+5)}{\sqrt{n^2+3n-1}+\sqrt{n^2+n+5}} \\ &= \frac{2n-6}{\sqrt{n^2+3n-1}+\sqrt{n^2+n+5}} = \frac{2-6/n}{\sqrt{1+3/n-1/n^2}+\sqrt{1+1/n+5/n}}, \end{aligned}$$

und daher

$$\lim_{n\to\infty} f_n = 1.$$

g): Es gilt

$$g_n = \sqrt{5n}-\sqrt{3n} = (\sqrt{5}-\sqrt{3})\sqrt{n},$$

und daher divergiert die Folge $\{g_n\}$ bestimmt gegen ∞.

h): Es ist (vgl. Beispiel 1.12.)

$$h_n = \sum_{j=1}^{n} \frac{j}{n^2} = \frac{1}{n^2}\sum_{j=1}^{n} j = \frac{1}{n^2}\cdot\frac{1}{2}n(n+1) = \frac{1}{2}\cdot\Big(1+\frac{1}{n}\Big),$$

und daher

$$\lim_{n\to\infty} h_n = \frac{1}{2}.$$

i): Es gilt

$$i_n = \Big(1+\frac{1}{n}\Big)^{n+3} = \Big(1+\frac{1}{n}\Big)^{n}\cdot\Big(1+\frac{1}{n}\Big)^{3}.$$

Daher folgt

$$\lim_{n\to\infty} i_n = \lim_{n\to\infty}\Big(1+\frac{1}{n}\Big)^{n}\cdot\lim_{n\to\infty}\Big(1+\frac{1}{n}\Big)^{3} = e.$$

□

Aufgabe 10.21 *Es seien $0 < a_0 < b_0$ gegeben. Die Folgen $\{a_n\}$ und $\{b_n\}$ seien rekursiv definiert durch*

$$a_{n+1} := 2\frac{a_n b_n}{a_n+b_n}, \quad b_{n+1} := \frac{a_n+b_n}{2}.$$

Zeigen Sie, dass diese Folgen eine Intervallschachtelung definieren.

Bestimmen Sie den Grenzwert der Folgen $\{a_n\}$ und $\{b_n\}$.

Lsung von Aufgabe 10.21

Es gilt für alle $n \geq 0$

$$\begin{aligned} b_{n+1}-a_{n+1} &= \frac{a_n+b_n}{2} - 2\frac{a_n b_n}{a_n+b_n} = \frac{(a_n+b_n)^2-4a_n b_n}{2(a_n+b_n)} \\ &= \frac{a_n^2-2a_n b_n+b_n^2}{2(a_n+b_n)} = \frac{(b_n-a_n)^2}{2(a_n+b_n)}. \end{aligned}$$

Hieraus liest man ab:

$$\begin{aligned} a_n &\leq b_n \qquad \text{für alle } n \\ b_{n+1} &= \frac{1}{2}(a_n + b_n) \leq b_n \\ a_{n+1} &= 2\frac{a_n b_n}{a_n + b_n} \geq \frac{a_n b_n}{b_n} = a_n. \end{aligned}$$

Es ist also $\{a_n\}$ monoton wachsend und durch jedes b_n nach oben beschränkt und $\{b_n\}$ ist monoton fallend und durch jedes a_n nach unten beschränkt. Insbesondere sind beide Folgen konvergent.

Dass beide Folgen denselben Grenzwert besitzen, erhält man aus der Rekursionsformel für b_n. Aus ihr folgt

$$\lim_{n\to\infty} b_{n+1} = \frac{1}{2}\Big(\lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n\Big)$$

und daher

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n.$$

Den Wert des Limes erhält man so: Es gilt

$$a_{n+1} \cdot b_{n+1} = 2\frac{a_n \cdot b_n}{a_n + b_n} \cdot \frac{a_n + b_n}{2} = a_n \cdot b_n \quad \text{für alle } n \geq 0.$$

Damit folgt

$$\Big(\lim_{n\to\infty} a_n\Big)^2 = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} (a_n b_n) = a_0 b_0,$$

d.h.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \sqrt{a_0 b_0}.$$

Die Konvergenz ist sehr schnell (quadratisch). Für $a_0 = 1$ und $b_0 = 2$ lauten die ersten Folgenglieder zur Bestimmung von $\sqrt{2}$

n	a_n	b_n
1	1	2
2	$\frac{4}{3} = 1.33\ldots$	$\frac{3}{2} = 1.5$
3	$\frac{24}{17} = 1.411\ldots$	$\frac{17}{12} = 1.416\ldots$
4	$\frac{816}{577} = 1.414211\ldots$	$\frac{577}{408} = 1.414215\ldots$

□

Aufgabe 10.22 *Es seien $0 < a_0 < b_0$ gegeben und die Folgen $\{a_n\}$ und $\{b_n\}$ rekursiv definiert durch*

$$a_{n+1} := \sqrt{a_n b_n}\,, \quad b_{n+1} := \frac{1}{2}(a_n + b_n).$$

Zeigen Sie, dass $\{a_n\}$ und $\{b_n\}$ eine Intervallschachtelung definieren.

Anmerkung: Der gemeinsame Grenzwert der Folgen $\{a_n\}$ und $\{b_n\}$ heißt das **arithmetisch-geometrische Mittel** der Zahlen a_0 und b_0.

Lsung von Aufgabe 10.22
Es gilt

$$0 < a_n < a_{n+1} < b_{n+1} < b_n \quad \text{für alle } n \geq 0,$$

denn aus $0 < a_n < b_n$ folgt

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} > a_n \ , \quad b_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n) < b_n,$$

sowie

$$b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{1}{2}\Big(a_n - 2\sqrt{a_n b_n} + b_n\Big) = \frac{1}{2}\Big(\sqrt{b_n} - \sqrt{a_n}\Big)^2 > 0.$$

Aus der Monotonie und Beschränktheit folgt, dass beide Folgen konvergieren.

Dass beide denselben Grenzwert besitzen, folgt aus einer der beiden Rekursionsformeln, z.B. aus

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sqrt{\lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n} \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n.$$

Die Konvergenz ist sogar quadratisch, denn es gilt

$$\begin{aligned} b_{n+1} - a_{n+1} &= \frac{1}{2}(\sqrt{b_n} - \sqrt{a_n}) = \frac{1}{2}\Big(\frac{b_n - a_n}{\sqrt{b_n} + \sqrt{a_n}}\Big)^2 \\ &\leq \frac{1}{4\sqrt{a_0}}(b_n - a_n)^2. \end{aligned}$$

□

Aufgabe 10.23 *Es seien* $0 < \alpha_0 < \alpha_1$ *gegeben. Die Folge* $\{\alpha_n\}$ *sei rekursiv definiert durch*

a) $\alpha_{n+1} := \frac{1}{2}(\alpha_n + \alpha_{n-1})$, $\quad n \geq 1$,

b) $\alpha_{n+1} := \sqrt{\alpha_n \cdot \alpha_{n-1}}$, $\quad n \geq 1$.

Zeigen Sie, dass die Folgen $\{a_n\}$ *und* $\{b_n\}$*, die definiert sind durch*

$$a_n := \alpha_{2n-2} \ , \quad b_n := \alpha_{2n-1},$$

eine Intervallschachtelung definieren.

Lsung von Aufgabe 10.23
a): Es gilt wegen $0 < \alpha_0 < \alpha_1$

$$\begin{aligned}\alpha_2 &= \frac{1}{2}(\alpha_0 + \alpha_1) \quad \Longrightarrow \quad \alpha_0 < \alpha_2 < \alpha_1,\\ \alpha_3 &= \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2) \quad \Longrightarrow \quad \alpha_2 < \alpha_3 < \alpha_1.\end{aligned}$$

Daher ist

$$a_1 = \alpha_0 < \alpha_2 = a_2 < b_2 = \alpha_3 < \alpha_1 = b_1.$$

Wir nehmen an, dass für ein $n \geq 0$

$$a_n = \alpha_{2n-2} < \alpha_{2n} = a_{n+1} < b_{n+1} = \alpha_{2n+1} < \alpha_{2n-1} = b_n$$

gilt. Dann erhält man wie im ersten Schritt

$$\begin{aligned}\alpha_{2n+2} &= \frac{1}{2}(\alpha_{2n} + \alpha_{2n+1}) \quad \Longrightarrow \quad \alpha_{2n} < \alpha_{2n+2} < \alpha_{2n+1},\\ \alpha_{2n+3} &= \frac{1}{2}(\alpha_{2n+1} + \alpha_{2n+2}) \quad \Longrightarrow \quad \alpha_{2n+2} < \alpha_{2n+3} < \alpha_{2n+1},\end{aligned}$$

und daher

$$a_{n+1} = \alpha_{2n} < \alpha_{2n+2} = a_{n+2} < b_{n+2} = \alpha_{2n+3} < \alpha_{2n+1} = b_{n+1}.$$

Damit sind die Monotonieeigenschaften einer Intervallschachtelung für die Folgen $\{a_n\}$ und $\{b_n\}$ gezeigt. Insbesondere konvergieren beide Folgen. Es gibt also $a \leq b$ mit

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n \ , \quad b = \lim_{n\to\infty} b_n,$$

und aus der Rekursionsvorschrift erhält man

$$a = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \alpha_{2n} = \frac{1}{2}\Big(\lim_{n\to\infty} \alpha_{2n-1} + \lim_{n\to\infty} \alpha_{2n-2}\Big) = \frac{1}{2}(b + a),$$

d.h. $a = b$.

b): Der Beweis für die Folge der geometrischen Mittel verläuft analog dem für die Folge der arithmetischen Mittel in a). □

Aufgabe 10.24 *Es sei $\alpha > 0$ gegeben. Zeigen Sie, dass die rekursiv definierte Folge $\{a_n\}$,*

$$a_{n+1} := \sqrt{\alpha + a_n} \ , \quad a_1 := \alpha,$$

konvergiert, und bestimmen Sie ihren Grenzwert.

Lsung von Aufgabe 10.24

Wir wissen bereits aus Aufgabe 10.16 h), dass die Folge $\{a_n\}$ monoton (und zwar für $\alpha \leq 2$ monoton wachsend und für $\alpha \geq 2$ monoton fallend) und beschränkt ist. Nach Satz 10.??. konvergiert sie also. Nach den Rechenregeln gilt für einen möglichen Grenzwert a

$$a = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\alpha + a_n} = \sqrt{\alpha + \lim_{n\to\infty} a_n} = \sqrt{\alpha + a}.$$

a erfüllt also die quadratische Gleichung

$$a^2 = \alpha + a \quad \Longleftrightarrow \quad a_\pm = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{0.25 + \alpha}.$$

Offensichtlich ist a_- negativ, und da alle Folgenglieder a_n nichtnegativ sind, kommt als Grenzwert nur a_+ in Frage. Es gilt also

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\frac{1}{2} + \sqrt{0.25 + \alpha}.$$

□

Aufgabe 10.25 *Es seien $\beta > \alpha > 0$ gegeben, und es sei $\{a_n\}$ definiert durch*

$$a_1 := \alpha, \quad a_{n+1} := \sqrt{\frac{a_n^2 + \alpha\beta^2}{\alpha + 1}}, \quad n \geq 1\ .$$

Zeigen Sie, dass $\{a_n\}$ konvergiert und berechnen Sie den Grenzwert.

Lsung von Aufgabe 10.25

Die Folge $\{a_n\}$ ist nach oben beschränkt durch β, denn $a_1 = \alpha < \beta$ ist vorausgesetzt, und aus $a_n \leq \beta$ für ein $n \in \mathbb{N}$ folgt

$$a_{n+1}^2 = \frac{a_n^2 + \alpha\beta^2}{\alpha + 1} \leq \frac{\beta^2 + \alpha\beta^2}{\alpha + 1} = \beta.$$

Hieraus erhält man, dass die Folge $\{a_n\}$ monoton wächst, denn es gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$a_{n+1}^2 = \frac{a_n^2 + \alpha\beta^2}{1 + \alpha} \geq \frac{a_n^2 + \alpha a_n^2}{\alpha + 1} = a_n^2.$$

Die Folge $\{a_n\}$ konvergiert also, und aus den Rechenregeln für Grenzwerte folgt für den Grenzwert

$$\begin{aligned} a &= \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{a_n^2 + \alpha\beta^2}{\alpha + 1}} = \sqrt{\lim_{n\to\infty} \frac{a_n^2 + \alpha\beta^2}{\alpha + 1}} \\ &= \sqrt{\frac{1}{\alpha + 1}\Big(\lim_{n\to\infty} a_n^2 + \alpha\beta^2\Big)} = \sqrt{\frac{a^2 + \alpha\beta^2}{\alpha + 1}}. \end{aligned}$$

Löst man diese Gleichung nach a auf, so folgt

$$a = \beta.$$

□

Aufgabe 10.26 *Es seien $\{a_n\}$ und $\{b_n\}$ Zahlenfolgen, für die $\{a_n + b_n\}$ gegen α und $\{a_n - b_n\}$ gegen β konvergiert.*

Begründen Sie, dass der Grenzwert von $\{a_n \cdot b_n\}$ existiert und berechnen Sie ihn.

Lsung von Aufgabe 10.26

Mit $\{a_n + b_n\}$ und $\{a_n - b_n\}$ sind wegen

$$a_n = \frac{1}{2}\Big[(a_n + b_n) + (a_n - b_n)\Big], \quad b_n = \frac{1}{2}\Big[(a_n + b_n) - (a_n - b_n)\Big]$$

auch die Folgen $\{a_n\}$ und $\{b_n\}$ konvergent, und es gilt

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.5\Big(\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) + \lim_{n\to\infty} (a_n - b_n)\Big) = 0.5(\alpha + \beta)$$

und

$$\lim_{n\to\infty} b_n = 0.5\Big(\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) - \lim_{n\to\infty} (a_n - b_n)\Big) = 0.5(\alpha - \beta).$$

Hieraus folgt, dass auch die Folge $\{a_n \cdot b_n\}$ konvergiert und dass

$$\lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n = \frac{1}{4}(\alpha + \beta)(\alpha - \beta) = \frac{1}{4}(\alpha^2 - \beta^2)$$

gilt. □

Aufgabe 10.27 *Zeigen Sie, dass die Zahlenfolge $\{a_n\}$,*

$$a_n := \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{n^2 + j},$$

eine Nullfolge ist.

Lsung von Aufgabe 10.27

Es gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$0 \le a_n = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{n^2 + j} \le \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n},$$

und aus Satz 10.?? folgt die Behauptung. □

Aufgabe 10.28 *Es sei $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$ eine Folge mit positiven Gliedern, die gegen $a > 0$ konvergiert.*

Zeigen Sie, dass dann auch die Folge $\{b_n\}$ der geometrischen Mittel

$$b_n := \Big(\prod_{j=1}^{n} a_j\Big)^{1/n}$$

gegen a konvergiert.

Lsung von Aufgabe 10.28

Da $\{a_n\}$ gegen a konvergiert, gibt es zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$. Hiermit gilt

$$\begin{aligned} b_n &= \Big(\prod_{j=1}^{N-1} a_j\Big)^{1/n} \cdot \Big(\prod_{j=N}^{n} a_j\Big)^{1/n} \\ &= \Big(\prod_{j=1}^{N-1} a_j\Big)^{1/n} \cdot \Big(\frac{1}{a^{N-1}}\Big)^{1/n} \cdot \Big(a^{N-1}\Big)^{1/n} \cdot \Big(\prod_{j=N}^{n} a_j\Big)^{1/n} \\ &= \Big(\frac{1}{a^{N-1}} \cdot \prod_{j=1}^{N-1} a_j\Big)^{1/n} \cdot \Big(a^{N-1} \cdot \prod_{j=N}^{n} a_j\Big)^{1/n}. \end{aligned}$$

Nach Beispiel 10.?? konvergiert der erste Faktor (beachten Sie, dass N fest ist)

$$\lim_{n\to\infty} \Big(\frac{1}{a^{N-1}} \cdot \prod_{j=1}^{N-1} a_j\Big)^{1/n} = 1.$$

Den zweiten Faktor kann man nach oben abschätzen durch

$$\Big(a^{N-1} \cdot \prod_{j=N}^{n} a_j\Big)^{1/n} \leq \Big(a^{N-1}(a+\varepsilon)^{n-N+1}\Big)^{1/n} \leq a + \varepsilon.$$

Für $\varepsilon \leq a$ erhält man genauso

$$\Big(a^{N-1} \cdot \prod_{j=N}^{n} a_j\Big)^{1/n} \geq \Big(a^{N-1}(a-\varepsilon)^{n-N+1}\Big)^{1/n} \geq a - \varepsilon,$$

und für $\varepsilon > a$ ist diese Ungleichung trivial. Daher konvergiert der zweite Faktor gegen a, und aus Satz 10.?? folgt die Konvergenz der Folge $\{b_n\}$ gegen a. □

Aufgabe 10.29 *Es seien* $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_k$, $k \in \mathbb{N}$. *Untersuchen Sie die Folge* $\{a_n\}$,

$$a_n := \Big(\sum_{j=1}^{k} \alpha_j^n\Big)^{1/n}$$

auf Konvergenz.

Lsung von Aufgabe 10.29

Es gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\alpha_k = \Big(\alpha_k^n\Big)^{1/n} \leq \Big(\sum_{j=1}^{k} \alpha_j^n\Big)^{1/n} = a_n \leq \Big(\alpha_k^n \sum_{j=1}^{k} \frac{\alpha_j^n}{\alpha_k^n}\Big)^{1/n} \leq \alpha_k \cdot k^{1/n}.$$

Da nach Beispiel 10.?? die Folge $\{k^{1/n}\}$ gegen 1 konvergiert, folgt aus Satz 10.??

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha_k.$$

□

Aufgabe 10.30 *Für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ sei die Folge $\{a_n\}$ definiert durch*

$$a_{n+1} := \alpha a_n + \beta, \qquad n \geq 0.$$

Klären Sie, für welche Werte von α und β und welche Startwerte a_0 Konvergenz vorliegt und bestimmen Sie den Grenzwert.

Lsung von Aufgabe 10.30

Wir Bestimmen zunächst aus der rekursiven eine explizite Darstellung der Folgenglieder a_n. Um auf eine Idee zu kommen, berechnen wir einmal die ersten Glieder

$$\begin{aligned} a_1 &= \alpha \cdot a_0 + \beta, \\ a_2 &= \alpha \cdot a_1 + \beta = \alpha^2 a_0 + \alpha\beta + \beta = \alpha^2 a_0 + \beta(\alpha + 1), \\ a_3 &= \alpha \cdot a_2 + \beta = \alpha^3 a_0 + \alpha^2\beta + \alpha\beta + \beta = \alpha^2 a_0 + \beta(\alpha^2 + \alpha + 1). \end{aligned}$$

Dies führt uns zu der Vermutung

$$a_n = \alpha^n \cdot a_0 + \beta \cdot \sum_{i=0}^{n-1} \alpha^i, \quad \text{für alle } n \geq 0, \tag{10.5}$$

die man leicht durch vollständige Induktion beweisen kann. Wir verzichten darauf.

Bei der Untersuchung der Konvergenz unterscheiden wir zwei Fälle:

Ist $\alpha = 1$, so gilt

$$a_n = a_0 + n \cdot \beta, \quad \forall n \geq 0,$$

und es tritt offensichtlich Konvergenz genau dann ein, wenn $\beta = 0$ ist. In diesem Fall ist die Folge $\{a_n\}$ konstant und

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a_0.$$

Ist $\alpha \neq 1$, so können wir (10.5) schreiben als

$$a_n = \alpha^n \cdot a_0 + \beta \cdot \frac{1 - \alpha^n}{1 - \alpha} = \alpha^n \Big[a_0 - \frac{\beta}{1-\alpha}\Big] + \frac{\beta}{1-\alpha}.$$

Aus dieser Darstellung liest man unmittelbar ab, dass im Falle

$$a_0 = \frac{\beta}{1-\alpha}$$

die Folge $\{a_n\}$ konstant ist, $a_n = a_0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, und daher für alle $\alpha \neq 1$ konvergiert:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{\beta}{1-\alpha}.$$

Ist

$$a_0 \neq \frac{\beta}{1-\alpha},$$

so liegt genau dann Konvergenz vor, wenn der Faktor α^n von $a_0 - \beta/(1-\alpha)$ konvergiert, was genau dann der Fall ist, wenn $|\alpha| < 1$ ist (Der Fall $\alpha = 1$ war ja schon abgehandelt worden).

Der Grenzwert ist in diesem Falle wieder

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{\beta}{1-\alpha}.$$

Anmerkung: Dass im Falle $\alpha \neq 1$ nur der Grenzwert $\beta/(1-\alpha)$ in Frage kommt, erhält man natürlich sofort aus Satz 10.??, denn wenn die Folge $\{a_n\}$ gegen a konvergiert, so muss gelten

$$a = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} (\alpha \cdot a_n + \beta) = \alpha \cdot \lim_{n\to\infty} a_n + \beta = \alpha \cdot a + \beta,$$

und durch Auflösen dieser Gleichung erhält man als einzigen Kandidaten für den Grenzwert

$$a = \frac{\beta}{1-\alpha}.$$

□

Aufgabe 10.31 *Es seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gegeben, und es sei die Folge $\{x_n\}$ definiert durch die Differenzengleichung zweiter Ordnung*

$$x_{n+1} := \alpha x_n + \beta x_{n-1}, \quad n \geq 1. \tag{10.6}$$

Untersuchen Sie, für welche Startwerte x_0, x_1 und für welche Parameter α und β die Folge $\{x_n\}$ eine Nullfolge ist.

Hinweis: Die Differenzengleichung (10.6) wurde in Aufgabe 1.42 betrachtet. Dort wurde gezeigt: Besitzt die charakteristische Gleichung

$$\lambda^2 - \alpha\lambda - \beta = 0 \tag{10.7}$$

von (10.6) zwei verschiedene Lösungen λ_1 und λ_2, so ist die Lösung von (10.6)

$$x_n = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1}\Big((\lambda_2 x_0 - x_1)\lambda_1^n + (x_1 - \lambda_1 x_0)\lambda_2^n\Big).$$

Hat (10.7) nur eine Lösung $\tilde{\lambda}$, so ist die Lösung von (10.6)

$$x_n = x_0\tilde{\lambda}^n + n(x_1 - \tilde{\lambda}x_0)\tilde{\lambda}^{n-1}.$$

Lsung von Aufgabe 10.31

Wir betrachten zunächst den Fall, dass die charakteristische Gleichung (10.7) zwei verschiedene Lösungen $\lambda_1 \neq \lambda_2$ besitzt. Dann gilt

$$x_n = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1}\Big((\lambda_2 x_0 - x_1)\lambda_1^n + (x_1 - \lambda_1 x_0)\lambda_2^n\Big).$$

Sehr ähnlich wie in der Lösung von Aufgabe 10.30 sieht man dann ein, dass $\{x_n\}$ eine Nullfolge ist, falls

$$|\lambda_1| < 1 \quad \text{und} \quad |\lambda_2| < 1$$

gilt, dass im Falle $|\lambda_1| \geq 1$ und $|\lambda_2| < 1$ die Anfangswerte x_0 und x_1 die Beziehung $\lambda_2 x_0 - x_1 = 0$ erfüllen müssen und im Falle $|\lambda_1| < 1$ und $|\lambda_2| \geq 1$ die Beziehung $x_1 - \lambda_1 x_0 = 0$, und dass im Falle $|\lambda_1| \geq 1$ und $|\lambda_2| \geq 1$ die Anfangsbedingungen $x_0 = 0$ und $x_1 = 0$ gegeben sein müssen. In allen anderen Fällen ist $\{x_n\}$ keine Nullfolge.

Besitzt die charakteristische Gleichung (10.7) die doppelte Nullstelle $\tilde{\lambda}$, so ist die Lösung

$$x_n = x_0\tilde{\lambda}^n + n(x_1 - \tilde{\lambda}x_0)\tilde{\lambda}^{n-1}.$$

Dies ist eine Nullfolge, falls $|\tilde{\lambda}| < 1$ gilt (beachten Sie, dass nach Aufgabe 10.19 dann auch $n \cdot \tilde{\lambda}^n$ gegen 0 konvergiert). Für $|\tilde{\lambda}| \geq 1$ ist $\{x_n\}$ nur dann eine Nullfolge, wenn für die Anfangswerte $x_0 = 0$, $x_1 = 0$ gilt. □

Aufgabe 10.32 *Zeigen Sie, dass*

$$\lim \sqrt[n]{n} = 1$$

gilt.

Hinweis Zeigen Sie zunächst, dass die Folge $\{\sqrt[n]{n}\}$ konvergiert, und weisen Sie dann für den Grenzwert a nach, dass $a^2 = a$ gilt.

Lsung von Aufgabe 10.32

Es sei $a_n := \sqrt[n]{n}$. Dann gilt

$$\Big(\frac{a_n}{a_{n+1}}\Big)^{n(n+1)} = \frac{n^{n+1}}{(n+1)^n} = n \cdot \Big(\frac{n}{n+1}\Big)^n = \frac{n}{\Big(1+\frac{1}{n}\Big)^n}.$$

Da die Folge $(1 + \frac{1}{n})^n$ konvergiert, ist sie beschränkt. Daher gibt es ein $K > 0$ mit

$$\Big(\frac{a_n}{a_{n+1}}\Big)^{n(n+1)} = \frac{n}{\Big(1+\frac{1}{n}\Big)^n} \geq \frac{n}{K}.$$

Daher ist die Folge $\{a_n\}$ für $n \geq K$ monoton fallend, und da sie nach unten (z.B. durch 1) beschränkt ist, konvergiert sie.

Es sei

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} =: a.$$

Da jede Teilfolge von $\{a_n\}$ ebenfalls gegen a konvergiert, gilt

$$\begin{aligned} a &= \lim_{n\to\infty} a_{2n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[2n]{2n} \\ &= \lim_{n\to\infty} \sqrt[2n]{2} \cdot \lim_{n\to\infty} \sqrt{\sqrt[n]{n}}. \end{aligned}$$

Die letzte Gleichung ist gerechtfertigt, da nach Beispiel 10.?? $\lim_{n\to\infty} \sqrt[2n]{2}$ $(= 1)$ und nach Satz 10.?? $\lim_{n\to\infty} \sqrt{\sqrt[n]{n}}$ $(= \sqrt{a})$ existieren. Hiermit folgt

$$a = 1 \cdot \sqrt{a}, \quad \text{d.h. } \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

Wenn man bereits den Grenzwert 1 der Folge $\{\sqrt[n]{n}\}$ kennt oder vermutet, kann man diese Vermutung (schneller als oben) mit dem binomischen Satz (Satz 1.19) bestätigen. Dazu betrachten wir die Folge $\{b_n\}$, $b_n := \sqrt[n]{n} - 1$, und haben zu zeigen, dass $\{b_n\}$ eine Nullfolge ist. Aus dem bomischen Satz folgt (beachten Sie $b_n > 0$)

$$n = (1 + b_n)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} b_n^j \geq 1 + \binom{n}{2} b_n^2 = 1 + \frac{n(n-1)}{2} b_n^2.$$

Daher gilt für $n \geq 2$

$$b_n^2 \leq \frac{2}{n}, \quad \text{d.h. } 0 \leq b_n \leq \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}},$$

und hieraus erhält man $b_n \to 0$ für $n \to \infty$ □

Aufgabe 10.33 *Es sei $\{\alpha_n\}$ eine beschränkte Folge und*

$$a_n := \Big(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j^n\Big)^{1/n}.$$

Zeigen Sie, dass die Folge $\{a_n\}$ konvergiert und dass gilt

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sup_{j\in\mathbb{N}} \alpha_j.$$

Lsung von Aufgabe 10.33

Es gilt für festes $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \max_{j=1,\ldots,n} \alpha_j &= \Big(\max_{j=1,\ldots,n} \alpha_j^n\Big)^{1/n} \leq \Big(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j^n\Big)^{1/n} \\ &= a_n \leq \max_{j=1,\ldots,n} \alpha_j \cdot \sqrt[n]{n}. \end{aligned}$$

Nach Aufgabe 10.32 $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$, und daher erhält man für $n \to \infty$ die Behauptung aus Satz 10.??. □

10.4 Cauchysches Konvergenzkriterium

Aufgabe 10.34 *Untersuchen Sie die reelle Folge* $\{a_n\}$,

$$a_1 := 1, \quad a_{n+1} := a_n + \frac{1}{n+1}, \; n \geq 1,$$

mit Hilfe des Cauchyschen Kriteriums auf Konvergenz.

Lsung von Aufgabe 10.34
Durch vollständige Induktion erhält man die explizite Gestalt der Folgenglieder a_n:

$$a_n = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j}.$$

Das Causchysche Konvergenzkriterium fordert, dass es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass

$$|a_n - a_m| < \varepsilon \quad \text{für alle } n, m \geq N$$

gilt, d.h. für $n > m$

$$\sum_{j=m+1}^{n} \frac{1}{j} > \varepsilon \quad \text{für alle } n > m > N.$$

Offenbar ist

$$\sum_{j=m+1}^{n} \frac{1}{j} > \sum_{j=m+1}^{n} \frac{1}{n} = \frac{n-m}{n} = 1 - \frac{m}{n}.$$

Hieran sieht man, dass das Cauchysche Kriterium nicht erfüllbar ist. Ist nämlich $\varepsilon \in (0,1)$ vorgegeben und $N \in \mathbb{N}$ und $m \geq N$ gewählt, so gibt es wegen $\lim_{n\to\infty}(1 - m/n) = 1$ stets ein $n > m$ mit $|a_n - a_m| > \varepsilon$. Die Folge $\{a_n\}$ divergiert also. □

Aufgabe 10.35 *Es seien* $\{a_n\}, \{b_n\} \subset \mathbb{R}$ *und* $\{c_n\}$ *definiert durch*

$$c_n := \begin{cases} a_n, & \textit{falls} \;\; n \textit{ gerade}, \\ b_n, & \textit{falls} \;\; n \textit{ ungerade}. \end{cases}$$

Unter welchen Bedingungen ist $\{c_n\}$ *eine Cauchy Folge?*

Lsung von Aufgabe 10.35
Nach Satz 10.?? ist $\{c_n\}$ genau dann eine Cauchy Folge, wenn $\{c_n\}$ konvergiert.

Ferner sind $\{a_{2n}\}$ und $\{b_{2n-1}\}$ Teilfolgen von $\{c_n\}$. Damit $\{c_n\}$ konvergiert, müssen also sowohl $\{a_{2n}\}$ als auch $\{b_{2n-1}\}$ konvergieren, und sie müssen denselben Grenzwert besitzen. Umgekehrt ist dies nach Aufgabe 10.9 auch hinreichend für die Konvergenz der Folge $\{c_n\}$.

Beachten Sie, dass über die Folgenglieder a_{2n-1} und b_{2n} nichts vorausgesetzt werden muss. Die Folgen $\{a_n\}$ und $\{b_n\}$ müssen also nicht konvergent sein, um die Konvergenz von $\{c_n\}$ zu sichern. $\square$

Aufgabe 10.36 *Bestimmen Sie für jede der angegebenen Folgen alle Häufungspunkte, den limes inferior und den limes superior.*

a) $a_n := n \cdot (1 + (-1)^n)$,

b) $b_n := \dfrac{n + (-1)^n(3n+1)}{n}$,

c) $c_n := (-1)^n \cdot (3 + \dfrac{5}{n}) + (-1)^{n+1} \cdot (5 - \dfrac{1}{n})$,

d) $d_n := (-1)^n + \cos\left(\dfrac{n\pi}{4}\right)$,

e) $e_n := 3\sin\left(\dfrac{n\pi}{2}\right) + (-1)^n \cdot \left(2 + \dfrac{1}{n}\right)$,

f) $f_n := n \cdot \cos\left(\dfrac{n\pi}{2}\right)$,

g) $g_n := \left(1 + \frac{1}{n} \cdot \sin\left(\dfrac{n\pi}{2}\right)\right)^n$,

h) $h_n := -\dfrac{n}{6} + \left\lfloor \dfrac{n}{6} \right\rfloor$.

Lsung von Aufgabe 10.36

a): Es gilt

$$a_n = \begin{cases} 0, & \text{falls } n \text{ ungerade} \\ 2n, & \text{falls } n \text{ gerade} \end{cases}$$

Hieraus liest man ab, dass der einzige Häufungspunkt der Folge $a = 0$ ist und dass die Folge nach oben unbeschränkt ist. Es gilt also

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = 0, \quad \limsup_{n\to\infty} a_n = \infty.$$

b): Es gilt

$$b_n = 1 + (-1)^n \cdot \left(3 + \frac{1}{n}\right) = \begin{cases} -2 - 1/n, & \text{falls } n \text{ ungerade} \\ 4 + 1/n, & \text{falls } n \text{ gerade} \end{cases}.$$

Die Folge besitzt also die Häufungspunkte -2 und 4, und es gilt

$$\liminf_{n\to\infty} b_n = -2, \quad \limsup_{n\to\infty} b_n = 4.$$

c): Es ist

$$c_n = (-1)^n \cdot \left(3 + \frac{5}{n} - (5 - \frac{1}{n})\right) = (-1)^n \cdot \left(-2 + \frac{6}{n}\right).$$

Die Folge besitzt also die Häufungspunkte -2 und 2, und es gilt

$$\liminf_{n\to\infty} c_n = -2, \quad \limsup_{n\to\infty} c_n = 2.$$

d): Die Folge $\{\cos(n\pi/4)\}$ nimmt nur die Werte 0, 1, -1, $1/\sqrt{2}$ und $-1/\sqrt{2}$ an, wobei die ersten drei für gerades n auftreten und die letzten beiden für ungerades

n. Daher nimmt die Folge $\{d_n\}$ die Werte 1, 2 und 0 für gerade n und $-1 + 1/\sqrt{2}$ und $-1 - 1/\sqrt{2}$ für ungerade n an, und alle Werte treten unendlich oft auf. Es sind also

$$-1 - \frac{1}{\sqrt{2}} < -1 + \frac{1}{\sqrt{2}} < 0 < 1 < 2$$

die Haüfungspunkte der Folge $\{d_n\}$ und

$$\liminf_{n\to\infty} d_n = -1 - \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \limsup_{n\to\infty} d_n = 2.$$

e): Ist $\{e_{n_j}\}$ eine konvergente Teilfolge von $\{e_n\}$, so gilt

$$\begin{aligned} \lim_{j\to\infty} e_{n_j} &= \lim_{j\to\infty} e_{n_j} - \lim_{j\to\infty} (-1)^{n_j} \cdot \frac{1}{n_j} \\ &= \lim_{j\to\infty} \underbrace{\left(3\sin\frac{n_j\pi}{2} + 2\cdot(-1)^n\right)}_{=:\tilde{e}_{n_j}}. \end{aligned}$$

Die Folgen $\{e_n\}$ und $\{\tilde{e}_n\}$ besitzen also dieselben Häufungspunkte. Ähnlich wie in Teil d) nimmt die Folge $\{3\sin(n\pi/2)\}$ für gerade n nur den Wert 0 an und für ungerade n nur die Werte 3 und -3. Daher nimmt die Folge $\{\tilde{e}_n\}$ für gerade n den Wert 2 und für ungerade n die Werte 1 und -5. Da diese Werte unendlich oft angenommen werden, sind sie die Häufungspunkte von $\{\tilde{e}_n\}$ und damit auch von $\{e_n\}$, und man hat

$$\liminf_{n\to\infty} e_n = -5, \quad \limsup_{n\to\infty} e_n = 2.$$

f): Es gilt

$$f_n = \begin{cases} 0, & \text{für } \; n = 2k-1,\; k \in \mathbb{N}, \\ n, & \text{für } \; n = 4k,\; k \in \mathbb{N}, \\ -n, & \text{für } \; n = 4k-2,\; k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Hieraus liest man ab, dass 0 der einzige Häufungspunkt von $\{f_n\}$ ist und dass gilt

$$\liminf_{n\to\infty} f_n = -\infty, \quad \limsup_{n\to\infty} f_n = \infty.$$

g): Die Folge $\{\sin(n\pi/2)\}$ nimmt für gerades n den Wert 0 an, für $n = 4k+1$, $k \in \mathbb{N}_0$, den Wert 1 und für $n = 4k-1$, $k \in \mathbb{N}$, den Wert -1. Es gilt also

$$g_n = \begin{cases} 0, & \text{für } \; n = 2k,\; k \in \mathbb{N}, \\ \left(1 + 1/n\right)^n, & \text{für } \; n = 4k+1,\; k \in \mathbb{N}_0, \\ \left(1 - 1/n\right)^n, & \text{für } \; n = 4k-1,\; k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Daher besitzt die Folge $\{g_n\}$ die Häufungspunkte 0, $1/e$ und e, und es gilt

$$\liminf_{n\to\infty} g_n = 0, \quad \limsup_{n\to\infty} g_n = e.$$

h): Man sieht leicht ein, dass die Folge $\{h_n\}$ zyklisch die Werte

$$-\frac{1}{6},\ -\frac{1}{3},\ -\frac{1}{2},\ -\frac{2}{3},\ -\frac{5}{6},\ 0$$

annimmt. Dies sind auch die Häufungspunkte von $\{h_n\}$ und

$$\liminf_{n\to\infty} h_n = -\frac{5}{6}, \quad \limsup_{n\to\infty} h_n = 0.$$

□

Aufgabe 10.37 *Bestimmen Sie für die Folge*

$$a_n := \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor - \frac{n^2}{3n-1}$$

das Infimum und Supremum, den limes inferior und limes superior. Ist die Folge konvergent? Werden das Infimum und das Supremum von Folgengliedern angenommen?

Lsung von Aufgabe 10.37

Es gilt

$$\begin{aligned} a_{3k} &= k - \frac{9k^2}{9k-1} = \frac{-k}{9k-1}, \quad k \geq 1, \\ a_{3k+1} &= k - \frac{(3k+1)^2}{9k+2} = \frac{-4k-1}{9k+2}, \quad k \geq 0, \\ a_{3k+2} &= k - \frac{(3k+2)^2}{9k+5} = \frac{-7k-4}{9k+5} \quad k \geq 0. \end{aligned}$$

Offenbar konvergieren diese drei Teilfolgen mit

$$\lim_{k\to\infty} a_{3k} = -\frac{1}{9}, \quad \lim_{k\to\infty} a_{3k+1} = -\frac{4}{9}, \quad \lim_{k\to\infty} a_{3k+2} = -\frac{7}{9}.$$

Hieran sieht man schon, dass die Folge $\{a_n\}$ nicht konvergiert.

Da jedes Folgenglied in einer dieser drei Teilfolgen enthalten ist, kann es keine weiteren Häufungspunkte von $\{a_n\}$ geben. Es gilt also

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = -\frac{7}{9}, \quad \limsup_{n\to\infty} a_n = -\frac{1}{9}.$$

Man rechnet leicht nach, dass die drei Teilfolgen streng monoton wachsend sind. Daher gilt

$$\inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\} = \min\{a_1, a_2, a_3\} = \min\{-\frac{1}{2}, -\frac{4}{5}, -\frac{1}{8}\} = -\frac{4}{5}$$

und

$$\sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\} = \max\{-\frac{1}{9}, -\frac{4}{9}, -\frac{7}{9}\} = -\frac{1}{9}.$$

Das Infimum wird angenommen, das Supremum nicht. □

Aufgabe 10.38 *a) Es sei $\{a_n\} \subset \mathbb{C}$ eine gegen a konvergente Folge und $\{b_n\} \subset \mathbb{C}$ eine beschränkte Folge. Zeigen Sie, dass im Falle $a \geq 0$*

$$\liminf_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = a \cdot \liminf_{n\to\infty} b_n, \quad \limsup_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = a \cdot \limsup_{n\to\infty} b_n$$

gilt und im Fall $a < 0$

$$\liminf_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = a \cdot \limsup_{n\to\infty} b_n, \quad \limsup_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = a \cdot \liminf_{n\to\infty} b_n.$$

b) Bestimmen Sie für jede der angegebenen Folgen den limes inferior und limes superior:

$$a_n := \Big(1 - \frac{1}{n}\Big)^n \cdot \frac{n + (-1)^n(3n+1)}{n}, \quad b_n := \frac{1 - 3n + n^2}{4 - 5n - 2n^2} \cdot \Big((-1)^n + \cos\frac{n\pi}{4}\Big).$$

Lsung von Aufgabe 10.38

a): Ist $a = 0$, so folgt aus der Beschränktheit von $\{b_n\}$, dass auch die Folge $\{a_n \cdot b_n\}$ gegen 0 konvergiert. In diesem Fall gilt also

$$\begin{aligned}\liminf_{n\to\infty} a_n \cdot b_n &= 0 = a \cdot \liminf_{n\to\infty} b_n,\\ \limsup_{n\to\infty} a_n \cdot b_n &= 0 = a \cdot \limsup_{n\to\infty} b_n.\end{aligned}$$

Im Fall $a \neq 0$ zeigen wir, dass eine Teilfolge $\{a_{n_j} \cdot b_{n_j}\}$ von $\{a_n \cdot b_n\}$ genau dann konvergent ist, wenn die Folge $\{b_{n_j}\}$ konvergiert, und dass dann

$$\lim_{j\to\infty} a_{n_j} \cdot b_{n_j} = a \cdot \lim_{j\to\infty} b_{n_j}$$

gilt. Dies zeigt, dass man alle Häufungspunkte von $\{a_n \cdot b_n\}$ durch Multiplikation der Häufungspunkte von $\{b_n\}$ mit a erhält, woraus dann die Behauptung folgt.

Es sei also $\{a_{n_j} \cdot b_{n_j}\}$ eine konvergente Teilfolge von $\{a_n \cdot b_n\}$. Wegen $\lim_{j\to\infty} a_{n_j} = a$ und $a \neq 0$ gibt es ein $J \in \mathbb{N}$ mit $a_{n_j} \neq 0$ für alle $j \geq J$. Daher sind für diese j die Elemente $a_{n_j} \cdot b_{n_j}/a_{n_j}$ $(= b_{n_j})$ definiert, und aus Satz 10.?? folgt die Konvergenz der Folge

$$\Big\{\frac{a_{n_j} \cdot b_{n_j}}{a_{n_j}}\Big\} \quad \text{und} \quad \lim_{j\to\infty} b_{n_j} = \lim_{j\to\infty} \Big\{\frac{a_{n_j} \cdot b_{n_j}}{a_{n_j}}\Big\} = \frac{1}{a} \lim_{j\to\infty} a_{n_j} \cdot b_{n_j}.$$

b): Die Folge $\{(1 - 1/n)^n\}$ konvergiert gegen e^{-1} und nach Aufgabe 10.36 b) hat die Folge $\{(n + (-1)^n(3n+1))/n\}$ die Häufungspunkte -2 und 4. Daher gilt

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \frac{-2}{e}, \quad \limsup_{n\to\infty} a_n = \frac{4}{e}.$$

Die Folge $\{(1-3n+n^2)/(4-5n-2n^2)\}$ konvergiert offenbar gegen -0.5. Nach Aufgabe 10.36 d) gilt

$$\liminf_{n\to\infty}\left((-1)^n+\cos\frac{n\pi}{4}\right)=-1-\frac{1}{\sqrt{2}},\quad \limsup_{n\to\infty}\left((-1)^n+\cos\frac{n\pi}{4}\right)=2.$$

Daher folgt

$$\liminf_{n\to\infty} b_n=-1,\quad \limsup_{n\to\infty} b_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

$\square$

Aufgabe 10.39 *Es sei $\{a_n\}$ eine beschränkte Folge. Zeigen Sie, dass*

a) $a\in\mathbb{R}$ genau dann Häufungspunkt von $\{a_n\}$ ist, wenn für jedes $\varepsilon >$ das Intervall $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ unendlich viele Folgenglieder von $\{a_n\}$ enthält,

b) $a\in\mathbb{R}$ genau dann der limes inferior von $\{a_n\}$ ist, wenn für alle $\varepsilon>0$ unendlich viele Folgenglieder die Ungleichung $a_n<a+\varepsilon$ erfüllen aber nur endlich viele die Ungleichung $a_n\le a-\varepsilon$,

c) $a\in\mathbb{R}$ genau dann der limes superior von $\{a_n\}$ ist, wenn für alle $\varepsilon>0$ unendlich viele Folgenglieder die Ungleichung $a_n>a-\varepsilon$ erfüllen aber nur endlich viele die Ungleichung $a_n\ge a+\varepsilon$,

d) die Folge genau dann konvergiert, wenn ihr limes inferior und limes superior übereinstimmen.

Lsung von Aufgabe 10.39

a): Ist a ein Häufungspunkt von $\{a_n\}$, so gibt es eine Teilfolge $\{a_{n_j}\}$, die gegen a konvergiert. Ist $\varepsilon>0$ gegeben, so gibts es ein $J\in\mathbb{N}$ mit $|a-a_{n_j}|<\varepsilon$ für alle $j\ge J$, und das heißt gerade, dass das Intervall $(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$ die unendlich vielen Folgenglieder a_{n_j}, $j\ge J$, enthält.

Enthält umgekehrt für jedes $\varepsilon>0$ Intervall $(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$ unendlich viele Folgenglieder, so gibt es insbesondere zu jedem $j\in\mathbb{N}$ unendlich viele Folgenglieder in $(a-1/j,a+1/j)$, und wir können auf folgende Weise eine gegen a konvergente Teilfolge konstruieren:

Wir wählen ein a_{n_1} mit $|a_{n_1}-a|<1$, und sind bereits $a_{n_1},\dots,a_{n_k}$ bestimmt, so wählen wir ein $a_{n_{k+1}}$, für das $|a-a_{n_{k+1}}|<1/(k+1)$ und $n_{k+1}>n_k$ gilt. Dann erfüllt die so gewählte Teilfolge

$$|a-a_{n_k}|<\frac{1}{k}$$

und konvergiert damit sicher gegen a.

b): Es sei a der limes inferior der Folge $\{a_n\}$.

Dann gibt es eine Teilfolge $\{a_{n_j}\}$ von $\{a_n\}$, die gegen a konvergiert. Ist $\varepsilon > 0$ gegeben, so gibt es ein $J \in \mathbb{N}$ mit $|a - a_{n_j}| < \varepsilon$ für alle $j \geq J$, d.h. $a_{n_j} < a + \varepsilon$ für alle $j \geq J$.

Gibt es für ein $\varepsilon > 0$ unendlich viele Folgenglieder a_{n_k}, für die $a_{n_k} \leq a - \varepsilon$ gilt, so kann man wegen der Beschränktheit der Folge $\{a_n\}$ nach dem Satz von Bolzano und Weierstraß aus der Folge $\{a_{n_k}\}$ eine konvergente Teilfolge auswählen (die dann auch Teilfolge von $\{a_n\}$ ist), und diese besitzt sicher einen Grenzwert α, der $\alpha \leq a - \varepsilon$ erfüllt. Dies zeigt, dass a nicht der limes inferior von $\{a_n\}$ sein kann.

Gibt es umgekehrt zu jedem $\varepsilon > 0$ unendlich viele Folgenglieder, die unterhalb von $a + \varepsilon$ liegen aber nur endlich viele Folgenglieder a_{n_j} mit $a_{n_j} \leq a - \varepsilon$, so liegen unendlich viele Folgenglieder in dem Intervall $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$, und man erhält wie in Teil a), dass a ein Häufungspunkt der Folge $\{a_n\}$ ist.

Gibt es einen kleineren Häufungspunkt α von $\{a_n\}$ als a, so gibt es eine Teilfolge $\{a_{n_j}\}$, die gegen α konvergiert. Daher liegen für $\varepsilon := 0.5(a - \alpha) > 0$ unendlich viele Glieder dieser Teilfolge (also auch von $\{a_n\}$) unterhalb von $a - \varepsilon$.

c): Dies zeigt man völlig analog dem Vorgehen in Teil b).

d): Konvergiert die Folge $\{a_n\}$ gegen a, so konvergiert auch jede Teilfolge von $\{a_n\}$ gegen a, und daher ist a der einzige Häufungspunkt von $\{a_n\}$. a muss also zugleich limes inferior und limes superior sein.

Gilt umgekehrt

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} =: a,$$

so gilt für alle $\varepsilon > 0$ nach Teil b) $a_n < a - \varepsilon$ nur für endlich viele Folgenglieder und nach Teil c) $a_n > a + \varepsilon$ nur für endlich viele Folgenglieder. Es liegen also nur endlich viele Folgenglieder außerhalb des Intervalls $|a_n - a| < \varepsilon$, und daher gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n \in \mathbb{N}$. □

Aufgabe 10.40 *Es seien $\{a_n\}$ und $\{b_n\}$ beschränkte Folgen. Zeigen Sie, dass*

$$\liminf_{n\to\infty} a_n + \liminf_{n\to\infty} b_n \leq \liminf_{n\to\infty}(a_n + b_n) \leq \limsup_{n\to\infty}(a_n + b_n) \leq \limsup_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n$$

gilt.

Kann bei den beiden äußeren Ungleichungen $<$ auftreten?

Lsung von Aufgabe 10.40
Es seien

$$a := \liminf_{n\to\infty} a_n, \quad b := \liminf_{n\to\infty} b_n.$$

Es sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Dann gibt nach Aufgabe 10.39 b) Zahlen $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$, so dass

$$a_n \geq a - \varepsilon \text{ für alle } n \geq N_1 \quad \text{und} \quad b_n \geq b - \varepsilon \text{ für alle } n \geq N_2$$

gilt. Hieraus folgt

$$a_n + b_n \geq a + b - 2\varepsilon \quad \text{für alle } n \geq N := \max(N_1, N_2),$$

und nach Aufgabe 10.39 b) erhält man

$$\liminf_{n\to\infty}(a_n + b_n) \geq a + b.$$

Die rechte Ungleichung

$$\limsup_{n\to\infty}(a_n + b_n) \leq \limsup_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n$$

zeigt man analog, und die mittlere Ungleichung ist trivial.

In den beiden äußeren Ungleichungen kann $<$ auftreten, wie das folgende Beispiel zeigt. Es seien

$$a_n := \begin{cases} 0 & \text{falls} \quad n \text{ gerade} \\ 1 & \text{falls} \quad n \text{ ungerade} \end{cases}, \quad b_n := \begin{cases} 1 & \text{falls} \quad n \text{ gerade} \\ 0 & \text{falls} \quad n \text{ ungerade} \end{cases}.$$

Dann gilt

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} b_n = 0,$$

und es ist $a_n + b_n = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und daher

$$\liminf_{n\to\infty}(a_n + b_n) = 1.$$

Genauso gilt für diese Folgen

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} b_n = 1,$$

und damit

$$\limsup_{n\to\infty}(a_n + b_n) = 1 < 2 = \limsup_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n.$$

□

Aufgabe 10.41 *Es sei $\{a_n\}$ eine beschränkte Folge und $\{b_n\}$,*

$$b_n := \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} b_n,$$

die Folge der arithmetischen Mittel.

Zeigen Sie, dass gilt

$$\liminf_{n\to\infty} a_n \leq \liminf_{n\to\infty} b_n \leq \limsup_{n\to\infty} b_n \leq \limsup_{n\to\infty} a_n.$$

Lsung von Aufgabe 10.41

Die mittlere der drei Ungleichungen ist trivial, und die beiden äußeren Ungleichungen beweist man analog. Wit beschränken uns daher auf die erste Ungleichung. Wir verwenden dazu die Bezeichnungen

$$a := \liminf_{n\to\infty} a_n, \quad b := \liminf_{n\to\infty} b_n.$$

Es sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Dann gibt es (vgl. Aufgabe 10.39 b)) ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $a_n > a - \varepsilon$ für alle $n \geq N$ gilt. Daher folgt für diese n

$$\frac{1}{n-N} \sum_{j=N+1}^{n} a_j > a - \varepsilon,$$

und es folgt

$$\frac{1}{n} \sum_{j=N+1}^{n} a_j > \frac{n-N}{n} \cdot (a - \varepsilon).$$

Da $(n-N)/n$ für $n \to \infty$ gegen 1 konvergiert, gibt es ein $N_1 > N$, so dass

$$\frac{1}{n} \sum_{j=N+1}^{n} a_j > a - 2\varepsilon \quad \text{für alle } n \geq N_1$$

gilt. Ferner gilt sicher

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{N} a_j \to 0 \quad \text{für } n \to \infty.$$

Daher gibt es ein $N_2 \in \mathbb{N}$ mit

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{N} a_j > -\varepsilon \quad \text{für alle } n \geq N_2.$$

Zusammengenommen erhalten wir also

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} a_j \geq a - 3\varepsilon \quad \text{für alle } n \geq N_3 := \max(N_1, N_2),$$

und dies zeigt wegen Aufgabe 10.39 $a \leq b$. □

Aufgabe 10.42 *Es sei $\{x_n\}$ eine beschränkte Folge in $\mathbb{R}$ und $\{y_k\}$ eine Folge von Häufungspunkten der Folge $\{x_n\}$.*

Zeigen Sie, dass jeder Häufungspunkt von $\{y_k\}$ auch schon Häufungspunkt von $\{x_n\}$ ist.

Lsung von Aufgabe 10.42
Es sei z ein Häufungspunkt der Folge $\{y_k\}$. Dann gibt es eine gegen z konvergierende Teilfolge von $\{y_k\}$. Wir wählen aus dieser Teilfolge wiederum eine Teilfolge $\{y_{k_j}\}$ aus, für die

$$|z - y_{k_j}| < \frac{1}{2j} \quad \text{für alle } j \in \mathbb{N}.$$

Nun ist jedes y_{k_j} ein Element der Folge $\{y_k\}$ und damit ein Häufungspunkt der Ausgangsfolge $\{x_n\}$.

Folglich gibt es zu jedem y_{k_j} unendlich viele Glieder m_j der Folge $\{x_n\}$, für die

$$|m_j - y_{k_j}| < \frac{1}{2j}$$

gilt. Wir fassen diese in der Menge M_j zusammen.

Hiermit können wir nun die gesuchte Teilfolge $\{x_{n_j}\}$ von $\{x_n\}$ konstruieren, die gegen z konvergiert:

Wir wählen x_{n_1} aus M_1. Sind die Elemente $x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_k}$ schon bestimmt, so wählen wir $x_{n_{k+1}} \in M_{k+1}$ so aus, dass $n_{k+1} > n_k$ gilt.

Dann ist sicher $\{x_{n_j}\}$ eine Teilfolge von $\{x_n\}$, und es gilt

$$|x_{n_j} - z| \le |x_{n_j} - y_{k_j}| + |y_{k_j} - z| < \frac{1}{2j} + \frac{1}{2j} = \frac{1}{j} \quad \text{für alle } j \in \mathbb{N}.$$

Hieraus liest man ab, dass $\{x_{n_j}\}$ gegen z konvergiert. □

10.5 Folgen in Vektorräumen

Aufgabe 10.43 *Welche der angegebenen Vektorfolgen konvergieren? Bestimmen Sie für diese den Grenzwert.*

$$\{\boldsymbol{a}^n\} := \left\{ \begin{pmatrix} 1/n! \\ \sqrt{n^2-1} - n \end{pmatrix} \right\}, \quad \{\boldsymbol{b}^n\} := \left\{ \begin{pmatrix} 2^n \\ 1/n \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\boldsymbol{c}^{n+1} := \boldsymbol{c}^{n-1} \times \boldsymbol{c}^n, \quad \boldsymbol{c}^1 := \boldsymbol{e}^1,\ \boldsymbol{c}^2 := \boldsymbol{e}^2.$$

Geben Sie eine hinreichende Bedingung für die Startvektoren $\boldsymbol{d}^1, \boldsymbol{d}^2 \in \mathbb{R}^3$ an, unter der die Folge

$$\boldsymbol{d}^{n+1} := \boldsymbol{d}^{n-1} \times \boldsymbol{d}^n$$

konvergiert.

Lsung von Aufgabe 10.43

Wegen

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n!} = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty} (\sqrt{n^2-1} - n) = \lim_{n\to\infty} \frac{-1}{\sqrt{n^2-1}+n} = 0$$

konvergiert die Folge $\{\boldsymbol{a}^n\}$, und es gilt

$$\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{a}^n = \boldsymbol{0}.$$

Die Folge $\{\boldsymbol{b}^n\}$ konvergiert nicht, denn die Folge der ersten Komponenten $\{2^n\}$ ist nicht konvergent.

Es gilt

$$\boldsymbol{c}^3 = \boldsymbol{e}^3,\ \boldsymbol{c}^4 = \boldsymbol{e}^1,\ \boldsymbol{c}^5 = \boldsymbol{e}^2, \ldots,$$

d.h.

$$\boldsymbol{c}^{3n+j} = \boldsymbol{e}^j, \quad j = 1, 2, 3,\ n \in \mathbb{N},$$

und hieraus liest man ab, dass die Folge $\{\boldsymbol{c}^n\}$ divergiert.

$\boldsymbol{d}^3$ steht senkrecht auf $\operatorname{span}\{\boldsymbol{d}^1, \boldsymbol{d}^2\}$ und hat die Norm $\|\boldsymbol{d}^1\| \cdot \|\boldsymbol{d}^2\| \cdot |\sin\varphi|$, wobei φ der Winkel zwischen $\boldsymbol{d}^1$ und $\boldsymbol{d}^2$ ist. $\boldsymbol{d}^4$ steht senkrecht auf $\boldsymbol{d}^2$ und $\boldsymbol{d}^3$ (liegt also in $\operatorname{span}\{\boldsymbol{d}^1, \boldsymbol{d}^2\}$) und hat die Länge $\|\boldsymbol{d}^2\| \cdot \|\boldsymbol{d}^3\|$ (da $\boldsymbol{d}^2$ und $\boldsymbol{d}^3$ orthogonal sind). $\boldsymbol{d}^5$ steht senkrecht auf $\boldsymbol{d}^4$ und $\boldsymbol{d}^3$ (hat also die Richtung von $\boldsymbol{d}^2$) und hat die Länge $\|\boldsymbol{d}^3\| \cdot \|\boldsymbol{d}^4\|$.

Der weitere Verlauf ist klar: Die Vektoren $\boldsymbol{d}^j$ nehmen zyklisch die Richtungen von $\boldsymbol{d}^2$, $\boldsymbol{d}^3$ und $\boldsymbol{d}^4$ ein, und ihre Längen entwickeln sich gemäß

$$\|\boldsymbol{d}^{n+1}\| = \|\boldsymbol{d}^n\| \cdot \|\boldsymbol{d}^{n-1}\|, \quad \|\boldsymbol{d}^2\|, \|\boldsymbol{d}^3\| = \|\boldsymbol{d}^2\| \cdot \|\boldsymbol{d}^1\| \cdot |\sin\varphi|.$$

Wenn die Folge $\{\boldsymbol{d}^n\}$ konvergent ist, so kann sie nur gegen $\boldsymbol{0}$ konvergieren, und dies ist genau dann der Fall, wenn $\|\boldsymbol{d}^n\|$ eine Nullfolge ist.

Ist $q := \max\{\|\boldsymbol{d}^2\|, \|\boldsymbol{d}^3\|\} < 1$, so konvergiert die Folge, denn mit einem einfachen Induktionsbeweis erhält man

$$\|\boldsymbol{d}^n\| \le q^{n-2} \to 0 \quad \text{für } n \to \infty.$$

Umgekehrt folgt aus $q := \min\{\|\boldsymbol{d}^2\|, \|\boldsymbol{d}^3\|\} > 1$

$$\|\boldsymbol{d}^n\| \geq q^{n-2} \to \infty \quad \text{für } n \to \infty,$$

und die Folge divergiert. Die Diskussion des Falles

$$\min\{\|\boldsymbol{d}^2\|, \|\boldsymbol{d}^3\|\} < 1 < \max\{\|\boldsymbol{d}^2\|, \|\boldsymbol{d}^3\|\}$$

ist unübersichtlich. Wir verzichten darauf. □

Aufgabe 10.44 *Wir betrachten das Entwicklungsmodell aus Aufgabe 10.4 und setzen voraus, dass die Übergangsmatrix $\boldsymbol{P}$ diagonalisierbar ist. Untersuchen Sie, unter welchen Bedingungen die Population ausstirbt.*

Lsung von Aufgabe 10.44

Die Lösung von Aufgabe 10.4 zeigt, dass

$$\boldsymbol{a}^{n+1} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{a}^n$$

mit gegebener Anfangsverteilung $\boldsymbol{a}^0$ der Population auf die Altersklassen ist und

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 0 & b_1 & b_2 & \dots & b_{m-1} & b_m \\ p_0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & p_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & p_{m-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

Da $\boldsymbol{P}$ diagonalisierbar ist, gibt es eine Basis des $\mathbb{C}^n$, die aus Eigenvektoren von $\boldsymbol{P}$ besteht.

Es seien $\boldsymbol{x}^1, \dots, \boldsymbol{x}^{m+1} \in \mathbb{C}^n$ linear unabhängige Eigenvektoren der Matrix $\boldsymbol{P}$, und es seien $\lambda_1, \dots, \lambda_{m+1}$ zugehörige Eigenwerte. Dann kann man den Anfangsvektor $\boldsymbol{a}^0$ als Linearkombination der $\boldsymbol{x}^j$ darstellen:

$$\boldsymbol{a}^0 = \sum_{j=1}^{m+1} \alpha_j \boldsymbol{x}^j, \quad \alpha_j \in \mathbb{C}.$$

Hiermit erhält man

$$\boldsymbol{a}^1 = \boldsymbol{P}\boldsymbol{a}^0 = \sum_{j=1}^{m+1} \alpha_j \boldsymbol{P}\boldsymbol{x}^j = \sum_{j=1}^{m+1} \alpha_j \lambda_j \boldsymbol{x}^j,$$

und durch vollständige Induktion

$$\boldsymbol{a}^n = \sum_{j=1}^{m+1} \alpha_j \lambda_j^n \boldsymbol{x}^j$$

Hieraus liest man ab, dass $\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{a}^n = \boldsymbol{0}$ genau dann gilt, wenn

$$\lim_{m\to\infty} \alpha_j \lambda_j^n = 0, \quad j = 1, \ldots, m+1,$$

gilt. Dies ist offenbar genau dann der Fall, wenn

$$|\lambda_j| < 1 \quad \text{für alle } j = 1, \ldots, m+1.$$

Anmerkung: Unter Benutzung der Jordanschen Normalform kann man zeigen, dass auch im nicht diagonalisierbaren Fall die Population genau dann ausstirbt, wenn alle Eigenwerte von $\boldsymbol{P}$ dem Betrage nach kleiner als 1 sind. □

10.6 Konvergenzkriterien für Reihen

Aufgabe 10.45 *Es sei* $\{a_n\}$ *eine Folge und* $p : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *eine streng monoton wachsende Funktion mit* $p(1) = 1$. *Wir definieren hiermit die Folge*

$$b_n := \sum_{j=p(n)}^{p(n+1)-1} a_j.$$

Zeigen Sie, dass aus der Konvergenz der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *die Konvergenz der Reihe* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *folgt und dass dann beide Reihen denselben Grenzwert haben.*

Zeigen Sie, dass die Umkehrung nicht gilt.

Lsung von Aufgabe 10.45

Konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ gegen a, so gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$\Big|\sum_{j=1}^{n} a_j - a\Big| < \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq N.$$

Es sei

$$M := \min\{k : p(k) \geq N\}.$$

Dann folgt für alle $m \geq M$

$$\Big|a - \sum_{j=1}^{m} b_j\Big| = \Big|a - \sum_{j=1}^{p(m+1)-1} a_j\Big| < \varepsilon,$$

und daher konvergiert auch $\sum_{j=1}^{\infty} b_j$ gegen a.

Die Umkehrung gilt nicht, denn für $a_n := (-1)^n$ konvergiert die Reihe $\sum_{j=1}^{\infty} a_n$ nicht, aber für $p : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $p(n) := 2n$, gilt $b_n = 0$ für alle n, und die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergiert.

Anmerkung: Aufgabe 10.45 zeigt, dass man in einer konvergenten Reihe Klammern setzen kann, ohne die Konvergenz zu stören. Vorhandene Klammern kann man jedoch nicht fortlassen. □

Aufgabe 10.46 *Es gilt für alle* $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{1}{n(n+1)} < \frac{1}{n^2} < \frac{1}{n(n-1)}.$$

a) Leiten Sie hieraus eine obere und untere Schranke für den Grenzwert der Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

her.

b) Bestimmen Sie eine Näherung für den Grenzwert, deren absoluter Fehler höchstens 0.01 *ist.*

Lsung von Aufgabe 10.46

a): Aus

$$\frac{1}{n(n+1)} < \frac{1}{n^2} < \frac{1}{n(n-1)}, \quad \text{für alle } n > 1$$

folgt

$$1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)},$$

d.h.

$$1 + \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right).$$

Da die beteiligten Reihen konvergieren, kann man die Klammern weglassen, und man erhält für die linke Teleskopsumme den Wert 0.5 und für die rechte den Wert 1. Es gilt also schließlich

$$\frac{3}{2} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < 2.$$

b): Genau wie in Teil a) gilt für alle $m \geq 1$ auch die Einschließung

$$\sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n^2} + \sum_{n=m+1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n^2} + \sum_{n=m+1}^{\infty} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right),$$

und daher

$$\sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n^2} + \frac{1}{m+1} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n^2} + \frac{1}{m}.$$

Der Mittelwert

$$s_m := \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n^2} + \frac{2m+1}{2m(m+1)}$$

hat also einen Fehler

$$\Big|\sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n^2} - s_m\Big| < \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{m} - \frac{1}{m+1}\Big) = \frac{1}{2m(m+1)},$$

und dieser ist genau dann kleiner als 0.01, wenn $100 < 2m(m+1)$ gilt, d.h. für $m \geq 7$.

Es ist $s_7 \approx 1.6457256$. Tatsächlich gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \approx 1.6449341\ldots,$$

und der Fehler von s_7 ist 0.0007915. □

Aufgabe 10.47 *Wir betrachten das Problem des abprallenden Balles aus Aufgabe 10.1 noch einmal. Zeigen Sie, dass der Ball nach endlicher Zeit zur Ruhe kommt und berechnen Sie den insgesamt zurückgelegten Weg.*

Lsung von Aufgabe 10.47

Wir haben bereits gesehen, dass die Zeit bis zum ersten Aufprallen $\tilde{t} = \sqrt{2h_0/g}$ ist und dass die Zeitdauer zwischen dem n-ten und dem $(n+1)$-ten Aufprallen

$$t_n = 2\Big(\sqrt{0.9}\Big)^n \cdot \sqrt{2h_0/g}$$

ist. Die Gesmtdauer des Experiments ist also

$$\begin{aligned} T &= \sqrt{\frac{2h_0}{g}} \cdot \Big(1 + 2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{0.9}^n\Big) = \sqrt{\frac{2h_0}{g}} \cdot \Big(1 + 2 \cdot \Big(\frac{1}{1-\sqrt{0.9}} - 1\Big)\Big) \\ &= \sqrt{\frac{2h_0}{g}} \cdot \frac{1+\sqrt{0.9}}{1-\sqrt{0.9}}. \end{aligned}$$

Da der Ball zwischen dem n-ten und dem $(n+1)$-ten Aufprallen die Höhe $h_n = 0.9^n \cdot h_0$ erreicht, ist der insgesamt zurückgelegte Weg

$$h_0 + 2h_0 \sum_{n=1}^{\infty} 0.9^n = 19h_0.$$

□

Aufgabe 10.48 *Man benutze die Summationsformel der geometrischen Reihe um den periodischen Dezimalbruch*

$$x = 0.034517\overline{517}\ldots$$

als

$$x = \frac{p}{q}, \quad p, q \in \mathbb{N},$$

darzustellen.

Lsung von Aufgabe 10.48

Es gilt

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{34}{1000} + \frac{517}{10^6} + \frac{517}{10^9} + \ldots = \frac{34}{1000} + \frac{517}{10^6} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{1000}\right)^n \\
&= \frac{34}{1000} + \frac{517}{10^6} \cdot \frac{1}{1 - 10^{-3}} = \frac{34}{1000} + \frac{517}{999000} = \frac{34483}{999000}
\end{aligned}
$$

□

Aufgabe 10.49

Wir betrachten die "von Kochsche Insel", die auf folgende Weise rekursiv definiert ist: Wir gehen aus von dem gleichseitigen Dreieck Δ_0 der Seitenlänge 1. Δ_{n+1} entstehe aus Δ_n, indem jedes geradlinige Stück des Randes von Δ_n in drei gleiche Teile zerlegt wird und über dem mittleren Drittel ein gleichseitiges Dreieck errichtet wird.

Abbildung 10.2

Man berechne den Flächeninhalt F_n und den Umfang U_n von Δ_n und die Grenzwerte $\lim_{n\to\infty} F_n$ und $\lim_{n\to\infty} U_n$, sofern diese existieren.

Lsung von Aufgabe 10.49

Die Rekursion für den Umfang U_n ist sofort klar. Im n-ten Schritt wird jedes geradlinige Stück des Randes der Länge ℓ durch 4 geradlinige Stücke der Länge $\ell/3$ ersetzt. Der Gesamtumfang wird also in jedem Schritt mit dem Faktor 4/3 multipliziert:

$$U_{n+1} = \frac{4}{3} U_n, \quad U_0 = 3.$$

Diese Folge divergiert offenbar.

Um den Flächeninhalt F_n zu bestimmen, bezeichnen wir mit $\tilde{F}_n$ die Fläche eines im n-ten Schritt hinzugekommenen Dreiecks und mit a_n die Anzahl der geraden Berandungsstücke von Δ_n. Dann gelten die Rekursionen

$$
\begin{aligned}
a_{n+1} &= 4a_n, \quad a_0 = 3, \\
\tilde{F}_{n+1} &= \frac{1}{9}\tilde{F}_n, \quad \tilde{F}_0 = \frac{\sqrt{3}}{4} \\
F_{n+1} &= F_n + a_n \tilde{F}_{n+1}, \quad F_0 = \frac{\sqrt{3}}{4}.
\end{aligned}
$$

Damit folgt

$$a_n = 3 \cdot 4^n, \quad \tilde{F}_n = \left(\frac{1}{9}\right)^n \cdot \frac{\sqrt{3}}{4},$$

und man erhält die Fläche

$$\begin{aligned} F_n &= F_0 + \sum_{j=0}^{n-1} a_j \tilde{F}_{j+1} = \frac{\sqrt{3}}{4} + \sum_{j=0}^{n-1} 3 \cdot 4^j \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^{j+1} \frac{\sqrt{3}}{4} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{12} \sum_{j=0}^{n-1} \left(\frac{4}{9}\right)^j = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1-(4/9)^n}{1-4/9}\right). \end{aligned}$$

Die Gesamtfläche konvergiert also gegen

$$\lim_{n\to\infty} F_n = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(1 + \frac{3}{5}\right) = \frac{2\sqrt{3}}{5}.$$

□

Aufgabe 10.50 *Es seien* $0 < a_0 < a_1$ *gegeben. Die Folge* $\{a_n\}$ *sei rekursiv definiert durch*

a) $a_{n+1} := \frac{1}{2}(a_n + a_{n-1}), \ n \geq 1,$

b) $a_{n+1} := \sqrt{a_n a_{n-1}}, \ n \geq 1.$

Bestimmen Sie den Grenzwert der Folgen.

Hinweis Die Folgen aus Aufgabe 10.50 wurden bereits in Aufgabe 10.22 betrachtet. In Teil b) verwende man die Potenzregeln

$$a^\alpha \cdot a^\beta = a^{\alpha+\beta}, \ \left(a^\alpha\right)^\beta = a^{\alpha\beta} \quad \text{für } a > 0, \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

und die "Stetigkeit der Exponentialfunktion"

$$\lim_{n\to\infty} a^{\alpha_n} = a^{\lim_{n\to\infty} \alpha_n}.$$

Lsung von Aufgabe 10.50

a): Wir wissen bereits, dass die Folge $\{a_n\}$ konvergiert. Für den Grenzwert gilt

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{2n} = a_0 + \sum_{j=1}^{\infty} (a_{2j} - a_{2j-2}).$$

Dabei ist

$$\begin{aligned} a_{2j} - a_{2j-2} &= \frac{1}{2}(a_{2j-1} - a_{2j-2}) - a_{2j-2} = \frac{1}{2}(a_{2j-1} - a_{2j-2}) \\ &= \frac{1}{4}(a_{2j-2} + a_{2j-3} - (a_{2j-3} + a_{2j-4})) = \frac{1}{4}(a_{2j-2} - a_{2j-4}). \end{aligned}$$

Durch Induktion erhält man hieraus

$$a_{2j} - a_{2j-2} = \Big(\frac{1}{4}\Big)^{j-1} \cdot (a_2 - a_0).$$

Ferner ist

$$a_2 - a_0 = \frac{1}{2}(a_1 + a_0) - a_0 = \frac{1}{2}(a_1 - a_0),$$

und daher folgt

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} a_n &= a_0 + \sum_{j=1}^{\infty}(a_{2j} - a_{2j-2}) \\
&= a_0 + \frac{1}{2}(a_1 - a_0)\sum_{j=1}^{\infty}\Big(\frac{1}{4}\Big)^{j-1} \\
&= a_0 + \frac{1}{2}(a_1 - a_0)\frac{1}{1-1/4} \;=\; a_0 + \frac{2}{3}(a_1 - a_0).
\end{aligned}$$

b): Es ist

$$\begin{aligned}
a_2 &= \sqrt{a_0 a_1} = a_0^{1/2} a_1^{1/2}, \\
a_3 &= \sqrt{a_1 a_2} = a_0^{1/4} a_1^{3/4}, \\
a_4 &= \sqrt{a_2 a_3} = a_0^{3/8} a_1^{5/8}.
\end{aligned}$$

Dies legt den Ansatz

$$a_n = a_0^{1-\alpha_n} \cdot a_1^{\alpha_n}$$

nahe. Die Folge $\{\alpha_n\}$ erfüllt dann wegen

$$\begin{aligned}
a_0^{1-\alpha_{n+1}} \cdot a_1^{\alpha_{n+1}} &= a_{n+1} = \sqrt{a_n a_{n-1}} = \Big(a_0^{1-\alpha_n} \cdot a_1^{\alpha_n} \cdot a_0^{1-\alpha_{n-1}} \cdot a_1^{\alpha_{n-1}}\Big)^{1/2} \\
&= a_0^{1-(\alpha_n+\alpha_{n-1})/2} \cdot a_1^{(\alpha_n+\alpha_{n-1})/2}
\end{aligned}$$

die Rekursionsformel

$$\alpha_{n+1} = \frac{1}{2}(\alpha_n + \alpha_{n-1}),\;\; \alpha_0 = 0,\;\; \alpha_1 = \frac{1}{2}.$$

Nach Teil a) folgt

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \alpha_0 + \frac{2}{3}(\alpha_1 - \alpha_0) = \frac{1}{3},$$

und daher

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sqrt[3]{a_0^2} \cdot \sqrt[3]{a_1}.$$

□

Aufgabe 10.51 *Die Definitionsbereiche der folgenden Funktionen seien die Mengen aller $x \in \mathbb{R}$, für die definierenden Reihe konvergieren:*

$$
\begin{aligned}
f(x) &:= \sum_{n=0}^{\infty} x^n \\
g(x) &:= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{3^{n+1}} \\
h(x) &:= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^n} \\
i(x) &:= \frac{1}{x-1} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(x+1)^n}.
\end{aligned}
$$

Man bestimme diejenigen Teilmengen von $\mathbb{R}$, in denen f und g, f und h, f und i, g und h, g und i und schließlich h und i übereinstimmen.

Lsung von Aufgabe 10.51

Die f definierende geometrische Reihe konvergiert für $|x| < 1$, und es ist

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \quad \text{für } |x| < 1.$$

Die g definierende Reihe kann man umschreiben in

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{3^{n+1}} = \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x+2}{3}\right)^n.$$

Hieran sieht man, dass g für $|(x+2)/3| < 1$, d.h. für $x \in (-5, 1)$ definiert ist, und dass

$$g(x) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1-(x+2)/3} = \frac{1}{1-x} \quad \text{für } -5 < x < 1$$

gilt.

Die h definierende Reihe

$$h(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^n} = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{x}\right)^n$$

konvergiert für $|1/x| < 1$, d.h. für $|x| > 1$, und es gilt

$$h(x) = 1 - \frac{1}{1-1/x} = \frac{1}{1-x} \quad \text{für } |x| > 1.$$

Die i definierende Reihe kann man umschreiben in

$$i(x) = \frac{1}{x-1} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(x+1)^n} = \frac{1}{x-1} + 1 - \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{x+1}\right)^n.$$

Konvergenz liegt vor für $|2/(x+1)| < 1$ und

$$i(x) = \frac{1}{x-1} + 1 - \frac{1}{1-2/(x+1)} = \frac{1}{1-x} \quad \text{für } x < -3 \vee x > 1.$$

Die Funktionen f, g, h und i unterscheiden sich also nur in ihrem Definitionsbereich. f und g stimmen auf $(-1,1)$ überein, g und h auf $(-5,-1)$, g und i auf $(-5,-3)$ und h und i auf $(-\infty,-3) \cup (1,\infty)$. Sonst gibt es keine Übereinstimmungen. $\square$

Aufgabe 10.52 *a) Es sei $\{a_n\}$ eine nichtnegative, monoton fallende Folge. Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ genau dann konvergiert, wenn die verdichtete Reihe*

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$$

konvergiert.

b) Diskutieren Sie die Konvergenz der Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}, \quad \alpha > 0$$

mit dem Ergebnis aus Teil a).

c) Diskutieren Sie die Konvergenz der Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot (\ln n)^\alpha}, \quad \alpha > 0.$$

Hinweis: Verwenden Sie in Teil c) die Rechenregel $\ln 2^n = n \cdot \ln 2$.

Lsung von Aufgabe 10.52

a): Da beide Reihen positive Glieder besitzen, brauchen wir zum Konvergenznachweis nur ihre Beschränktheit zu zeigen.

Es sei $n \in \mathbb{N}$ und $k \in \mathbb{N}$ so gewählt, dass $n < 2^k$ gilt. Dann ist

$$\begin{aligned} s_n &:= \sum_{j=1}^{n} a_j = a_1 + a_2 + \ldots a_n \le a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots + a_{2^{k+1}-1} \\ &= a_1 + (a_2 + a_3) + (a_4 + a_5 + a_6 + a_7) + \ldots + (a_{2^k} + \ldots + a_{2^{k+1}-1}) \\ &\le a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \ldots + 2^k a_{2^k} =: t_k. \end{aligned}$$

Konvergiert die verdichtete Reihe, so ist die Folge $\{t_k\}$ beschränkt, Daher ist die Folge $\{s_n\}$ beschränkt, und die Reihe $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ konvergiert.

Die Umkehrung zeigen wird indirekt. Zu $k \in \mathbb{N}$ wählen wir dann $n \in \mathbb{N}$ mit $n > 2^k$. Dann gilt genauso

$$\begin{aligned} s_n &\geq a_1 + a_2 + (a_3 + a_4) + (a_5 + a_6 + a_7 + a_8) + \ldots + (a_{2^{k-1}+1} + \ldots + a_{2^k}) \\ &\geq \frac{1}{2} a_1 + a_2 + 2a_4 + 4a_8 + \ldots 2^{k-1} a_{2^k} = \frac{1}{2} t_k. \end{aligned}$$

Divergiert die verdichtete Reihe, so ist die Folge $\{t_k\}$ unbeschränkt. Damit ist auch die Folge $\{s_n\}$ unbeschränkt und die Reihe $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ divergent.

b): Die zu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}, \qquad \alpha > 0$$

gehörige verdichtete Reihe ist

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^k \frac{1}{(2^k)^\alpha} = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{k-k\alpha} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(2^{\alpha-1}\right)^n,$$

und hieraus liest man unmittelbar ab, dass die Reihe genau dann konvergiert, wenn $\alpha > 1$ gilt.

c): Die zu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot (\ln n)^\alpha}, \qquad \alpha > 0.$$

gehörige verdichtete Reihe ist

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^k \frac{1}{2^k (\ln 2^k)^\alpha} = \frac{1}{(\ln 2)^\alpha} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha},$$

und diese konvergiert genau für $\alpha > 1$.

Anmerkung: Es ist klar, dass im Verdichtungssatz in Teil a) von Aufgabe 10.52 die Gruppen von Elementen, die zusammengefasst werden, die Längen 2^k haben müssen. Genauso kann man mit anderen Längen arbeiten, wobei der größte Term in der Gruppe mit der Gruppenlänge multipliziert werden muss, um den Beitrag der gesamten Gruppe nach oben abzuschätzen, bzw. der kleinste Term der Gruppe mit der Länge multipliziert werden muss, um den Beitrag der ganzen Gruppe abzuschätzen, wenn man die Divergenz nachweisen möchte. □

Aufgabe 10.53 *Welche der folgenden Reihen sind konvergent, welche divergent.*

Bestimmen Sie für die konvergenten Reihen den Grenzwert.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2}{5n^2+3n+7}, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n-4}{5^n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\frac{1}{\sqrt{7}}\Big)^n,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos n\pi}{(\sqrt{3})^n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \Big(1-\frac{2}{n}\Big)^{3n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+n+1}{n^3},$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{n\pi}}{\pi^{ne}}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \ln\Big(\frac{n+1}{n}\Big), \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{250^n},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Big(\frac{1}{\sqrt{5n+1}} - \frac{1}{\sqrt{5n+6}}\Big), \qquad \sum_{n=1}^{\infty} e^{-5n\pi}, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\pi^{ne}}{e^{n\pi}}.$$

Hinweis: Es gilt $\ln(a/b) = \ln a - \ln b$ für alle $a, b > 0$.

Lsung von Aufgabe 10.53

Die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2}{5n^2+3n+7}$$

ist divergent, da $\lim_{n\to\infty} (2n^2)/(5n^2+3n+7) = 0.4 \neq 0$ gilt.

Die geometrischen Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} (3/5)^n$ und $-4 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (1/5)^n$ konvergieren. Daher konvergiert auch die gliedweise Summe dieser Reihen und

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n-4}{5^n} = \sum_{n=0}^{\infty} 0.6^n - 4\sum_{n=0}^{\infty} 0.2^n = \frac{1}{1-0.6} - \frac{4}{1-0.2} = -2.5.$$

Die geometrische Reihe mit dem Faktor $1/\sqrt{7} < 1$ konvergiert und

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Big(\frac{1}{\sqrt{7}}\Big)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\frac{1}{\sqrt{7}}\Big)^n - 1 = \frac{1}{1-1/\sqrt{7}} - 1 = \frac{1}{\sqrt{7}-1}.$$

Es ist $\cos n\pi = 1$, falls n gerade ist, und $\cos n\pi = -1$, falls n ungerade ist. Daher ist die vierte vorgelegte Reihe als geometrische Reihe mit dem Faktor $-1/\sqrt{3}$ konvergent

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\pi}{(\sqrt{3})^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\frac{-1}{\sqrt{3}}\Big)^n = \frac{1}{1+1/\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}.$$

Für die Glieder der Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Big(1-\frac{2}{n}\Big)^{3n}$$

gilt

$$\lim_{n\to\infty} \Big(1-\frac{2}{n}\Big)^{3n} = \lim_{n\to\infty} \Big(1-\frac{6}{3n}\Big)^{3n} = e^{-6} \neq 0,$$

und daher divergiert sie.

Die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+n+1}{n^3}$$

ist divergent, denn für die Partialsummen gilt

$$\sum_{n=1}^{m} \frac{n^2+n+1}{n^3} \geq \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n},$$

und da die harmonische Reihe divergiert, ist diese Folge unbeschränkt.

Die geometrische Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{n\pi}}{\pi^{ne}}$$

divergiert wegen

$$\frac{e^{\pi}}{\pi^{e}} \approx 1.0303 > 1.$$

Es gilt für die Partialsummen

$$\sum_{n=1}^{m} \ln\Big(\frac{n+1}{n}\Big) = \sum_{n=1}^{m} (\ln(n+1) - \ln n) = \ln(m+1),$$

und diese Folge konvergiert offenbar nicht.

Für die Qoutienten zweier aufeinanderfolgender Glieder der Reihe gilt

$$\frac{(n+1)!}{250^{n+1}} \cdot \frac{250^n}{n!} = \frac{n+1}{250} \to \infty.$$

Daher bilden die Folgenglieder keine Nullfolge, und die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{250^n}$$

konvergiert nicht.

Es gilt

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{m} \Big(\frac{1}{\sqrt{5n+1}} - \frac{1}{\sqrt{5n+6}}\Big) &= \sum_{n=1}^{m} \Big(\frac{1}{\sqrt{5n+1}} - \frac{1}{\sqrt{5(n+1)+1}}\Big) \\ &= \frac{1}{\sqrt{6}} - \frac{1}{5(m+1)+1}. \end{aligned}$$

Hieraus liest man ab, dass die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Big(\frac{1}{\sqrt{5n+1}} - \frac{1}{\sqrt{5n+6}}\Big) = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

konvergiert.

Wegen $|e^{-5\pi}| < 1$ konvergiert die geometrische Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-5n\pi} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(e^{-5\pi}\right)^n - 1 = \frac{1}{1-e^{-5\pi}} - 1 = \frac{e^{-5\pi}}{1-e^{-5\pi}}.$$

Es ist $|\pi^e/e^\pi| \approx 0.9705 < 1$, und daher konvergiert die geometrische Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\pi^{ne}}{e^{n\pi}} = \frac{1}{1-\pi^e/e^\pi}.$$

□

Aufgabe 10.54 *Zeigen Sie, dass die Reihe*

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{3n-10}\cdot\frac{n+1}{n+3}\right)$$

konvergiert, und bestimmen Sie einen Index $N \in \mathbb{N}$*, so dass für alle* $n \geq N$ *die Partialsumme* s_n *sich vom Grenzwert der Reihe um weniger als* 0.01 *unterscheidet.*

Lsung von Aufgabe 10.54
Die Reihe ist (für $n \geq 4$) alternierend und wegen

$$\frac{1}{3n-10}\cdot\frac{n+1}{n+3} > \frac{1}{3n-7}\cdot\frac{n+2}{n+4} \iff 3n^2+9n+32>0$$

folgt die Konvergenz aus dem Leibniz Kriterium (Satz 10.??).

Der gesuchte Index N ist die kleinste natürliche Zahl $n \geq 4$ mit

$$\frac{n+1}{(3n-10)(n+3)} \; < \; 0.01 \iff 3n^2-101n-130 \; > \; 0,$$

d.h. $N = 35$. □

Aufgabe 10.55 *Untersuchen Sie die Konvergenz der angegebenen Reihen:*

a) : $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$, **b)** : $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\left(\sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{n}\right)$,

c) : $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(n\pi)}{\sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{n}}$, **d)** : $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^{n-1}}{(-n)^n}$,

e) : $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)$.

Lsung von Aufgabe 10.55
a): Durch Erweitern mit $\sqrt{n+1}+\sqrt{n}$ erhält man

$$\sqrt{n+1}-\sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}.$$

Da dies eine monoton fallende Nullfolge ist, sind die Voraussetzungen des Leibniz Kriteriums erfüllt, und die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$$

ist konvergent.

b): Durch Erweitern mit $\sqrt{n+\sqrt{n}}+\sqrt{n}$ erhält man

$$\sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{n}=\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+\sqrt{n}}+\sqrt{n}}=\frac{1}{\sqrt{1+1/\sqrt{n}}+1}.$$

Die Glieder der Reihe konvergieren nicht einmal gegen 0, und daher divergiert

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot(\sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{n}).$$

c): Es gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(n\pi)}{\sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{n}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{n}}.$$

Die Reihe ist also alternierend. Wie in Teil b) konvergieren die Glieder der Reihe aber nicht gegen 0, so dass die Reihe divergiert.

d): Nach dem Leibniz Kriterium konvergiert die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^{n-1}}{(-n)^n}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{(n+1)^{n-1}}{n^n},$$

denn wegen

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{n-1}}{n^n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\frac{1}{n+1}=e\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0$$

bilden die Reihenglieder d_n eine Nullfolge und wegen

$$\begin{aligned}
& d_n=\frac{(n+1)^{n-1}}{n^n}\geq d_{n+1}=\frac{(n+2)^n}{(n+1)^{n+1}}\\
\iff\quad & \left(\frac{(n+1)^2}{n}\right)^n\geq(n+2)^n\\
\iff\quad & (n+1)^2\geq n(n+2)
\end{aligned}$$

ist diese Folge monoton fallend.

e): Die Folge

$$e_n:=\frac{(-1)^{n+1}}{n}\Big(\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j}\Big)$$

erfüllt offenbar $e_n\cdot e_{n+1}<0$ für alle $n\in\mathbb{N}$ und ist als Folge der arithmetischen Mittel der Folge $\{1/k\}$ nach Aufgabe 10.13 eine Nullfolge. Die Reihe konvergiert also nach dem Leibniz Kriterium, wenn die Folge $\{e_n\}$ für genügend große n monoton fällt.

Es gilt

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j} > \frac{1}{n+1}\sum_{j=1}^{n+1}\frac{1}{j} \\
\Longleftrightarrow\quad & (n+1)\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j} > n\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j} + \frac{n}{n+1} \\
\Longleftrightarrow\quad & \sum_{j=1}\frac{1}{j} > \frac{n}{n+1}.
\end{aligned}$$

Die letzte Ungleichung ist sicher für genügend große $n \in \mathbb{N}$ erfüllt, denn die rechte Seite konvergiert gegen 1, und die harmonische Reihe auf der linken Seite divergiert bestimmt gegen ∞. □

Aufgabe 10.56 *Es seien $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ Reihen mit positiven Gliedern, so dass der Grenzwert der Quotienten*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} =: \alpha$$

existiert. Zeigen Sie,

a) *dass im Fall $\alpha > 0$ die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ genau dann konvergiert, wenn die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergiert,*

b) *dass im Fall $\alpha = 0$ aus der Konvergenz der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ folgt, dass auch $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert.*

Welche der folgenden Reihen konvergieren:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{n+5}{2n+7}\Big)^n, \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^3+5}}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n^3+2n^2-n+2}{5n^4+4n^3+3n^2+2n+1},$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt[n]{n}}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+\sin n}{n^2+3n+7}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+1}}{n^2+1}$$

Lsung von Aufgabe 10.56
a): Es sei $\alpha > 0$. Dann gibt es zu $\varepsilon := \alpha/2$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$\frac{\alpha}{2} = \alpha - \varepsilon < \frac{a_n}{b_n} < \alpha + \varepsilon = \frac{3\alpha}{2} \quad \text{für alle } n \geq N.$$

Für diese n gilt also $a_n \leq 1.5\alpha b_n$, so dass aus dem Majorantenkriterium die Konvergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ die Konvergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ impliziert. Ferner folgt $b_n < 2a_n/\alpha$ für alle $n \geq N$, so dass ebenfalls mit dem Majorantenkriterium aus der Konvergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diejenige von $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ folgt.

b): Im Fall $\alpha = 0$ erhält man wie in Teil a) aus der Konvergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diejenige von $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Die Konvergenz der angegebenen Reihen untersuchen wir mit den hergeleiteten Vergleichskriterien.

Es sei $a_n := ((n+5)/(2n+7))^n$ und $b_n := (1/2)^n$. Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \Big(\frac{2n+10}{2n+7}\Big)^n = \lim_{\infty} \frac{(1+5/n)^n}{(1+3.5/n)^n} = e^{1.5},$$

und da die geometrische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} 0.5^n$ konvergiert, ist auch die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Big(\frac{n+5}{2n+7}\Big)^n$$

nach Teil a) konvergent.

Mit $a := 1/\sqrt{n^3+1}$ und $b_n := n^{-3/2}$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+1/n^3}} = 1,$$

und da $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-3/2}$ konvergiert, ist auch

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3+5}}$$

nach Teil a) konvergent.

Die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n^3+2n^2-n+2}{5n^4+4n^3+3n^2+2n+1}$$

hat wegen

$$\lim_{n\to\infty} \frac{4n^3+2n^2-n+2}{5n^4+4n^3+3n^2+2n+1} \cdot \frac{n}{1} = \frac{4}{5}$$

dasselbe Konvergenzverhalten wie die harmonische Reihe, divergiert also.

Es sei $a_n := 1/(n \cdot \sqrt[n]{n})$ und $b_n := 1/n$. Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1,$$

und daher divergiert die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt[n]{n}}.$$

Mit

$$a_n := \frac{1+\sin n}{n^2+3n+7} \quad \text{und} \quad b_n := \frac{1}{n^{3/2}}$$

gilt
$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\sin n}{n^{1/2}+3n^{-1/2}+7n^{-3/2}}=0.$$
Nach Teil b) konvergiert also die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

Die Reihe
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+1}}{n^2+1}$$
konvergiert, denn mit $a_n=\sqrt{n+1}/(n^2+1)$ und $b_n:=1/n^{3/2}$ gilt
$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+1}}{n^2+1}\cdot n^{3/2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1+1/n}}{1+1/n^2}=1.$$
□

Aufgabe 10.57 *Zeigen Sie, dass die Reihe*
$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n := \sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$$
divergent ist. Ist dies kein Widerspruch zum Leibniz Kriterium?

Hinweis: Es gilt für alle $n \geq 2$
$$\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}+\frac{-1}{n+(-1)^n\sqrt{n}}.$$

Lsung von Aufgabe 10.57

Wir nehmen an, dass die Reihe konvergiert. Da nach dem Leibniz Kriterium die Reihe
$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$$
konvergiert, ist dann auch die Reihe
$$\sum_{n=2}^{\infty} b_n := \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n+(-1)^n\sqrt{n}} = -\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$$
konvergent.

Diese Reihe besitzt positive Glieder $b_n := 1/(n+(-1)^n\sqrt{n})$, und es gilt mit $c_n := 1/n$
$$\lim_{n\to\infty}\frac{c_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+(-1)^n/\sqrt{n}}=1.$$
Daher ist mit der harmonischen Reihe nach Aufgabe 10.56 auch die Reihe $\sum_{n=2}^{\infty} b_n$ divergent im Widerspruch zur Annahme, dass die Reihe $\sum_{n=2}^{\infty} a_n$ konvergiert.

Die Reihe $\sum_{n=2}^{\infty} a_n$ ist sicher alternierend und ihre Glieder a_n bilden eine Nullfolge. Die Folge $\{(-1)^n a_n$ ist jedoch nicht monoton fallend, so dass nicht alle Voraussetzungen des Leibniz Kriteriums erfüllt sind. □

Aufgabe 10.58 *Es sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eine konvergente Reihe. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?*

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ *ist konvergent.*

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt{|a_n|}$ *ist konvergent.*

c) Die Folge $\Big\{\sum\limits_{j=n}^{2n} a_j\Big\}$ *ist konvergent.*

d) Ist $\{b_n\}$ eine beschränkte Folge, so konvergiert $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$.

e) Ist $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *konvergent, so konvergiert* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$.

f) $|a_n - a_{n+1}|$ *ist eine Nullfolge.*

g) $\Big\{\frac{1}{n}\sum\limits_{j=1}^{n} a_j\Big\}$ *ist eine Nullfolge.*

Lsung von Aufgabe 10.58
a): Die Aussage ist falsch, denn für $a_n := (-1)^n/\sqrt{n}$ konvergiert die Reihe $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ nach dem Leibniz Kriterium, und die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

divergiert.

b): Die Aussage ist falsch, denn für $a_n := 1/n^2$ konvergiert die Reihe $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$, und die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

divergiert.

c): Nach dem Cauchy Kriterium gibt es zu $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$\Big|\sum_{j=n}^{m} a_j\Big| < \varepsilon \quad \text{für alle } m > n \geq N.$$

Es gilt also auch für $n \geq N$

$$\Big|\sum_{j=n}^{2n} a_j\Big| < \varepsilon,$$

und daher konvergiert die angegebene Folge gegen 0.

d): Die Aussage ist falsch, denn für $a_n := (-1)^n/n$ und $b_n := (-1)^n$ konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, und die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

divergiert.

e): Die Aussage ist falsch, denn für $a_n := b_n := (-1)^n/\sqrt{n}$ konvergieren die Reihen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, aber

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

divergiert.

f): Die Aussage ist wahr, denn

$$|a_n - a_{n+1}| \leq |a_n| + |a_{n+1}| \to 0 \quad \text{für } n \to \infty.$$

g): Die Aussage ist wahr, denn aus der Konvergenz der Reihe $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ folgt, dass $\{a_n\}$ eine Nullfolge ist, und nach Aufgabe 10.13 ist dann auch die Folge der arithmetischen Mittel der ersten n Terme eine Nullfolge. □

Aufgabe 10.59 *Welche der angegebenen Reihen sind konvergent, welche sind divergent?*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4 + 2^n}{5^n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \Big(-\frac{n}{1+n^2}\Big)^n, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt[n]{n}},$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+\cos(n^2)}{1+n^2}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\frac{1}{2+\cos(n\pi/4)}\Big)^n, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\frac{n}{1+n}\Big)^{(n^2)},$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} 5^n e^{-n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}\Big),$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} \Big(1 - 1.5\sqrt[n]{n}\Big)^n, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \cdot n!}{n^n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot n!}{n^n},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_n}{2^n}, \quad p_n := \begin{cases} n^5 & \textit{falls } n \textit{ Primzahl} \\ 1 & \textit{sonst} \end{cases},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad a_{n+1} := \frac{3n+4}{5n-23} \cdot a_n, \; a_1 := 5,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad a_{n+1} := \frac{n}{n+1} \cdot a_n, \; a_1 := -2.$$

Lsung von Aufgabe 10.59

Wir zeigen, dass die Reihen $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{5^n}$ und $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{5^n}$ konvergieren. Dann folgt aus Satz 10.?? die Konvergenz der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4 + 2^n}{5^n}$. Die Konvergenz der ersten Reihe folgt aus dem Quotientenkriterium, denn es gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^4}{5^{n+1}} \cdot \frac{5^n}{n^4} = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^4 \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{5},$$

und die zweite Reihe ist die geometrische Reihe mit dem Faktor $\frac{2}{5}$, also ebenfalls konvergent.

Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}(n^4+2^n)/(5^n)$ konvergiert nach dem Quotientenkriterium, denn

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^4+2^{n+1}}{5^{n+1}} \cdot \frac{5^n}{n^4+2^n} = \frac{2}{5} < 1.$$

Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}(-n/(1+n^2))^n$ konvergiert nach dem Wurzelkriterium, denn

$$\lim_{n\to\infty} \left| -\frac{n}{1+n^2} \right| = 0 < 1.$$

Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n/\sqrt[n]{n}$ divergiert, denn die Folge $\{(-1)^n/\sqrt[n]{n}\}$ ist keine Nullfolge.

Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}(1+\cos(n^2))/(1+n^2)$ konvergiert nach dem Majorantenkriterium, denn es gilt

$$\left|\frac{1+\cos(n^2)}{1+n^2}\right| \leq \frac{2}{1+n^2},$$

und die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} 2/(1+n^2)$ konvergiert.

Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}(1/(2+\cos(n\pi/4)))^n$ divergiert, denn für $n = 4(2k-1)$, $k \in \mathbb{N}$, ist $\cos(n\pi/4) = -1$. Die zugehörigen Reihenglieder haben also den Wert 1, und daher konvergiert die Folge der Glieder nicht gegen 0.

Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n := \sum_{n=1}^{\infty}(n/(1+n))^{(n^2)}$ konvergiert nach dem Wurzelkriterium, denn

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(1+1/n)^n} = \frac{1}{e} < 1.$$

Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}((n!)^2)/((2n)!)$ konvergiert nach dem Quotientenkriterium, denn

$$\lim_{n\to\infty} \frac{((n+1)!)^2}{(2n+2)!} \cdot \frac{(2n)!}{(n!)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)} = \frac{1}{4} < 1.$$

Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} 5^n e^{-n}$ divergiert, denn es ist eine geometrische Reihe mit dem Faktor $5/e > 1$.

Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}(1/n - 1/(n^2))$ divergiert, denn diese Reihe hat nichtnegative Glieder, und es gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1/n - 1/(n^2)}{1/n} = \lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right) = 1,$$

und daher hat sie nach Aufgabe 10.56 dasselbe Konvergenzverhalten wie die harmonische Reihe.

Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}(1-1.5\sqrt[n]{n})^n$ konvergiert nach dem Wurzelkriterium, denn es gilt

$$\lim_{n\to\infty} |1-1.5\sqrt[n]{n}| = 0.5 < 1.$$

Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}(3^n \cdot n!)/(n^n)$ divergiert, denn nach dem Quotientenkriterium gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{3^n \cdot n!} = \lim_{n\to\infty} 3 \cdot \Big(\frac{n}{n+1}\Big)^n = \frac{3}{e} > 1.$$

Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}(2^n \cdot n!)/(n^n)$ konvergiert, denn nach dem Quotientenkriterium gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{2^n \cdot n!} = \lim_{n\to\infty} 2 \cdot \Big(\frac{n}{n+1}\Big)^n = \frac{2}{e} < 1.$$

Es gilt

$$\lim_{n\to\infty} \Big(\frac{n^5}{2^n}\Big)^{1/n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(\sqrt[n]{n})^5}{2} = \frac{1}{2}$$

und

$$\lim_{n\to\infty} \Big(\frac{1}{2^n}\Big)^{1/n} = \frac{1}{2},$$

und daher folgt aus dem Wurzelkriterium die Konvergenz der Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_n}{2^n}, \quad p_n := \begin{cases} n^5, & \text{falls } n \text{ Primzahl} \\ 1, & \text{sonst} \end{cases},$$

Die Konvergenz der Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad a_{n+1} := \frac{3n+4}{5n-23} \cdot a_n,\ a_1 := 5,$$

folgt aus dem Quotientenkriterium, denn

$$\lim_{n\to\infty} \Big|\frac{a_{n+1}}{a_n}\Big| = \lim_{n\to\infty} \Big|\frac{3n+4}{5n-23}\Big| = \frac{3}{5} < 1.$$

Die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad a_{n+1} := \frac{n}{n+1} \cdot a_n,\ a_1 := -2,$$

divergiert, denn durch vollständige Induktion zeigt man leicht, dass $a_n = -2/n$ gilt, d.h.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = -2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

□

Aufgabe 10.60 *a) Es sei* $a_n > 0$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$ *und*

$$b_n := \frac{a_{n+1}}{a_n}, \quad c_n := \sqrt[n]{a_n}.$$

Zeigen Sie, dass gilt:

$$\liminf_{n\to\infty} b_n \le \liminf_{n\to\infty} c_n \le \limsup_{n\to\infty} c_n \le \limsup_{n\to\infty} b_n.$$

b) Es seien $\alpha, \beta > 0$ *gegeben. Untersuchen Sie die Reihe* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$,

$$a_n = \begin{cases} \alpha^k \beta^k, & \text{falls} \quad n = 2k \\ \alpha^{k+1}\beta^k, & \text{falls} \quad n = 2k+1 \end{cases},$$

mit dem Wurzelkriterium und dem Quotientenkriterium auf Konvergenz.

Lsung von Aufgabe 10.60

a): Die mittlere der Ungleichungen ist trivial. Wir beweisen die rechte Ungleichung, die linke folgt analog.

Es sei

$$b := \limsup_{n\to\infty} b_n.$$

Ist $\varepsilon > 0$ gegeben, so gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so dass

$$b_n \le b + \varepsilon \quad \text{für alle } n \ge N.$$

Es gilt für alle $n \ge N$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdot \ldots \cdot \frac{a_2}{a_1} \cdot a_1 = b_n \cdot b_{n-1} \cdot b_{n-2} \cdot \ldots \cdot b_1 \cdot a_1 \\ &= (b+\varepsilon)^{n-N} \cdot a_1 \cdot \prod_{j=1}^{N} b_j = (b+\varepsilon)^n \cdot \Big[\frac{a_1}{(b+\varepsilon)^N} \cdot \prod_{j=1}^{N} b_j\Big] =: (b+\varepsilon)^n \cdot M, \end{aligned}$$

und wegen $\sqrt[n]{M} \to 1$ für $n \to \infty$ folgt hieraus

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \le b.$$

b): Wir betrachten zunächst das Quotientenkriterium. Es gilt

$$\frac{a_{2k+1}}{a_{2k}} = \alpha, \quad \frac{a_{2k+2}}{a_{2k+1}} = \beta.$$

Daher erhält man mit dem Quotientenkriterium genau dann die absolute Konvergenz der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, wenn

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \max\{\alpha, \beta\} < 1$$

gilt, und Divergenz im Fall

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \min\{\alpha,\beta\} > 1.$$

In den Fällen $\alpha \le 1 \le \beta$ und $\beta \le 1 \le \alpha$ ist keine Entscheidung mit dem Quotientenkriterium möglich.

Wir betrachten nun das Wurzelkriterium. Es gilt

$$\sqrt[n]{a_n} = \begin{cases} \sqrt{\alpha\beta}, & \text{falls} \quad n = 2k \\ \sqrt[2k+1]{\alpha^{k+1}\beta^k}, & \text{falls} \quad n = 2k+1 \end{cases} .$$

Hieraus erhält man leicht, dass

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \sqrt{\alpha\cdot\beta}$$

gilt. Das Wurzelkriterium liefert also, für $\alpha\cdot\beta < 1$ Konvergenz der Reihe und für $\alpha\cdot\beta > 1$ Divergenz. Nur für $\alpha\cdot\beta = 1$ kan mit dem Wurzelkriterium über die Konvergenz nicht entschieden werden.

In diesem Fall ist aber $a_{2n} = 1$, und es ist nicht einmal das notwendige Kriterium $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ für die Konvergenz von Reihen erfüllt.

Anmerkung: Teil a) von Aufgabe 10.60 sagt, dass das Wurzelkriterium stärker ist als das Quotientenkriterium, d.h. wenn die absolute Konvergenz oder die Divergenz einer Reihe aus dem Quotientenkriterium folgt, so ist auch das Wurzelkriterium anwendbar. Das Quotientenkriterium ist aber in vielen Beispielen handlicher als das Wurzelkriterium. Teil b) zeigt, dass es Beispiele gibt, auf die das Wurzelkriterium anwendbar ist, nicht aber das Quotientenkriterium. □

Aufgabe 10.61 *a) Es sei a_n definiert durch*

$$a_n := \begin{cases} -\frac{1}{n}, & \textit{falls } n \textit{ durch 3 teilbar} \\ \frac{1}{n}, & \textit{sonst} \end{cases} .$$

Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergiert.

b) Bestimmen Sie $\alpha \in \mathbb{R}$ so, dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ mit

$$a_n := \begin{cases} -\frac{\alpha}{n}, & \textit{falls } n \textit{ durch 3 teilbar} \\ \frac{1}{n}, & \textit{sonst} \end{cases}$$

konvergiert.

Lsung von Aufgabe 10.61

a): Wir nehmen an, dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert. Dann kann man beliebig Klammern setzen, und es konvergiert auch

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3k-2}+\frac{1}{3k-1}-\frac{1}{3k}\right)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{9k^2-2}{3k(3k-1)(3k-2)}.$$

Man rechnet jedoch leicht nach, dass

$$\frac{9k^2-2}{3k(3k-1)(3k-2)}\geq\frac{1}{3k}$$

gilt, so dass die Reihe nach dem Minorantenkriterium nicht konvergieren kann.

b): Nach den Überlegungen in Teil a) kann man nur dann Konvergenz erwarten, wenn der Zähler in

$$\frac{1}{3k-2}+\frac{1}{3k-1}-\frac{\alpha}{3k}=\frac{18k^2-9k-\alpha(9k^2-9k+2)}{3k(3k-1)(3k-2)}$$

nicht quadratisch wächst, d.h für $\alpha=2$. In diesem Fall gilt

$$\frac{1}{3k-2}+\frac{1}{3k-1}-\frac{\alpha}{3k}=\frac{9k-4}{3k(3k-1)(3k-2)}=:b_k.$$

Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konvergiert nach dem Quotientenkriterium. Zu $\varepsilon>0$ gibt es also ein $K\in\mathbb{N}$ mit

$$\Big|\sum_{k=m}^{n} b_k\Big|<\varepsilon\quad\text{für alle } n,m\geq K.$$

Hieraus erhält man die Konvergenz der Reihe $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$, denn in einem beliebigen Abschnitt $\sum_{j=m}^{n} a_j$ dieser Reihe kann man jeweils drei aufeinanderfolgende Glieder zu Elementen b_k zusammenfassen, wobei höchstens die beiden ersten Terme $1/m$ und $1/(m+1)$ und die letzten beiden Terme $1/(n-1)$ und $1/n$ nicht mit erfasst werden. Schätzen wir diese durch $1/m$ ab, so erhält man

$$\Big|\sum_{j=m}^{n} a_j\Big|<\frac{4}{m}+\varepsilon\quad\text{für alle } n,m\geq 3K.$$

Wählt man also $N\geq\max(3K,4/\varepsilon)$, so folgt

$$\Big|\sum_{j=m}^{n} a_j\Big|<2\varepsilon\quad\text{für alle } n,m\geq N.$$

Anmerkung: Das Beispiel in Teil a) zeigt erneut die Wichtigkeit der Voraussetzung im Leibniz Kriterium, dass die Folge $\{|a_n|\}$ monoton fallend ist. Fasst man die beiden aufeinanderfolgenden positiven Terme jeweils zusammen, so erhält man eine alternierende Reihe, deren Glieder gegen 0 konvergieren, die aber nicht konvergiert.

$\square$

Aufgabe 10.62 *Zeigen Sie*

a) *Es seien* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ *und* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$ *konvergent. Dann konvergiert* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ *absolut, und es gilt die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n b_n| \leq \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2} \cdot \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2}. \tag{10.8}$$

b) *Es seien* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ *und* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$ *konvergent. Dann konvergiert* $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)^2$, *und es gilt*

$$\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)^2} \leq \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2} + \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2}.$$

c) *Es sei* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konvergent,* $a_n \geq 0$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$ *und* $\alpha > 0.5$. *Dann konvergiert die Reihe*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{a_n}}{n^\alpha}.$$

Lsung von Aufgabe 10.62

a): $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n b_n|$ ist eine Reihe mit positiven Gliedern. Sie konvergiert also, wenn sie beschränkt ist. Die Beschränktheit folgt für festes n aus der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung im Raum $\mathbb{R}^n$, denn diese besagt

$$\sum_{j=1}^{n} |a_j b_j| \leq \sqrt{\sum_{j=1}^{n} a_j^2}\sqrt{\sum_{j=1}^{n} b_j^2}.$$

Für $n \to \infty$ erhält man hieraus auch die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung (10.8).

b): Für die Dreiecksungleichung geht man wie in a) vor. Aus der Dreiecksungleichung in $\mathbb{R}^n$ folgt

$$\sqrt{\sum_{j=1}^{n}(a_j + b_j)^2} \leq \sqrt{\sum_{j=1}^{n} a_j^2} + \sqrt{\sum_{j=1}^{n} b_j^2}.$$

Da die rechte Seite beschränkt ist, ist die Reihe $\sum_{j=1}^{\infty}(a_j + b_j)^2$ mit nichtnegativen Gliedern beschränkt, und mit dem Grenzübergang $n \to \infty$ erhält man die Behauptung.

c): Die Behauptung folgt aus Teil a), da die Reihen $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n}^2$ und $\sum_{n=1}^{\infty}(1/n^\alpha)^2$ für $\alpha > 0.5$ konvergieren. □

Aufgabe 10.63 *Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sei absolut konvergent. Prüfen Sie die folgenden Reihen auf absolute Konvergenz. Prüfen Sie, ob auch die Umkehrung gilt.*

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$,

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$, *wobei* $\{b_n\}$ *eine beschränkte Folge ist,*

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n}$,

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^2}{1+a_n^2}$,

e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n a_{n+1}}{|a_n|+|a_{n+1}|}$.

Lsung von Aufgabe 10.63

a): Da $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert, ist $\{a_n\}$ eine Nullfolge. Es gibt also ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|a_n| < 1$ für alle $n \geq N$, und für diese n gilt $a_n^2 < |a_n|$. Ferner gibt es zu gegebenem $\varepsilon > 0$ ein $M \in \mathbb{N}$ mit

$$\Big|\sum_{j=m}^{n} |a_j|\Big| < \varepsilon \quad \text{für alle } m, n \geq M.$$

Es folgt also für $m, n \geq \max(N, M)$

$$\Big|\sum_{j=m}^{n} a_j^2\Big| < \varepsilon.$$

Die Umkehrung gilt nicht, denn $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$ konvergiert, nicht aber die harmonische Reihe.

b): Die Reihe ist nach dem Majorantenkriterium absolut konvergent, denn mit $K := \sup_{n=1,2,\ldots} |b_n|$ gilt

$$|a_n b_n| \leq K \cdot |a_n|.$$

Die Umkehrung gilt nicht, denn für $a_n := b_n := 1/n$ ist die Folge $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ absolut konvergent aber die harmonische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nicht.

c): Aus der Konvergenz der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ folgt insbesondere $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Daher gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|a_n| < 0.5$ für alle $n \geq N$, und es folgt für diese n

$$\Big|\frac{a_n}{1+a_n}\Big| \leq 2 \cdot |a_n|.$$

Das Majorantenkriterium liefert die absolute Konvergenz.

Die Umkehrung gilt ebenfalls, denn zunächst ist wieder $\lim_{n\to\infty} a_n/(1+a_n) = 0$. Hieraus folgt auch $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Es gibt also ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|1+a_n| \leq 2$ für alle $n \geq N$, und für diese n gilt

$$|a_n| \leq 2 \cdot \frac{|a_n|}{|1+a_n|}.$$

d): Die Reihe ist absolut konvergent, denn nach Teil a) konvergiert zunächst die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$, und nach Teil c) folgt dann die absolute Konvergenz von

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^2}{1+a_n^2}. \tag{10.9}$$

Die Umkehrung gilt nicht. Man erhält zwar wie in Teil c) aus der Konvergenz der Reihe (10.9) die Konvergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$, aber hieraus folgt nicht die Konvergenz der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Für $a_n := 1/n$ konvergiert die harmonische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nicht, aber die Reihe (10.9) konvergiert, denn ihre Glieder haben dasselbe asymptotische Verhalten wie die der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$, und hieraus folgt die absolute Konvergenz (vgl Aufgabe 10.56).

e): Ist die Reihe definiert, sind also in der Originalreihe keine zwei aufeinderfolgenden Glieder gleichzeitig 0, so folgt die absolute Konvergenz aus dem Majorantenkriterium. Ist nämlich $a_{n+1} = 0$, so ist $|a_n a_{n+1}|/(|a_n| + a_{n+1}|)$ ebenfalls 0, und sonst gilt

$$\frac{|a_n \cdot a_{n+1}|}{|a_n| + |a_{n+1}|} \leq \frac{|a_n \cdot a_{n+1}|}{|a_{n+1}|} = |a_n|.$$

Die Umkehrung gilt nicht, denn für $a_{2n} = 0$ und $a_{2n-1} = 1$ konvergiert die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n a_{n+1}}{|a_n| + |a_{n+1}|}$$

aber nicht die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. □

Aufgabe 10.64 *Zeigen Sie mit Hilfe des Cauchy Produktes*

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} z^n \sum_{n=0}^{\infty} (-z)^n = \frac{1}{1-z^2}$ *für alle* $z \in \mathbb{C}$, $|z| < 1$,

b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) z^n = \frac{1}{(1-z)^2}$ *für alle* $z \in \mathbb{C}$, $|z| < 1$.

Lsung von Aufgabe 10.64

a): Die Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ und $\sum_{n=0}^{\infty}(-z)^n$ sind absolut konvergent für $|z| < 1$. Daher konvergiert auch das Cauchy Produkt

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}(-z)^n \sum_{n=0}^{\infty} z^n &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{n}(-1)^j z^j z^{n-j} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} z^n \sum_{j=0}^{n}(-1)^n = \sum_{n=0}^{\infty} z^{2n} = \frac{1}{1-z^2}.\end{aligned}$$

Dieses Ergebnis erhält man auch direkt aus

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}, \quad \sum_{n=0}^{\infty}(-z)^n = \frac{1}{1+z}.$$

b): Es gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)z^n = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{n} z^n = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{n} z^j \cdot z^{n-j}.$$

$\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)z^n$ ist also das Cauchy Produkt der absolut konvergenten Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} z^n$, $|z| < 1$, mit sich selbst. Daher folgt

$$\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)z^n = \Big(\sum_{n=0}^{\infty} z^n\Big)^2 = \frac{1}{(1-z)^2}, \quad |z| < 1.$$

□

Aufgabe 10.65 *Untersuchen Sie das Cauchy Produkt*

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{n} a_j a_{n-j}, \quad a_j := \frac{(-1)^j}{\sqrt{j+1}},$$

auf Konvergenz.

Lsung von Aufgabe 10.65

Für die Glieder des Cauchy Produktes gilt

$$c_n := \sum_{j=0}^{n} \frac{(-1)^j}{\sqrt{n-j+1}} \cdot \frac{(-1)^{n-j}}{\sqrt{n+1-j}} = (-1)^n \cdot \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{(j+1)(n-j+1)}}.$$

Wegen $(n-j+1)(j+1) \leq (n+1)^2$, $j = 0, \ldots, n$, gilt

$$\frac{1}{\sqrt{(j+1)(n-j+1)}} \geq \frac{1}{n+1},$$

d.h.

$$|c_n| \geq \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{n+1} = 1,$$

und daher divergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$.

Anmerkung: Die Ausgangsreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ in der letzten Aufgabe konvergiert nach dem Leibniz Kriterium. Dies zeigt, dass man nicht auf die absolute Konvergenz der Reihen im Cauchy Produkt verzichten kann. Tatsächlich kann man (schärfer als im Skript) zeigen, dass es genügt, für eine der beiden Reihen im Cauchy Produkt die absolute Konvergenz zu fordern. $\square$

Kapitel 11

Stetige Funktionen

11.1 Motivation und Definition

Aufgabe 11.1 *a) Zeigen Sie (unter Benutzung der geometrischen Definitionen), dass die Funktionen* sin *und* cos *stetig in* $x_0 = 0$ *sind.*

b) Zeigen Sie mit Hilfe der Additionstheoreme, dass die Funktionen sin *und* cos *stetig auf* $\mathbb{R}$ *sind.*

Lsung von Aufgabe 11.1
a): Mit den Bezeichnungen der Abbildung 11.1 gilt

$$QP = |\sin(\varphi)|, \ AQ = 1 - \cos(\varphi).$$

Aus dem Satz von Pythagoras folgt

$$\sin^2(\varphi) + (1 - \cos(\varphi))^2 = (AP)^2,$$

Abbildung 11.1

und $AP < |\varphi|$ liefert

$$\sin^2(\varphi) + (1 - \cos(\varphi))^2 \leq \varphi^2.$$

Da die Summanden auf der linken Seite beide nichtnegativ sind, folgt

$$\sin^2(\varphi) \leq \varphi^2 \quad \text{und} \quad (1 - \cos(\varphi))^2 \leq \varphi^2,$$

d.h.

$$|\sin(\varphi)| \leq |\varphi| \quad \text{und} \quad |1 - \cos(\varphi)| \leq |\varphi|.$$

Hieraus liest man die Stetigkeit von sin und cos im Nullpunkt ab. Ist $\{\varphi_n\} \subset \mathbb{R}$ eine Nullfolge, so folgt

$$|\sin(\varphi_n)| \leq |\varphi_n| \to 0 \text{ für } n \to \infty \quad \text{d.h.} \quad \lim_{n\to\infty} \sin(\varphi_n) = 0 = \sin 0$$

und

$$|1 - \cos(\varphi_n)| \leq |\varphi_n| \to 0 \text{ für } n \to \infty \quad \text{d.h.} \quad \lim_{n\to\infty} \cos(\varphi_n) = 1 = \cos 0.$$

b): Es sei $x_0 \in \mathbb{R}$ fest gewählt und $\{x_n\} \subset \mathbb{R}$ eine beliebige Folge mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$. Dann gilt

$$\sin(x_n) = \sin(x_0 + (x_n - x_0)) = \sin(x_0) \cdot \cos(x_n - x_0) + \cos(x_0) \cdot \sin(x_n - x_0),$$

und daher

$$\begin{aligned} |\sin(x_0) - \sin(x_n)| &= |\sin(x_0) \cdot (1 - \cos(x_n - x_0)) - \cos(x_0) \cdot \sin(x_n - x_0)| \\ &\leq |\sin(x_0)| \cdot |1 - \cos(x_n - x_0)| + |\cos(x_0)| \cdot |\sin(x_n - x_0)|. \end{aligned}$$

Hieraus folgt die Stetigkeit der Funktion sin in x_0, denn nach Teil a) ist

$$\lim_{n\to\infty} \sin(x_n - x_0) = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty} \cos(x_n - x_0) = 1.$$

Die Stetigkeit der Funktion cos erhält man genauso aus

$$\cos(x_n) = \cos(x_0 + (x_n - x_0)) = \cos(x_0) \cdot \cos(x_n - x_0) - \sin(x_0) \cdot \sin(x_n - x_0).$$

$\square$

Aufgabe 11.2 *Untersuchen Sie mit der ε-δ–Charakterisierung die folgenden reellen Funktionen auf Stetigkeit in $x_0 = 0$:*

a) : $f(x) := |x|$

b) : $f(x) := \sqrt[4]{|x|}$

c) : $f(x) := \begin{cases} x^2 \sin(1/x) & \textit{für} \quad x > 0 \\ 0 & \textit{für} \quad x = 0 \\ -x & \textit{für} \quad x < 0 \end{cases}$

d) : $f(x) := \begin{cases} 1 & \textit{für} \quad x > 0 \\ 0 & \textit{für} \quad x = 0 \\ -1 & \textit{für} \quad x < 0 \end{cases}$

Lsung von Aufgabe 11.2

a): Es ist f in $x_0 = 0$ stetig, denn zu $\varepsilon > 0$ wähle $\delta = \varepsilon$ und finden

$$|x - 0| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(0)| = |x| < \delta = \varepsilon.$$

b): f ist stetig in $x_0 = 0$, denn zu gegebenem $\varepsilon > 0$ wählen wir $\delta := \varepsilon^4$. Hiermit gilt

$$|x - 0| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(0)| = \sqrt[4]{|x|} < \sqrt[4]{\delta} = \sqrt[4]{\varepsilon^4} = \varepsilon.$$

c): f ist stetigin $x_0 = 0$, denn zu $\varepsilon > 0$ wählen wir $\delta = \min\{1, \varepsilon\}$. Dann ist für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x - 0| < \delta$

$$|f(x) - f(0)| \leq \left\{ \begin{array}{ll} |x^2 \sin(1/x) - 0| & \leq |x| \\ |-x - 0| & \leq |x| \end{array} \right\} < \delta \leq \varepsilon.$$

d): f unstetig in $x_0 = 0$, denn es gilt

$$|f(x) - f(0)| = 1 \quad \text{für alle } x \neq 0.$$

Gibt man also irgendein $\varepsilon \in (0, 1)$ vor (z.B. $\varepsilon = 0.5$), so gilt

$$|f(x) - f(0)| > \varepsilon \quad \text{für alle } x \in (-\delta, \delta) \setminus \{0\}$$

so klein man $\delta > 0$ auch gewählt hat.

Damit gibt es ein $\varepsilon > 0$, so dass für alle $\delta > 0$ ein x existiert mit $|x - x_0| < \delta$ und $|f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon$. Dies ist gerade die Negation der ε-δ-Charakterisierung der Stetigkeit von f in x_0, und damit ist f unstetig in x_0. □

Aufgabe 11.3 *Untersuchen Sie die folgenden Funktionen in ihrem Definitionsbereich auf Stetigkeit:*

$$f : [0,1] \cup \{2\} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = x,$$

$$g : [0,1] \cup \{2\} \to \mathbb{R}, \qquad g(x) = \begin{cases} x, & \textit{falls} \ \ 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \textit{falls} \ \ x = 2, \end{cases}$$

$$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad h(x) := \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1 + x^{2n}},$$

$$i : [-1, 0) \cup \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \to \mathbb{R} \qquad i(x) = \begin{cases} 0, & \textit{falls} \ \ -1 \leq x < 0 \\ \frac{1}{x}, & \textit{falls} \ \ x \in \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}, \end{cases}$$

$$j : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad j(x) = \begin{cases} \sqrt{|x|} \sin \frac{1}{x^2}, & \textit{falls} \ \ x \neq 0 \\ 0, & \textit{falls} \ \ x = 0, \end{cases}$$

$$k : [0,1] \to \mathbb{R}, \qquad k(x) := 1 - x + \lfloor 2x \rfloor - \lfloor 1 - 2x \rfloor,$$

$$\ell : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad \ell(x) = \begin{cases} x, & \textit{falls} \ \ x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \textit{falls} \ \ x \notin \mathbb{Q}, \end{cases}$$

Lsung von Aufgabe 11.3

Die identische Abbildung $x \mapsto x$ ist sogar stetig in $\mathbb{R}$, d.h. in jedem Punkt aus $\mathbb{R}$, also auch in jedem Punkt von $[0,1] \cup \{2\}$.

Die Funktion g ist wie f stetig in $[0,1]$. Sie ist auch stetig in 2, denn ist $\{x_n\} \subset [0,1] \cup \{2\}$ eine Folge mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 2$, so gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $x_n = 2$ für alle $n \geq N$, und hierfür folgt $f(x_n) = 0$ für alle $n \geq N$, d.h. $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = 0 = f(2)$.

Es ist

$$h(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+x^{2n}} = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad |x| > 1 \\ 0.5 & \text{für} \quad x \in \{-1,1\} \\ 1 & \text{für} |x| < 1. \end{cases}$$

Hieraus liest man ab, dass h in der Menge $\mathbb{R} \setminus \{-1,1\}$ stetig ist aber nicht in den Punkten -1 und 1.

Die Funktion i ist stetig $D_i := [-1,0) \cup \{1/n \,:\, n \in \mathbb{N}\}$, denn in dem Intervall $[-1,0)$ ist sie konstant und damit stetig, und für $x_0 := 1/n$ für $n \in \mathbb{N}$ und gegebenes $\varepsilon > 0$ wählen wir $\delta := 1/(n+1)^2$. Dann gilt $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap D_i = \{x_0\}$ und daher

$$|i(x) - i(x_0)| = 0 \quad \text{für alle } x \in D_i \text{ mit } |x - x_0| < \delta.$$

Es ist $x \mapsto \sqrt{|x|}$ stetig in $\mathbb{R}$ und $x \mapsto 1/x^2$ und damit auch $x \mapsto \sin(1/x^2)$ stetig in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Daher ist j sicher stetig in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Es sei $x_0 = 0$ und $\varepsilon > 0$ gegeben. Dann gilt mit $\delta := \varepsilon^2$ für alle $x \neq 0$ mit $|x| < \delta$

$$|j(x) - j(x_0)| = |\sqrt{x} \sin \frac{1}{x^2}| \leq |\sqrt{|x|}| < \sqrt{\delta} = \varepsilon,$$

und daher ist j auch in $x_0 = 0$ stetig.

Es ist

$$\lfloor 2x \rfloor = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 0.5 \\ 1, & 0.5 \leq x < 1 \\ 2, & x = 1 \end{cases} \qquad - \lfloor 1 - 2x \rfloor = \begin{cases} -1, & x = 0 \\ 0, & 0 < x \leq 0.5 \\ 1, & 0.5 < x \leq 1 \end{cases},$$

und daher

$$k(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ 1 - x, & 0 < x < 0.5 \\ 1.5, & x = 0.5 \\ 3 - x, & 0.5 < x < 1 \\ 3, & x = 1. \end{cases}$$

Hieraus liest man ab, dass die Funktion k in $(0, 0.5) \cup (0.5, 1)$ stetig ist.

Für $x_0 \neq 0$ ist die Funktion ℓ unstetig, da in jedem Intervall $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ sowohl rationale als auch irrationale Zahlen liegen. In $x_0 = 0$ ist ℓ stetig, denn zu gegebenem $\varepsilon > 0$ wählen wir $\delta = \varepsilon$. Hiermit gilt

$$|\ell(x) - \ell(0)| = |\ell(x)| \leq |x| < \varepsilon \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R} \text{ mit } |x| < \delta = \varepsilon.$$

□

Aufgabe 11.4 *Zeigen Sie ausführlich mit den Rechenregeln für konvergente Folgen die Gültigkeit der folgenden Aussagen des Satzes 12.1:*

a) Es seien $f : V \supset D \longrightarrow W$ stetig in $x_0 \in D$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann sind auch $f+g$ und $\lambda \cdot f$ stetig in x_0.

b) Es sei $f : V \supset D \longrightarrow W$ stetig in $x_0 \in D$ und $g : W \supset \tilde{D} \longrightarrow Z$ stetig in $f(x_0) \in f(D) \subset \tilde{D}$. Dann ist $g \circ f$ stetig in x_0.

c) Es seien $f, g : V \supset D \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig in $x_0 \in D$. Dann ist auch $f \cdot g$ stetig in x_0. Ist überdies $f(x_0) \neq 0$, so ist auch $\frac{1}{f}$ stetig in x_0.

Lsung von Aufgabe 11.4

a): Sei $\{x_n\}$ eine beliebige Folge in D mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$. Dann ergibt sich aus der Stetigkeit von f und g in x_0:

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0), \quad \lim_{n\to\infty} g(x_n) = g(x_0),$$

also mit den Rechenregeln für konvergente Folgen auch

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} [f+g](x_n) &= \lim_{n\to\infty} [f(x_n) + g(x_n)] = \lim_{n\to\infty} f(x_n) + \lim_{n\to\infty} g(x_n) \\
&= f(x_0) + g(x_0) = [f+g](x_0), \\
\lim_{n\to\infty} [\lambda \cdot f](x_n) &= \lim_{n\to\infty} [\lambda \cdot f(x_n)] = \lambda \cdot \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lambda \cdot f(x_0) = [\lambda f](x_0).
\end{aligned}$$

b): Sei $\{x_n\}$ eine beliebige Folge in D mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ und $\{y_n\}$ eine beliebige Folge in $\tilde{D}$ mit $\lim_{n\to\infty} y_n = y_0 := f(x_0)$. Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0) \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty} g(y_n) = g(y_0).$$

Speziell für $y_n = f(x_n)$ hat man daher

$$\lim_{n\to\infty} [g \circ f](x_n) = \lim_{n\to\infty} g(f(x_n)) = g(f(x_0)) = [g \circ f](x_0).$$

c): Sei $\{x_n\}$ eine beliebige Folge in D mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}[f\cdot g](x_n) &= \lim_{n\to\infty}[f(x_n)\cdot g(x_n)] = \lim_{n\to\infty} f(x_n)\cdot \lim_{n\to\infty} g(x_n)\\ &= f(x_0)\cdot g(x_0) = [f\cdot g](x_0).\end{aligned}$$

Sei jetzt weiterhin $f(x_0)\neq 0$. Dann gibt es ein $N\in\mathbb{N}$ mit

$$f(x_n)\neq 0 \quad \text{für alle } n\geq N,$$

denn zu $\varepsilon>0$ gibt es ein $N_\varepsilon\in\mathbb{N}$ mit

$$|f(x_n)-f(x_0)|<\varepsilon \quad \text{für alle } n\geq N_\varepsilon,$$

und speziell für $\varepsilon := 0.5|f(x_0)|>0$ gilt

$$0.5|f(x_0)| = \varepsilon > |f(x_0)-f(x_n)| \geq |f(x_0)|-|f(x_n)| \quad \text{für alle } n\geq N_\varepsilon,$$

also

$$|f(x_n)| > 0.5|f(x_0)| > 0 \quad \text{für alle } n\geq N_\varepsilon.$$

Damit ist

$$\lim_{\substack{n\to\infty\\ n\geq N}}\Big[\frac{1}{f}\Big](x_n) = \lim_{\substack{n\to\infty\\ n\geq N}}\frac{1}{f(x_n)} = \frac{1}{\lim_{\substack{n\to\infty\\ n\geq N}} f(x_n)} = \frac{1}{f(x_0)} = \Big[\frac{1}{f}\Big](x_0).$$

□

Aufgabe 11.5 *a) Es sei V ein normierter Vektorraum und $f,g : V\supset D\to\mathbb{R}$ stetige Abbilfungen auf D. Zeigen Sie, dass dann auch*

$$\max(f,g) : D\to\mathbb{R},\ \max(f,g)(x) := \max(f(x),g(x))$$

und

$$\min(f,g) : D\to\mathbb{R},\ \min(f,g)(x) := \max(f(x),g(x))$$

stetig sind.

b) Es sei $f_n : V\supset D\to\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{N}$, eine Folge stetiger Funktionen, für die für alle $x\in D$ die Menge $\{f_n(x) : n\in\mathbb{N}\}$ nach oben beschränkt ist. Ist dann die Abbildung

$$\sup f_n : V\supset D\to\mathbb{R},\quad \sup f_n(x) := \sup_{n=1,2,\ldots} f_n(x),$$

ebenfalls stetig?

Lsung von Aufgabe 11.5

a): Es sei $x \in D$. Wir betrachten zunächst den Fall, dass $f(x) = g(x)$ gilt. Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta_f > 0$ mit

$$\|x - y\| < \delta_f \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

und ein $\delta_g > 0$ mit

$$\|x - y\| < \delta_g \quad \Longrightarrow \quad |g(x) - g(y)| < \varepsilon.$$

Daher gilt für alle $y \in D$ mit $\|x - y\| < \delta := \min(\delta_f, \delta_g)$

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon \quad \text{und} \quad |g(x) - g(y)| < \varepsilon$$

und daher auch (man beachte $\max(f, g)(x) = f(x) = g(x)$)

$$|\max(f, g)(y) - \max(f, g)(x)| < \varepsilon.$$

Es sei nun ohne Beschränkung der Allgemeinheit $f(x) < g(x)$. Wir wählen dann zu $\varepsilon := 0.5(g(x) - f(x))$ die Zahlen δ_f und δ_g wie im ersten Teil dieser Lösung. Dann gilt für alle $y \in D$ mit $\|x - y\| < \delta := \min(\delta_f, \delta_g)$

$$f(x) - \varepsilon < f(y) < f(x) + \varepsilon = g(x) - \varepsilon < g(y) < g(x) + \varepsilon.$$

Hieraus folgt, dass

$$\max(f, g)(y) = g(y) \quad \text{für alle } y \in D, \|x - y\| < \delta,$$

gilt, und daher ist $\max(f, g)$ mit g stetig in x.

Dass die Funktion $\min(f, g)$ stetig ist, erhält man unmittelbar aus $\min(f, g) = -\max(-f, -g)$ und der Stetigkeit von $-\max(-f, -g)$.

b): Die Funktion $\sup f_n$ ist i.a. nicht stetig, wie das folgende Beispiel zeigt: Es sei

$$f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}, \; f_n(x) := 1 - x^n.$$

Dann ist die Folge $\{f_n(x)\}$ für jedes feste $x \in [0, 1]$ monoton nicht fallend, und es gilt

$$\sup f_n(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls} \quad x \in [0, 1) \\ 0, & \text{falls} \quad x = 1. \end{cases}$$

□

Aufgabe 11.6 *Überprüfen Sie, ob die Funktion*

$$f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 0 & \textit{falls} \quad x < \sqrt{2} \\ 1 & \textit{falls} \quad x > \sqrt{2} \end{cases}$$

auf $\mathbb{Q}$ *stetig ist oder ob* f *Unstetigkeitsstellen besitzt.*

Lsung von Aufgabe 11.6

Die Funktion f ist stetig auf ganz $\mathbb{Q}$, den sei $x_0 \in \mathbb{Q}$ und $\{x_n\} \subset \mathbb{Q}$ eine Folge mit $x_n \to x_0$ für $n \to \infty$. Wir wählen $N \in \mathbb{N}$ so groß, dass

$$|x_n - x_0| < \frac{1}{2} \cdot |\sqrt{2} - x_0| \quad \text{für alle } n \geq N.$$

Dann gilt

$$f(x_n) = f(x_0) \quad \text{für alle } n \geq N,$$

und daher

$$\lim f(x_n) = f(x_0).$$

$\square$

Aufgabe 11.7 *Es sei* $f : \mathbb{R} \supset D \to \mathbb{R}$ *gegeben.*

a) f *heißt unbeschränkt in dem Punkt* x_0*, wenn es zu jedem* $M \geq 0$ *und zu jedem* $\delta > 0$ *ein* $x \in D$ *gibt mit* $|x - x_0| < \delta$ *und* $|f(x)| \geq M$*. Zeigen Sie, dass* f *in einer Unendlichkeitsstelle* x_0 *nicht stetig sein kann.*

b) x_0 *heißt Oszillationsstelle von* f*, wenn es Zahlen* $a < b$ *gibt, so dass für alle* $\delta > 0$ *es Punkte* $x, y \in D$ *mit* $|x - x_0| < \delta$ *und* $|y - x_0| < \delta$ *gibt mit* $f(x) < a$ *und* $f(y(> b$*. Zeigen Sie, dass* f *in einer Oszillationsstelle nicht stetig ist.*

Lsung von Aufgabe 11.7

a): Es sei x_0 eine Unendlichkeitsstelle von f. Wir nehmen an, dass $x_0 \in D$ ist (sonst ist die Frage nach der Stetigkeit von f in x_0 ohnehin sinnlos) und dass f stetig ist. Dann gibt es zu $\varepsilon := 1 > 0$ ein $\tilde{\delta} > 0$ mit

$$|f(x) - f(x_0)| < 1 \quad \text{für alle } x \in D \text{ mit } |x - x_0| < \tilde{\delta},$$

d.h. nach der Dreiecksungleichung

$$|f(x)| \leq |f(x_0)| + 1 \quad \text{für alle } x \in D \text{ mit } |x - x_0| < \tilde{\delta}.$$

Andererseits gibt es wegen der Unbeschränktheit von f in x_0 zu $M := |f(x_0)| + 2$ und $\delta := \tilde{\delta}/2 > 0$ ein $x \in D$ mit $|x - x_0| < \delta$ und $|f(x)| \geq M$. Für dieses x haben wir also den Widerspruch

$$|f(x)| \leq |f(x_0)| + 1 < M \leq |f(x)|.$$

b): Wir nehmen an, dass f in der Oszillationsstelle $x_0 \in D$ stetig ist. Es seien a und b wie in der Definitiion der Oszillationsstelle und $\varepsilon > 0$ mit $\varepsilon < 0.5(b - a)$. Dann gibt es hierzu ein $\delta > 0$ mit $|f(z) - f(x_0)| < \varepsilon$ für alle $z \in D$ mit $|z - x_0| < \delta$. Andererseits gibt es $x, y \in D$ mit $|x - x_0| < \delta$ und $|y - x_0| < \delta$, für die $f(x) < a$ und $f(y) > b$ gilt. Zusammen hat man also den Widerspruch

$$|f(y) - f(x)| = f(y) - f(x) > b - a \quad \text{und} \quad |f(y) - f(x)| < 0.5(b - a).$$

$\square$

Aufgabe 11.8 *Untersuchen Sie die Funktionen* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \textit{falls} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ 1, & \textit{falls} \quad x \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$g(x) = \begin{cases} 0, & \textit{falls} \quad x \notin \mathbb{Q} \\ \dfrac{1}{|p| + q} & \textit{falls} \quad x = \dfrac{p}{q}, \ p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}, \ |p| \ \textit{und} \ q \ \textit{teilerfremd} \end{cases}$$

auf Stetigkeit.

Lsung von Aufgabe 11.8

Die Funktion f ist nirgends stetig, denn jedes reelle Intervall $(x - \delta, x + \delta)$, $\delta > 0$, enthält sowohl rationale als auch irrationale Punkte. Es gilt also

$$\inf\{f(y) : x - \delta < y < x + \delta\} = 0 \quad \text{und} \quad \sup\{f(y) : x - \delta < y < x + \delta\} = 0.$$

Dies zeigt, dass die Forderungen aus der Stetigkeitsdefinition für $\varepsilon \in (0, 1)$ nicht erfüllbar sind.

Die Funktion g ist in rationalen Punkten p/q unstetig, denn die Folge $\{p/q + \pi/n\}$ konvergiert sicher gegen p/q und enthält nur nichtrationale Punkte. Daher gilt

$$\lim_{n \to \infty} g\Big(\frac{p}{q} + \frac{\pi}{n}\Big) = 0 \neq g\Big(\frac{p}{q}\Big) = \frac{1}{|p| + q}.$$

In nichtrationalen Punkten ist g stetig, denn sei $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ und $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben. Dann ist die Menge

$$M_\varepsilon := \{(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \,:\, |p| + q < \frac{1}{\varepsilon}\}$$

endlich. Wir definieren

$$\delta := \min\{\left|x - \frac{p}{q}\right| \,:\, (p,q) \in M\}.$$

Dann gilt $g(y) = 0$ für alle $y \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ mit $|x-y| < \delta$ und daher $|g(x)-g(y)| = 0 < \varepsilon$, und für alle $y \in \mathbb{Q}$ mit $|x - y| < \delta$ nach Konstruktion $|g(x) - g(y)| = |g(y)| < \varepsilon$. □

Aufgabe 11.9 $f \,:\, \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *heißt subadditiv, falls*

$$f(x + y) \leq f(x) + f(y) \quad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R}$$

gilt. Man zeige, dass eine subadditive Funktion, die stetig in $x = 0$ ist und für die $f(0) = 0$ gilt, stetig in $\mathbb{R}$ ist.

Lsung von Aufgabe 11.9
Es sei $x_0 \in \mathbb{R}$ und $\{x_n\} \subset \mathbb{R}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$. Dann gilt

$$f(x_n) = f(x_0 + (x_n - x_0)) \leq f(x_0) + f(x_n - x_0)$$

und

$$f(x_0) = f(x_n + (x_0 - x_n)) \leq f(x_n) + f(x_0 - x_n),$$

d.h.

$$f(x_n) \geq f(x_0) - f(x_0 - x_n).$$

Es sei nun $\varepsilon > 0$ gegeben. Dann gibt es wegen der Stetigkeit von f in $x = 0$ und $f(0) = 0$ ein $\delta > 0$ mit $|f(x)| < \varepsilon$ für alle $x \in (-\delta, \delta)$, und wegen der Konvergenz von $\{x_n\}$ gegen x_0 gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|x_n - x_0| < \delta$ für alle $n \geq N$.

Daher folgt für $n \geq N$

$$-\varepsilon < -f(x_0 - x_n) \leq f(x_n) - f(x_0) \leq f(x_n - x_0) < \varepsilon,$$

d.h.

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0).$$

□

11.2 Eigenschaften stetiger reeller Funktionen

Aufgabe 11.10 *Am Morgen um 6.00 Uhr macht ein Wanderer sich auf den Weg, eine hoch in den Bergen gelegene Hütte zu erreichen. Obwohl er einige Pausen einlegt, sitzt er bereits um 12.00 Uhr in der Stube dieser Hütte bei einer wohlverdienten Suppe.*

Am Morgen des darauffolgenden Tages beginnt er — wiederum um 6.00 Uhr — den Abstieg ins Tal. Dabei wählt er genau denselben Weg, auf dem er auch den Aufstieg bewältigt hat. Während der einsamen Wanderung fragt er sich nun, ob es wohl einen Ort auf dem Weg gibt, den er am Tage zuvor zum selben Zeitpunkt passiert hat.

Beantworten Sie die Frage des Wanderers.

Lsung von Aufgabe 11.10
Die Antwort ist: Ja!

Zu ihrer Begründung haben wir zwei mögliche Situationen zu unterscheiden:

1. Der Wanderer erreicht auf dem Rückweg das Tal vor 12.00 Uhr, sagen wir um R Uhr.

2. Der Wanderer befindet sich um 12.00 Uhr noch auf dem (etwas trödeligen) Abstieg.

Bezeichnen wir mit $f_h(t)$ die Funktion der Zeit, die die Position des Wanderers zur Zeit $t \in [6, 12]$ auf dem Hinweg beschreibt und mit $f_r(t)$ die entsprechende Funktion des Rückweges (wiederum $t \in [6, 12]$ oder $t \in [6, R]$) und gehen wir davon aus, dass Wanderer sich nur stetig fortbewegen können, so sind die beiden Situationen in Abbildung 11.2 angedeutet. Im ersten Fall gilt

$$f_h(6) - f_r(6) < 0, \quad f_h(R) - f_r(R) \geq 0,$$

im zweiten

$$f_h(6) - f_r(6) < 0, \quad f_h(12) - f_r(12) \geq 0.$$

In beiden Fällen begründet der Zwischenwertsatz durch Anwendung auf die stetige Funktion $f_h - f_r$ die Antwort. □

Abbildung 11.2: Situation 1 / Situation 2

Aufgabe 11.11 *a) Sei $f : [a,b] \to [a,b]$ stetig. Zeigen Sie, dass f einen Fixpunkt in $[a,b]$ besitzt.*

b) Ist die Aussage in a) auch richtig, wenn man $[a,b]$ durch $[0,\infty)$ oder durch (a,b) ersetzt ?

Lsung von Aufgabe 11.11

a): Mit f ist auch die Funktion

$$g : [a,b] \to \mathbb{R}, \quad g(x) := f(x) - x,$$

stetig auf $[a,b]$, und es gilt wegen $a \leq f(a), f(b) \leq b$

$$g(a) = f(a) - a \geq 0, \quad g(b) = f(b) - b \leq 0.$$

Nach dem Zwischenwertsatz besitzt g eine Nullstelle in $[a,b]$. Es gibt also ein $\xi \in [a,b]$ mit

$$g(\xi) = f(\xi) - \xi = 0, \quad \text{d.h.} \quad f(\xi) = \xi.$$

b): Ersetzt man $[a,b]$ in Teil a) durch $[0,\infty)$, so wird die Aussage falsch, denn die Funktion

$$f : [0,\infty) \to [0,\infty), \; f(x) := 1 + x,$$

besitzt keinen Fixpunkt. Genauso wird sie für das offene Intervall (a,b) falsch, denn die Funktion

$$f : (0,1) \to (0,1), \; f(x) = x^2,$$

besitzt keinen Fixpunkt in $(0,1)$ (Die einzigen Nullstellen der Fortsetzung $g(x) := x^2 - x$ von $f(x) - x$ sind $x_0 = 0$ und $x_1 = 1$). $\square$

Aufgabe 11.12 *Es sei*

$$p(x) := \sum_{j=0}^{n} \alpha_j x^j$$

ein Polynom vom Grade n. Zeigen Sie, dass

a) p für ungerades n eine reelle Nullstelle besitzt,

b) p für gerades n zwei reelle Nullstellen besitzt, falls $\alpha_0\alpha_n < 0$ gilt.

Lsung von Aufgabe 11.12

a): Da das Polynom p stetig auf $\mathbb{R}$ ist, folgt die Behauptung aus dem Zwischenwertsatz, wenn wir zeigen, dass es zwei Punkte $a, b \in \mathbb{R}$ gibt mit $p(a)p(b) < 0$.

Es ist anschaulich klar, dass für sehr großes $|x|$ die niedrigeren Potenzen $\sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j x^j$ gegen den führenden Term $\alpha_n x^n$ vernachlässigt werden können und dass $\alpha_n x^n$ und $\alpha_n(-x)^n$ für ungerades n entgegengesetztes Vorzeichen haben. Damit haben $p(x)$ und $p(-x)$ für sehr großes $|x|$ entgegengesetztes Vorzeichen, und wir sind fertig.

Analytisch sieht man das so ein: Wir nehmen o.B.d.A. an, dass $\alpha_n > 0$ gilt (sonst betrachten wir das Polynom $-p$, dessen führender Koeffizient positiv ist, und zeigen, dass $-p$ eine Nullstelle hat). Es ist für alle $x \in \mathbb{R}$

$$p(x) = x^n \cdot \Big(\alpha_n + \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j x^{j-n}\Big) \tag{11.1}$$

und

$$\alpha_n + \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j x^{j-n} \geq \alpha_n - \Big|\sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j x^{j-n}\Big| \geq \alpha_n - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{|\alpha_j|}{|x|^{n-j}}.$$

Wir bestimmen nun $\hat{x} \in \mathbb{R}$ so, dass die Klammer auf der rechten Seite von (11.1) für $\hat{x}$ und $-\hat{x}$ dasselbe Vorzeichen besitzt. Dann gilt sicher $p(\hat{x}) > 0$ und $p(-\hat{x}) < 0$. Wir erreichen dies z.B. urch die Wahl

$$\frac{|\alpha_j|}{|\hat{x}|^{n-j}} < \frac{\alpha_n}{n},\ j = 0, \ldots, n-1 \quad \Longleftrightarrow \quad |\hat{x}| > \max_{j=0,\ldots,n-1} \sqrt[n-j]{\frac{n|\alpha_j|}{\alpha_n}}.$$

b): Nehmen wir wieder o.B.d.A. an, dass $\alpha_n > 0$ gilt, so folgt für gerades n wie in Teil a) $p(\hat{x}) > 0$ und $p(-\hat{x}) > 0$ mit dem dort bestimmten $\hat{x}$. Nach dem Zwischenwertsatz besitzt p also zwei reelle Nullstellen, wenn ein $y \in (-\hat{x}, \hat{x})$ existiert mit $p(y) < 0$. Wegen $\alpha_n\alpha_0 < 0$, d.h. $\alpha_0 < 0$, ist dies für $y = 0$ der Fall. □

Aufgabe 11.13 *Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ mit $\lambda \cdot \mu > 0$. Zeigen Sie, dass ein $\xi \in [a, b]$ existiert mit*

$$f(\xi) = \frac{\lambda f(a) + \mu f(b)}{\lambda + \mu}$$

Lsung von Aufgabe 11.13
Die Behauptung folgt aus dem Zwischenwertsatz, wenn wir zeigen, dass

$$\frac{\lambda f(a) + \mu f(b)}{\lambda + \mu}$$

zwischen $f(a)$ und $f(b)$ liegt.

Dazu sind die Fälle $f(a) \leq f(b)$ und $f(a) \geq f(b)$ sowie $\lambda, \mu > 0$ und $\lambda, \mu < 0$ zu unterscheiden.

Wir beschränken uns auf den Fall (die anderen behandelt man genauso)

$$f(a) \leq f(b), \ \lambda, \mu < 0.$$

Hierfür gilt

$$\begin{aligned} f(a) \leq f(b) &\Longrightarrow \mu f(a) \geq \mu f(b) \\ &\Longrightarrow (\lambda + \mu) f(a) \geq \lambda f(a) + \mu f(b) \\ &\Longrightarrow f(a) \leq \frac{\lambda f(a) + \mu f(b)}{\lambda + \mu} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} f(a) \leq f(b) &\Longrightarrow \lambda f(a) \geq \lambda f(b) \\ &\Longrightarrow \lambda f(a) + \mu f(b) \geq (\lambda + \mu) f(b) \\ &\Longrightarrow \frac{\lambda f(a) + \mu f(b)}{\lambda + \mu} \leq f(b). \end{aligned}$$

□

Aufgabe 11.14 *Warum besitzt die Funktion*

$$g : [0,2] \to \mathbb{R}, \quad g(x) := \lim_{n \to \infty} \frac{x^4 - x^n \sin x}{1 + x^n \cos \frac{x}{2}}$$

keine Nullstelle in dem Intervall $[0,2]$*, obwohl* $g(0)$ *und* $g(2)$ *entgegengesetztes Vorzeichen haben?*

Lsung von Aufgabe 11.14
Es gilt

$$\begin{aligned} g(x) &= \lim_{n \to \infty} \frac{x^4 - x^n \sin x}{1 + x^n \cos \frac{x}{2}} = x^4 > 0 \quad \text{für } 0 \leq x < 1, \\ g(1) &= \lim_{n \to \infty} \frac{1 - \sin 1}{1 + \cos \frac{1}{2}} > 0, \\ g(x) &= \lim_{n \to \infty} \frac{x^{4-n} - \sin x}{x^{-n} + \cos \frac{x}{2}} = -\frac{\sin x}{\cos \frac{x}{2}} < 0 \quad \text{für } 1 < x \leq 2. \end{aligned}$$

Die Funktion ist also nicht stetig in $[0,2]$, und daher ist der Zwischenwertsatz nicht anwendbar. $\square$

Aufgabe 11.15 *Es seien $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, $x_1, \ldots, x_n \in [a,b]$ und $g_1, \ldots, g_n \in \mathbb{R}$ von einem Vorzeichen. Zeigen Sie, dass es ein $\xi \in [a,b]$ gibt mit*

$$\sum_{j=1}^{n} f(x_j) g_j = f(\xi) \sum_{j=1}^{n} g_j.$$

Lsung von Aufgabe 11.15
Wir betrachten den Fall $g_j > 0$ für $j = 1, \ldots, n$. Es sei

$$h(x) := f(x) \sum_{j=1}^{n} g_j - \sum_{j=1}^{n} f(x_j) g_j = \sum_{j=1}^{n} g_j \Big(f(x) - f(x_j) \Big).$$

Dann gilt

$$\max_{k=1,\ldots,n} h(x_k) = \max_{k=1,\ldots,n} \sum_{j=1}^{n} g_j \Big(f(x_k) - f(x_j) \Big) \geq 0$$

und

$$\min_{k=1,\ldots,n} h(x_k) = \min_{k=1,\ldots,n} \sum_{j=1}^{n} g_j \Big(f(x_k) - f(x_j) \Big) \leq 0.$$

Nach dem Zwischenwertsatz gibt es daher ein $\xi \in [a,b]$ mit $h(\xi) = 0$, d.h.

$$f(\xi) \sum_{j=1}^{n} g_j = \sum_{j=1}^{n} f(x_j) g_j.$$

$\square$

Aufgabe 11.16 *Es sei $I := \{x \in \mathbb{Q} : a \leq x \leq b\}$ ein rationales Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ stetig in I. Belegen Sie durch Beispiele, dass nicht notwendig*

a) $f(I)$ beschränkt ist,

b) f die Zwischenwerteigenschaft hat, d.h. aus $f(a) \cdot f(b) < 0$ nicht notwendig folgt, dass f eine Nullstelle in $[a,b]$ besitzt.

Lsung von Aufgabe 11.16
Wir betrachten die Funktion

$$f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}, \; f(x) := \frac{1}{x^2 - 2}.$$

Dann ist f stetig in $\mathbb{Q}$, denn die Fortsetzung

$$\tilde{f} : \mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\} \to \mathbb{R}, \; \tilde{f}(x) := \frac{1}{x^2 - 2},$$

ist als rationale Funktion mit von 0 verschiedenem Nenner stetig.

Ist $I := \{x \in \mathbb{Q} : a \leq x \leq b\}$ ein rationales Intervall mit $a < \sqrt{2} < b$, und $\{x_n\} \subset I$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sqrt{2}$, so ist $\{f(x_n)\}$ unbeschränkt. Speziell für $a = 0$ und $b = 2$ gilt $f(a) = -0.5 < 0$ und $f(a) = 0.5 > 0$, aber f besitzt keine Nullstelle in $[0, 2] \cap \mathbb{Q}$. □

11.3 Gleichmäßige Stetigkeit

Aufgabe 11.17 *a) Es seien V und W normierte Vektorräume. Eine Abbildung $f : V \supset D \to W$ heißt Lipschitz-stetig in D, wenn es eine Konstante $L \geq 0$ gibt, so dass gilt*

$$\|f(\boldsymbol{v}) - f(\boldsymbol{w})\| \leq L \cdot \|\boldsymbol{v} - \boldsymbol{w}\| \quad \textit{für alle } \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in D.$$

Zeigen Sie, dass jede in D Lipschitz-stetige Abbildung gleichmäßig stetig in D ist.

b) Untersuchen Sie, welche der folgenden Funktionen Lipschitz-stetig sind

$$\begin{array}{ll} f : [0,1] \to \mathbb{R}, & f(x) = x^2 \\ g : [0,1] \to \mathbb{R}, & g(x) = \sqrt{x} \\ h : [1,\infty) \to \mathbb{R}, & h(x) = \sqrt{x} \\ i : (0,1) \to \mathbb{R}, & i(x) = \frac{1}{x} \\ j : (10^{-8},\infty) \to \mathbb{R}, & j(x) = \frac{1}{x} \end{array}$$

Lsung von Aufgabe 11.17

a): Ist $L = 0$, so gilt $\|f(\boldsymbol{v}) - f(\boldsymbol{w})\| = 0$ für alle $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in D$ und f ist offenbar auf D konstant, also sicher gleichmäßig stetig.

Sei nun $L > 0$. Ist $\varepsilon > 0$ vorgegeben, so wählen wir $\delta := \varepsilon/L$. Dann gilt

$$\|\boldsymbol{v} - \boldsymbol{w}\| < \delta \implies \|f(\boldsymbol{v}) - f(\boldsymbol{w})\| \leq L \cdot \|\boldsymbol{v} - \boldsymbol{w}\| < \varepsilon,$$

d.h. f ist gleichmäßig stetig auf D.

b): Für $x, y \in [0, 1]$ gilt

$$|f(x) - f(y)| = |x^2 - y^2| = |x + y| \cdot |x - y| \leq 2|x - y|,$$

d.h. f ist Lipschitz-stetig.

g ist nicht Lipschitz-stetig in $[0,1]$. Den Beweis führen wir indirekt. Wir nehmen an, dass ein $L \geq 0$ existiert mit

$$|g(x) - g(y)| \leq L|x - y| \quad \text{für alle} \quad x, y \in [0,1].$$

Wir wählen $x = 0$ und $y \in (0,1]$. Dann gilt

$$|g(x) - g(y)| = |\sqrt{y}| = \frac{|y|}{\sqrt{y}} = \frac{|y - x|}{\sqrt{y}} \leq L|y - x|,$$

und dies ist sicher für $0 < y < 1/L^2$ nicht wahr.

Für $x, y \geq 1$ gilt

$$|h(x) - h(y)| = |\sqrt{x} - \sqrt{y}| = \frac{|x - y|}{|\sqrt{x} + \sqrt{y}|} \leq \frac{1}{2}|x - y|,$$

d.h. h ist Lipschitz-stetig.

$i(x) = 1/x$ ist nicht einmal gleichmäßig stetig in $(0,1)$, also erst recht nicht Lipschitz-stetig.

Für $x, y > 10^{-8}$ gilt

$$|j(x) - j(y)| = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right| = \frac{|x - y|}{xy} \leq 10^{16}|x - y|,$$

d.h. j ist Lipschitz-stetig. □

Aufgabe 11.18 *Negieren Sie die Aussage:*

$$f \text{ ist gleichmäßig stetig auf dem Intervall } [0,1].$$

Lsung von Aufgabe 11.18

f ist genau dann gleichmäßig stetig auf dem Intervall, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass für alle $x, y \in [0,1]$ mit $|x - y| < \delta$ gilt $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Die Negation hiervon ist: Es gibt ein ε, so dass für alle $\delta > 0$ es $x \in D$ und $y \in D$ gibt mit $|x - y| < \delta$ und $|f(x) - f(y)| \geq \varepsilon$. □

Aufgabe 11.19 *a) Es seien V und W Vektorräume und $f : V \supset D \to W$ gleichmäßig stetig. Es seien $\{\boldsymbol{x}^n\}, \{\boldsymbol{y}^n\} \subset D$ Folgen mit*

$$\lim_{n\to\infty} (\boldsymbol{x}^n - \boldsymbol{y}^n) = \mathbf{0}.$$

Zeigen Sie, dass dann

$$\lim_{n\to\infty} (f(\boldsymbol{x}^n) - f(\boldsymbol{y}^n)) = \mathbf{0}$$

gilt.

b) Gilt die Aussage auch, wenn f nicht als gleichmäßig stetig sondern nur als stetig vorausgesetzt wird?

Lsung von Aufgabe 11.19
a): Es sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Dann existiert wegen der gleichmäßigen Stetigkeit von f ein $\delta > 0$ mit

$$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in D,\ \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\| < \delta \quad \Longrightarrow \quad \|f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{y})\| < \varepsilon.$$

Zu $\delta > 0$ gibt es wegen $\lim\limits_{n\to\infty} (\boldsymbol{x}^n - \boldsymbol{y}^n) = \mathbf{0}$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$\|\boldsymbol{x}^n - \boldsymbol{y}^n\| < \delta \quad \text{für alle } n \geq N,$$

und daher folgt

$$\|f(\boldsymbol{x}^n) - f(\boldsymbol{y}^n)\| < \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq N,$$

d.h. es gilt

$$\lim_{n\to\infty} (f(\boldsymbol{x}^n) - f(\boldsymbol{y}^n)) = \mathbf{0}.$$

b): Ist f nur stetig, so gilt die Behauptung i.a. nicht. Dies zeigt das Beispiel

$$f\ :\ [0,1) \cup (1,2],\ f(x) := \begin{cases} 0, & \text{für} \quad 0 < x < 1 \\ 1, & \text{für} \quad 1 < x < 2. \end{cases}$$

Für die Folgen, die definiert sind durch $x_n := 1 - 1/n$ und $y_n := 1 + 1/n$ gilt $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n - y_n) = 0$ und $f(x_n) - f(y_n) = -1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. □

11.4 Grenzwerte von Funktionen

Aufgabe 11.20 *Bestimmen Sie die (links-, rechtsseitigen) Grenzwerte der folgenden Funktionen in dem jeweils angegebenen Punkt x_0, sofern sie existieren:*

$$\begin{aligned} f(x) &:= \frac{x-2}{\sqrt{x^2-4}}, & x_0 &:= 2, \\ g(x) &:= \frac{\sqrt{x-2}}{x^2-4}, & x_0 &:= 2, \\ h(x) &:= \frac{x-1}{\sqrt{x^2+3}-2}, & x_0 &:= 1, \\ i(x) &:= \frac{x^n-1}{x-1}, & x_0 &:= 1. \end{aligned}$$

Es seien $a, b > 0$ gegeben. Bestimmen Sie den rechtsseitigen Grenzwert

$$\lim_{x\to 0+0} \frac{x}{a} \cdot \left\lfloor \frac{b}{x} \right\rfloor.$$

Lsung von Aufgabe 11.20

f ist nur für $|x| > 2$ definiert. In $x_0 = 2$ kann also nur ein rechtsseitiger Grenzwert existieren. Es gilt

$$\lim_{x\to 2+0} \frac{x-2}{\sqrt{x^2-4}} = \lim_{x\to 2+0} \frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+2}} = 0.$$

Wie für f kann auch für g nur ein rechtsseitiger Grenzwert existieren. Für $x > 2$ gilt

$$g(x) = \frac{\sqrt{x-2}}{x^2-4} = \frac{1}{(x+2)\sqrt{x-2}},$$

und daher ist der Grenzwert uneigentlich:

$$\lim_{x\to 2+0} g(x) = \infty.$$

Es gilt für $x \neq 1$

$$h(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x^2+3}-2} = \frac{(x-1)\cdot(\sqrt{x^2+3}+2)}{(x^2+3)-4} = \frac{\sqrt{x^2+3}+2}{x+1},$$

und daher existiert der Grenzwert

$$\lim_{x\to 1} h(x) = 2.$$

Nach der binomischen Formel gilt

$$\begin{aligned} x^n - 1 &= ((x-1)+1)^n - 1 = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (x-1)^j \cdot 1^{n-j} - 1 \\ &= (x-1) \cdot \sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j} \cdot (x-1)^{j-1}, \end{aligned}$$

und daher folgt

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^n-1}{x-1} = \lim_{x\to 1} \sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j} \cdot (x-1)^{j-1} = n.$$

Für $x \in (0, b)$ gibt es ein eindeutiges $n = n(b) \in \mathbb{N}$ mit

$$\frac{b}{n} < x \leq \frac{b}{n-1}.$$

Hiermit gilt $\lfloor b/x \rfloor = n-1$ und daher

$$\frac{n-1}{n} \cdot \frac{b}{a} < (n-1)\frac{x}{a} = \frac{x}{a}\left\lfloor \frac{b}{x} \right\rfloor \leq \frac{b}{a}.$$

Da $b > 0$ fest ist, gilt $n(b) \to \infty$ für $x \to 0$, und daher folgt

$$\lim_{x\to 0+0} \frac{x}{a} \cdot \left\lfloor \frac{b}{x} \right\rfloor = \frac{b}{a}.$$

$\square$

Aufgabe 11.21 *Untersuchen Sie, ob die folgenden Funktionen in dem jeweils angegebenen Punkt x_0 einen (links-, rechtsseitigen) Grenzwert besitzt und ob sie in x_0 (links-, rechtsseitig) stetig ist.*

$$f(x) := \begin{cases} \dfrac{x^2-3x-4}{x^2-2x-3} & \textit{für} \quad x \notin \{-1,3\} \\ 3/4 & \textit{für} \quad x \in \{-1,3\} \end{cases}, \qquad x_0 := -1,$$

$$g(x) := \begin{cases} \dfrac{1}{x} \sin \dfrac{1}{x} & \textit{für} \quad x \neq 0 \\ 0 & \textit{für} \quad x = 0 \end{cases}, \qquad x_0 := 0,$$

$$h(x) := \lfloor x \rfloor \qquad x_0 := 0$$

$$i(x) := x \cdot \lfloor x \rfloor \qquad x_0 := 0$$

$$j(x) = \begin{cases} 1 & \textit{für} \quad x \geq 1 \\ \dfrac{1}{n} & \textit{für} \quad \dfrac{1}{n} \leq x < \dfrac{1}{n-1} \\ 0 & \textit{für} \quad x \leq 0 \end{cases}, \qquad x_0 := 0$$

$$k(x) = \begin{cases} 2x & \textit{für} \quad x \in \mathbb{Q} \\ 2-2x & \textit{für} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}, \qquad x_0 := \frac{1}{2}$$

$$\ell(x) = \begin{cases} 2x & \textit{für} \quad x \in \mathbb{Q} \\ 2-2x & \textit{für} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}, \qquad x_0 := 1$$

$$m(x) := \begin{cases} \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}} & \textit{für} \quad 0 < |x| < 1 \\ 1 & \textit{für} \quad x = 0 \end{cases}, \qquad x_0 := 0$$

Lsung von Aufgabe 11.21
Es gilt

$$f(x) = \frac{x^2-3x-4}{x^2-2x-3} = \frac{(x-4)(x+1)}{(x-3)(x+1)} = \frac{x-4}{x-3} \quad \text{für} \quad x \notin \{-1,3\}.$$

Daher besitzt f in $x_0 = -1$ den Grenzwert $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = 5/4$, und wegen $f(-1) = 3/4 \neq \lim\limits_{x \to -1} f(x)$ ist f nicht stetig in $x_0 = -1$.

g besitzt in $x_0 = 0$ keinen (auch keinen einseitigen) Grenzwert, denn für $x_n = \frac{1}{n\pi}$ gilt $g(x_n) = n\pi \cdot \sin n\pi = 0 \to 0$ und für $y_n := \frac{1}{(2n+0.5)\pi}$ ist $f(y_n) = (2n+0.5)\pi \to \infty$.

Es ist

$$\lim_{x \to 0+0} h(x) = 0, \ \lim_{x \to 0-0} h(x) = -1, \ h(0) = 0.$$

h besitzt also beide einseitigen Grenzwert in 0, ist rechtsseitig stetig, aber nicht linksseitig stetig.

Die Funktion i ist wegen

$$\lim_{x\to 0+0} i(x) = 0 = i(0) = \lim_{x\to 0-0} i(x)$$

stetig in 0.

Die Funktion j ist wegen

$$\lim_{x\to 0-0} f(x) = 0 = f(0) = \lim_{x\to 0+0} f(x),$$

stetig in $x_0 = 0$. Man beachte, dass es in jeder Umgebung von x_0 Unstetigkeitsstellen von j, nämlich die Sprungstellen $x_n := 1/n$.

Für $x = \frac{1}{2} + \varepsilon$ gilt

$$|k(x) - k(x_0)| = |k(x) - 1| = \left\{ \begin{array}{ll} |2\varepsilon| & \text{für} \quad x \in \mathbb{Q} \\ |-2\varepsilon| & \text{für} \quad x \notin \mathbb{Q} \end{array} \right\} = |2\varepsilon|$$

h): Daher ist k stetig in 0.5.

ℓ besitzt in $x_0 = 1$ weder einen linksseitigen noch einen rechtsseitigen Grenzwert, denn

$$\lim_{x\to 1,\, x\in\mathbb{Q}} f(x) = 2, \qquad \lim_{x\to 1,\, x\notin\mathbb{Q}} f(x) = 0.$$

Es gilt für $x \neq 0$

$$\begin{aligned} m(x) &= \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}} \cdot \frac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}} \\ &= \frac{1}{x^2} \cdot (\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}) \cdot (\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}) \cdot \frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}} \\ &= \frac{1}{x} \cdot \frac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}. \end{aligned}$$

Da der Bruch in dem letzten Ausdruck für $x \to 0$ gegen 1 konvergiert, wächst m über alle Grenzen. m besitzt für $x \to \infty$ keinen Grenzwert (auch keinen einseitigen) und ist damit auch nicht stetig. □

Aufgabe 11.22 *Zeigen Sie ausführlich:*

> *Eine reelle Funktion ist in $x_0 \in \mathbb{R}$ genau dann stetig, wenn Sie dort linksseitig und rechtsseitig stetig ist.*

Lsung von Aufgabe 11.22
Dass die Stetigkeit von f in x_0 die links- und die rechtsseitige Stetigkeit impliziert, ist leicht einzusehen. Die Stetigkeit von f in x_0 besagt ja, dass für jede Folge $\{x_n\} \subset D_f$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ auch $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$ gilt. Insbesondere gilt dann auch für jede Folge $\{x_n\} \subset D_f$ mit $x_n < x_0$ für alle n, womit f linksseitig stetig in x_0 ist, und für jede Folge $\{x_n\} \subset D_f$ mit $x_n > x_0$ für alle n, und dies ist die rechtsseitige Stetigkeit von f in x_0.

Wir zeigen nun die Umkehrung. Es sei also f links- und rechtsseitig stetig in x_0 und es sei $\{x_n\} \subset D_f$ eine Folge mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$. Wir nehmen ohne Beschränkung der Allgemeinheit an, dass $x_n \neq x_0$ für alle n gilt, und teilen die Folgenglieder in solche auf, die kleiner als x_0 sind, und solche, die größer als x_0 sind.

Gibt es nur endlich viele Folgenglieder, die auf einer Seite von x_0 liegen, so können wir die entsprechenden Glieder in der Folge $\{f(x_n)\}$ fortlassen, ohne dass das Konvergenzverhalten geändert wird. Die Stetigkeit folgt in diesem Fall also sofort aus der einseitigen Stetigkeit.

Liegen auf beiden Seiten von x_0 unendlich viele Folgenglieder, so liefert die Aufteilung zwei Teilfolgen $\{x_{n_j}\}$ und $\{x_{m_j}\}$ von $\{x_n\}$ mit $x_{n_j} < x_0$ und $x_{m_j} > x_0$ für alle j, und diese konvergieren beide ebenfalls gegen x_0. Wegen der linksseitigen Stetigkeit von f in x_0 gibt es zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ ein $J_\ell \in \mathbb{N}$ mit

$$|f(x_{n_j}) - f(x_0)| < \varepsilon \quad \text{für alle } j \geq J_\ell,$$

und die rechtsseitige Stetigkeit liefert ein $J_r \in \mathbb{N}$ mit

$$|f(x_{m_j}) - f(x_0)| < \varepsilon \quad \text{für alle } \geq J_r.$$

Da die Indizes n_j und m_j aufsteigend sind und zusammen alle natürlichen Zahlen erfassen, können wir hieraus schließen, dass mit

$$N := \max\{n_{J_\ell}, m_{J_r}\}$$

gilt

$$|f(x_n) - f(x_0)| < \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq N.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig wählbar war, bedeutet dies gerade die Stetigkeit von f in x_0. $\square$

Aufgabe 11.23 *Es sei $(a, b) \subset \mathbb{R}$ ein (beschränktes oder unbeschränktes) Intervall und $f : (a, b) \to \mathbb{R}$. Zeigen Sie:*

a) *Ist f monoton wachsend und nach oben (bzw. nach unten) beschränkt, so besitzt f einen linksseitigen (bzw. rechtsseitigen) Grenzwert in $x = b$ (bzw. $x = a$).*

b) *Ist f monoton fallend und nach unten (bzw. nach oben) beschränkt, so besitzt f einen linksseitigen (bzw. rechtsseitigen) Grenzwert in $x = b$ (bzw. $x = a$).*

c) *Ist f monoton wachsend (bzw. fallend) und ist $f(a, b)$ ein (beschränktes oder unbeschränktes) Intervall, so ist f stetig in (a, b).*

Lsung von Aufgabe 11.23

a): Es sei $\{x_n\} \subset (a, b)$ eine monoton wachsende Folge, die gegen b konvergiert (z.B. $x_n := b - 1/n$). Dann ist die Folge $\{f(x_n)\}$ monoton wachsend und beschränkt und daher konvergent gegen ein $\beta \in \mathbb{R}$. Zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ gibt es daher ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$\beta - \varepsilon < f(x_n) \le \beta \quad \text{für alle } n \ge N.$$

Es sei $\{y_n\} \subset (a, b)$ eine beliebige Folge, die gegen b konvergiert. Dann gibt es zu $\eta := b - x_N > 0$ ein $M \in \mathbb{N}$ mit $x_N = b - \eta < y_n < b$ für alle $n \ge M$, und für diese n folgt aus der Monotonie von f

$$\beta - \varepsilon < f(x_N) \le f(y_n) \le \beta,$$

d.h. $\lim_{n\to\infty} f(y_n) = \beta$.

Ist f nach unten beschränkt, so erhält man ganz analog, dass f einen rechtsseitigen Grenzwert in a besitzt.

b): Die Behauptung folgt aus Teil a), denn die Funktion $-f$ ist monoton wachsend und nach oben (bzw. unten) beschränkt.

c): Es sei $x_0 \in (a, b)$ beliebig. Wir zeigen, dass f in x_0 sowohl einen linksseitigen als auch rechtsseitigen Grenzwert besitzt, und dass diese übereinstimmen.

Wir wählen $\eta > 0$, so dass $x_0 - \eta \in (a, b)$ und $x_0 + \eta \in (a, b)$ gilt. Dann ist f in (a, x_0) monoton wachsend und nach oben durch $f(x_0 + \eta)$ beschränkt. Nach Teil a) besitzt f einen linksseitigen Grenzwert α in x_0. Ferner ist f monoton wachsend in (x_0, b) und nach unten beschränkt durch $f(x_0 - \eta)$, und nach Teil b) besitzt f einen rechtsseitigen Grenzwert β in x_0.

Die Monotonie von f liefert $\alpha \leq f(x_0) \leq \beta$. Dies zeigt, dass f genau dann stetig in x_0 ist, wenn $\alpha = \beta$ gilt. Ist aber $\alpha < \beta$, so folgt aus der Monotonie von f

$$f(y) \leq \alpha < f(x_0) < \beta < f(z) \quad \text{für alle } y < x_0 \text{ und } x_0 < z$$

im Widerspruch dazu, dass $f(a,b)$ ein Intervall ist. □

Aufgabe 11.24 *Es sei $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ gleichmäßig stetig auf dem Intervall (a,b). Zeigen Sie*

a) f ist beschränkt auf (a,b).

b) f besitzt eine stetige Fortsetzung auf $[a,b]$.

Was ändert sich, wenn f nur stetig ist?

Lsung von Aufgabe 11.24
a): Da f gleichmäßig stetig ist, gibt es zu $\varepsilon = 1 > 0$ ein $\delta > 0$ mit

$$x, y \in (a,b),\ |x-y| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - f(y)| < 1.$$

Wir wählen $n \in \mathbb{N}$ mit $(b-a)/n < \delta$. Dann gibt es zu jedem $x \in (a,b)$ ein $j \in \{1, \ldots, n-1\}$ mit

$$\left|a + \frac{j}{n}(b-a) - x\right| < \delta,$$

und daher folgt

$$\begin{aligned} |f(x)| &= |f(a + \frac{j}{n}(b-a)) + (f(x) - f(a + \frac{j}{n}(b-a)))| \\ &\leq |f(a + \frac{j}{n}(b-a))| + |(f(x) - f(a + \frac{j}{n}(b-a)))| \\ &< 1 + \max_{k=1,\ldots,n-1} |f(a + \frac{k}{n}(b-a))|. \end{aligned}$$

b): Wir zeigen nur, dass f einen Grenzwert in $x = a$ besitzt. Für $x = b$ ist der Beweis analog.

Es sei $\{x_n\} \subset (a,b)$ eine Folge mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Dann ist nach Teil a) die Folge $\{f(x_n)\}$ beschränkt, und daher gibt es eine konvergente Teilfolge $\{f(x_{n_j}\}$. Es sei

$$\lim_{j\to\infty} f(x_{n_j}) =: \alpha.$$

Wir zeigen, da dann $\lim_{x\to a+0} f(a) = \alpha$ gilt. Ist nämlich $\{y_n\} \subset (a,b)$ eine Folge mit $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$ und $\varepsilon > 0$ vorgegeben, so gibt es ein $\delta > 0$ mit

$$x, y \in (a,b),\ |x-y| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Ferner gibt es ein $\mathbb{N} \in \mathbb{N}$ mit $|a - y_n| < \delta/2$ für alle $n \geq N$, und für diese n folgt für genügend großes j

$$|f(y_n) - \alpha| \leq |f(y_n) - f(x_{n_j})| + |f(x_{n_j}) - \alpha| < 2\varepsilon.$$

Beide Aussagen bleiben nicht richtig, wenn f nur als stetig vorausgesetzt wird wie das Beispiel

$$f(x) := \frac{1}{(x-a)(b-x)}$$

zeigt.

$$|f(y_n) - \alpha| \leq |f(y_n)$$

□

Aufgabe 11.25 *Es seien $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ gleichmäßig stetige Funktionen auf dem Intervall (a, b). Zeigen Sie, dass dann auch die Funktionen $f+g$ und $f \cdot g$ gleichmäßig stetig auf (a, b) sind.*

Was bleibt hiervon erhalten, wenn (a, b) durch eine unbeschränkte Menge ersetzt wird?

Lsung von Aufgabe 11.25

Es sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Dann gibt es wegen der gleichmäßigen Stetigkeit von f und g Zahlen $\delta_f > 0$ und $\delta_g > 0$ mit

$$x, y \in (a, b),\ |x - y| < \delta_f \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

und

$$x, y \in (a, b),\ |x - y| < \delta_g \quad \Longrightarrow \quad |g(x) - g(y)| < \varepsilon.$$

Daher folgt mit $\delta := \max\{\delta_f, \delta_g\}$ für $x, y \in (a, b)$ mit $|x - y| < \delta$

$$\begin{aligned} |(f+g)(x) - (f+g)(y)| &= |(f(x) - f(y)) + (g(x) - g(y))| \\ &\leq |(f(x) - f(y))| + |(g(x) - g(y))| < 2\varepsilon. \end{aligned}$$

fs Es ist also auch $f + g$ gleichmäßig stetig auf (a, b).

In diese Argumentation ist die Beschränktheit von (a, b) nirgends eingegangen. $f+g$ ist also auch gleichmäßig stetig, wenn (a, b) durch eine unbeschränkte Menge ersetzt wird.

Nach Aufgabe 11.24 sind die Funktionen f und g auf (a, b) beschränkt. Es gibt also $M_f \geq 0$ und $M_g \geq 0$ mit

$$|f(x)| \leq M_f, \ |g(x)| \leq M_g \quad \text{für alle } x \in (a, b).$$

Daher folgt für alle $x, y \in (a, b)$ mit $|x - y| < \delta$

$$\begin{aligned} |(f \cdot g)(x) - (f \cdot g)(y)| &= |f(x) \cdot (g(x) - g(y)) + g(y) \cdot (f(x) - f(y))| \\ &\leq |f(x)| \cdot |g(x) - g(y)| + |g(y)| \cdot |f(x) - f(y)| \\ &\leq M_f \cdot \varepsilon + M_g \cdot \varepsilon = (M_f + M_g) \cdot \varepsilon. \end{aligned}$$

Dies zeigt die gleichmäßige Stetigkeit von $f \cdot g$.

Die gleichmäßige Stetigkeit des Produktes bleibt bei unbeschränktem Definitionsbereich von f und g nicht erhalten, da eine gleichmäßig stetige Funktion auf einem unbeschränkten Bereich nicht notwendig beschränkt ist. Es sind z.B. $f : x \mapsto x$ und $g : x \mapsto x$ hleichmäßig stetig auf $\mathbb{R}$ (sogar Lipschitz-stetig), aber das Produkt $f \cdot g : x \mapsto x^2$ ist nicht gleichmäßig stetig auf $\mathbb{R}$. $\square$

Aufgabe 11.26 *Zeigen Sie (unter Benutzung von geometrischen Argumenten), dass die Funktion*

$$f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, \ f(\varphi) := \frac{\sin \varphi}{\varphi}$$

stetig auf $\mathbb{R}$ *fortgesetzt werden kann.*

Lsung von Aufgabe 11.26

Wir betrachten zunächst den Fall $\varphi > 0$.

Wir verwenden die Bezeichnungen aus Abbildung 11.3. Die Fläche des Dreicks OAP ist kleiner als die Fläche des Kreissektors OAP, und diese ist kleiner als die Fläche des Dreiecks OAT.

Wir drücken diese Flächen mit Hilfe des Winkels φ aus:

Abbildung 11.3

$$\begin{aligned} \text{Fläche}(\Delta_{OAP}) &= \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sin \varphi = \frac{1}{2} \sin \varphi, \\ \text{Fläche}(\text{Sektor}_{OAP}) &= \frac{1}{2} \cdot 1^2 \cdot \varphi = \frac{1}{2} \varphi, \\ \text{Fläche}(\Delta_{OAT}) &= \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \tan \varphi = \frac{1}{2} \tan \varphi. \end{aligned}$$

Daher gilt
$$\frac{\sin\varphi}{2} < \frac{\varphi}{2} < \frac{1}{2}\tan\varphi.$$
Division durch die positive Zahl $0.5\sin\varphi$ liefert
$$1 < \frac{\varphi}{\sin\varphi} < \frac{1}{\cos\varphi},$$
und durch Übergang zum Reziproken erhält man
$$\cos\varphi < \frac{\sin\varphi}{\varphi} < 1.$$
Hieraus folgt wegen $\lim_{\varphi\to 0}\cos\varphi = 1$
$$\lim_{\varphi\to 0+0}\frac{\sin\varphi}{\varphi} = 1.$$
Dass auch der linksseitige Grenzwert 1 ist, erhält man aus der Ungeradheit $\sin(\varphi) = -\sin(-\varphi)$ der Sinusfunktion:
$$\lim_{\varphi\to 0-0}\frac{\sin\varphi}{\varphi} = \lim_{-\varphi\to 0+0}\frac{-\sin\varphi}{-\varphi} = \lim_{-\varphi\to 0+0}\frac{\sin(-\varphi)}{-\varphi} = 1.$$
□

Aufgabe 11.27 *Untersuchen Sie die folgenden Funktionen auf gleichmäßige Stetigkeit:*
$$f\,:\,(0,1)\to\mathbb{R},\qquad f(x) := \sin\frac{1}{x}$$
$$g\,:\,(0,1)\to\mathbb{R},\qquad g(x) := x\cdot\sin\frac{1}{x}.$$

Lsung von Aufgabe 11.27

Die Funktion f ist nicht gleichmäßig stetig. Um dies nachzuweisen, haben wir nach Aufgabe 11.18 ein $\varepsilon > 0$ zu bestimmen, so dass zu jedem $\delta > 0$ es $x, y \in (0,1)$ gibt mit $|x-y| < \delta$ und $|f(x) - f(y)| \geq \varepsilon$.

Es ist für
$$x_n := \frac{2}{(4n-3)\pi}\ ,\quad y_n := \frac{2}{(4n-1)\pi},\quad n\in\mathbb{N}$$
$x_n, y_n \in (0,1)$, wobei $f(x_n) = 1$ und $f(y_n) = -1$ und $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n - y_n) = 0$ gilt. Wir wählen daher $\varepsilon = 1$. Ist dann $\delta > 0$ gegeben, so bestimmen wir hierzu n so groß, dass $|x_n - y_n| < \delta$ ist, und hierfür haben wir $|f(x_n) - f(y_n)| = 2 > \varepsilon$.

Die Funktion g ist gleichmäßig stetig, denn nach Aufgabe 11.26 kann g zu einer stetigen Funktion $\tilde{g}\,:\,[0,1]\to\mathbb{R}$ fortgesetzt werden. Nach Satz 11.?? ist $\tilde{g}$ gleichmäßig stetig auf $[0,1]$, und daher ist dann auch die Restriktion g von $\tilde{g}$ auf $(0,1)$ gleichmäßig stetig. □

Kapitel 12

Elementare Funktionen

12.1 Polynome

Aufgabe 12.1 *a) Es seien p_1 und p_2 Polynome mit Grad $p_2 \geq 1$. Zeigen Sie, dass es eindeutig bestimmte Polynome q und r gibt mit*

$$p_1 = q \cdot p_2 + r \quad \textit{und} \quad \textit{Grad}\, r < \textit{Grad}\, p_2.$$

b) Es seien

$$p_1(x) := x^4 + x^2 + 2x \quad \textit{und} \quad p_2(x) := x^2 - x + 1.$$

Dividieren Sie p_1 durch p_2 mit Rest, d.h. bestimmen Sie zu p_1 und p_2 die Polynome q und r nach Teil a) der Aufgabe.

Lsung von Aufgabe 12.1
a): Gilt Grad $p_1 <$ Grad p_2, so wählen wir $q = 0$ und $r = p_1$ und sind fertig.

Es sei also

$$p_1(x) := \sum_{j=0}^{n} a_j x^j \quad \text{und} \quad p_2(x) := \sum_{k=0}^{m} b_k x^k$$

mit $a_n \neq 0$, $b_m \neq 0$ und $n \geq m$. Wir konstruieren die Polynome q und r ähnlich wie bei der Division natürlicher Zahlen mit Rest.

Für $q_1(x) := a_n \cdot x^{n-m}/b_m$ und

$$p_1^{(1)} := p_1(x) - q_1(x) \cdot p_2(x) =: \sum_{j=0}^{n^{(1)}} a_j^{(1)} x^j$$

gilt sicher Grad $p_1^{(1)} <$ Grad p_1. Ist Grad $p_1^{(1)} <$ Grad p_2, so können wir $q := q_1$ und $r := p_1^{(1)}$ wählen und sind fertig.

Andernfalls wiederholen wir den obigen Schritt mit $p_1^{(1)}$ an Stelle von p_1, d.h. wir setzen $q_2 := a_{n^{(1)}} \cdot x^{n^{(1)}-m}/b_m$ und $p_1^{(2)} := p_1^{(1)} - q_2 \cdot p_2$. Da der Grad von $p_1^{(k)}$ kleiner als der von $p_1^{(k-1)}$ ist, erreichen wir nach endlich vielen (höchstens $n-m+1$) Schritten ein $p_1^{(N)}$ mit Grad $p_1^{(N)} <$ Grad p_2. Dann gilt mit $q := \sum_{k=1}^N q_k$ und $r := p_1^{(N)}$ die Behauptung

$$p_1 = q \cdot p_2 + r \quad \text{und} \quad \text{Grad } r < \text{Grad } p_2,$$

und wir haben die Existenz der Polynome q und r konstruktiv gezeigt.

q und r sind eindeutig bestimmt, denn aus

$$p_1 = p_2 \cdot q + r = p_2 \cdot Q + R \quad \text{folgt} \quad p_2 \cdot (q - Q) = R - r.$$

Wäre nun $q \neq Q$, so wäre der Grad der linken Seite wenigstens so groß wie der von p_2, während der Grad der rechten Seite kleiner als der von p_2 ist. Es folgt also $q = Q$ und dann auch $r = R$.

b):

$$\begin{array}{rrrrrl}
(x^4 & & +x^2 & +2x & &) : (x^2 - x + 1) \;=\; x^2 + x + 1 \\
x^2 & -x^3 & +x^2 & & & \\
\cline{1-3}
 & x^3 & & +2x & & \\
 & x^3 & -x^2 & +x & & \\
\cline{2-4}
 & & x^2 & +x & & \\
 & & x^2 & -x & +1 & \\
\cline{3-5}
 & & & 2x & -1 & .
\end{array}$$

Es gilt also

$$x^4 + x^2 + 2x = (x^2 + x + 1) \cdot (x^2 - x + 1) + (2x - 1).$$

$\square$

Aufgabe 12.2 *Es seien p_1 und p_2 Polynome. p_2 heißt Teiler von p_1, wenn $p_1 \not\equiv 0$ gilt und wenn es ein Polynom q gibt mit $p_1 = q \cdot p_2$. Man schreibt dann $p_2 \,|\, p_1$.*

a) Zeigen Sie, dass gilt

(i) Gilt $p_3 \,|\, p_2$ und $p_2 \,|\, p_1$, so folgt $p_3 \,|\, p_1$.

(ii) Gilt $p \,|\, p_1$ und $p \,|\, p_2$, so folgt $p \,|\, q_1 \cdot p_1 + q_2 \cdot p_2$ für alle Polynome q_1 und q_2 mit $q_1 \cdot p_1 + q_2 \cdot p_2 \neq 0$.

(iii) Aus $p_2 \,|\, p_1$ folgt Grad $p_2 \leq$ Grad p_1.

(iv) Gilt $p_2 \,|\, p_1$ und $p_1 \,|\, p_2$, so gibt es eine Konstante $c \neq 0$ mit $p_1 = c \cdot p_2$.

b) Es seien

$$p_1(x) := x^4 + x^2 + 1,\; p_2(x) := x^2 + x + 1,\; p_3(x) := x^2 - x + 1.$$

Bestimmen Sie welches der p_j ein Teiler von p_k ist ($j, k = 1, 2, 3$).

Lsung von Aufgabe 12.2

a):

(i): Wegen $p_3 \,|\, p_2$ gibt es ein Polynom q_2 mit $p_2 = q_2 \cdot p_3$ und wegen $p_2 \,|\, p_1$ gibt es ein Polynom q_1 mit $p_1 = q_1 \cdot p_2$. Daher folgt $p_1 = (q_1 \cdot q_2) \cdot p_3$.

(ii): Aus $p_1 = r_1 \cdot p$ und $p_2 = r_2 \cdot p$ folgt $q_1 \cdot p_1 + q_2 \cdot p_2 = (q_1 r_1 + q_2 r_2) \cdot p$, und daher teilt p auch $q_1 \cdot p_1 + q_2 \cdot p_2$.

(iii): Aus $p_1 = q \cdot p_2$ und $p_1 \neq 0$ folgt $q \neq 0$ und

$$\text{Grad } p_1 = \text{Grad } q + \text{Grad } p_2 \geq \text{Grad } p_2.$$

(iv): Aus $p_1 = q_1 \cdot p_2$ und $p_2 = q_2 \cdot p_1$ folgt $p_1 = q_1 \cdot q_2 \cdot p_1$, d.h. $q_1 \cdot q_2 \equiv 1$, und dies ist nur möglich, wenn die Polynome q_1 und q_2 konstant sind.

b): Wegen (iii) haben wir nur die Aussagen $p_2 \,|\, p_1$, $p_3 \,|\, p_1$, $p_2 \,|\, p_3$ und $p_3 \,|\, p_2$ zu prüfen.

Mit dem Algorithmus aus Aufgabe 12.1 erhält man $p_1 = p_2 \cdot p_3$, d.h. $p_2 \,|\, p_1$ und $p_3 \,|\, p_1$. Wäre $p_2 \,|\, p_3$ oder $p_3 \,|\, p_2$, so müßten wegen Grad $p_2 =$ Grad p_3 die Polynome p_2 und p_3 reelle Vielfache voneinander sein. Da dies offensichtlich nicht der Fall ist, ist weder p_2 ein Teiler von p_3 noch p_3 ein Teiler von p_2. □

Aufgabe 12.3 *Sind* $p_1 \neq 0$ *und* $p_2 \neq 0$ *Polynome, so heißt das Polynom* p *ein größter gemeinsamer Teiler von* p_1 *und* p_2*, wenn* $p \,|\, p_1$ *und* $p \,|\, p_2$ *gilt und wenn es keinen gemeinsamen Teiler von* p_1 *und* p_2 *gibt, der einen höheren Grad als* p *hat.*

a) *Zeigen Sie, dass der (folgende)* **Euklidische Algorithmus** *einen größten gemeinsamen Teiler* p_{j-1} *der Polynome* p_1 *und* p_2 *liefert:*
Es sei Grad $p_1 \geq$ *Grad* p_2 *und* $j := 2$.
repeat
    j:=j+1;
    Bestimme Polynome q_j, p_j *mit Grad*(p_j) $<$*Grad*(p_{j-1}) *und*
        $p_{j-2} = p_{j-1} \cdot q_j + p_j$;
    until $p_j = 0$.

b) *Bestimmen Sie die größten gemeinsamen Teiler der Paare von Polynomen*

(i) $p_1(x) := x^6+3x^5+3x^4+4x^3+3x+2$, $p_2(x) := x^6+3x^5+3x^4+3x^3-x^2+x+2$,

(ii) $p_1(x) := x^5 - 3x^3 + 2x + 1$, $p_2(x) := -3x^5 + 9x - 6x - 3$,

(iii) $p_1(x) := x^6 - 2x^4 + 9x^3 - 4x^2 + x + 3$, $p_1(x) := x^2 - 2x + 3$.

Lsung von Aufgabe 12.3
a): Ist das Polynom r für ein k ein Teiler von p_{k-1} und von p_{k-2}, so ist es nch Aufgabe 12.2, (ii), auch ein Teiler von

$$p_k = p_{k-2} - q_k \cdot p_{k-1}.$$

Durch Induktion folgt also, dass jeder gemeinsame Teiler von p_1 und p_2 am Ende des Algorithmus auch ein Teiler von p_{j-1} ist.

Ist umgekehrt für ein k das Polynom r ein Teiler von p_k und p_{k-1}, so teilt es auch

$$p_{k-2} = p_{k-1}q_k + p_k.$$

Am Ende des Euklidischen Algorithmus ist $p_j = 0$. Daher ist $p_{j-2} = p_{j-1} \cdot q_j$, und p_{j-2} ist ein Teiler von p_{j-1}, und durch Induktion erhält man, dass p_{j-1} dann auch jedes der p_k, $k = j-2, j-3, \ldots, 2, 1$, teilt.

Beide Teile zusammen zeigen, dass p_{j-1} ein größter gemeinsamer Teiler von p_1 und p_2 ist.

b):
(i): Durch Polynomdivision erhält man

$$p_1(x) = 1 \cdot p_2(x) + x^3 + x^2 + 2x.$$

Es ist also $p_3(x) = x^3 + x^2 + 2x$. Der nächste Schritt liefert

$$p_2(x) = (x^3 + 2x^2 - x) \cdot p_3(x) + x^2 + x + 2,$$

und damit ist $p_4(x) = x^2 + x + 2$. Wegen

$$p_3(x) = x \cdot p_4(x)$$

bricht der Algorithmus mit $p_5 = 0$, und der größte gemeinsame Teiler von p_1 und p_2 ist $p_4(x) = x^2 + x + 2$.

Tatsächlich ist

$$p_1(x) = (x^4 + 2x^3 - x^2 + x + 1) \cdot (x^2 + x + 2)$$

und

$$p_2(x) = (x^4 + 2x^3 - x^2 + 1) \cdot (x^2 + x + 2),$$

und die Polynome $x^4 + 2x^3 - x^2 + x + 1$ und $x^4 + 2x^3 - x^2 + 1$ sind teilerfremd.

(ii): Es ist $p_1 = -3 \cdot p_2$. Der Algorithmus bricht also schon im ersten Schritt ab, und der größte gemeinsame Teiler von p_1 und p_2 ist p_2 (oder, wenn Sie das bevorzugen, p_1).

(iii): Polynomdivision liefert

$$p_1(x) = (x^4 + 2x^3 - x^2 + x + 1)p_2(x),$$

und daher ist p_2 der größte gemeinsame Teiler von p_1 und p_2. □

Aufgabe 12.4 *Es sei*

$$p(z) = z^6 + z^5 - 5z^4 - 13z^3 - 18z^2 - 14z - 12.$$

a) Berechnen Sie mit dem Horner Schema

$$p(-1+i) \quad \textit{und} \quad p(-i).$$

b) Zerlegen Sie $p(z)$ in Linearfaktoren.

c) Schreiben Sie $p(z)$ als Produkt von reellen Linearfaktoren und von reellen quadratischen Polynomen, wobei die quadratischen Polynome keine reellen Nullstellen besitzen.

Lsung von Aufgabe 12.4

a): Mit dem Horner Schema erhält man

$$
\begin{array}{c|rrrrrrr}
 & 1 & 1 & -5 & -13 & -18 & -14 & -12 \\
[-1+i] & & -1+i & -1-i & 7-5i & 11-i & 8-6i & 12 \\
\hline
 & 1 & i & -6-i & -6-5i & -7-i & -6-6i & 0
\end{array}
$$

und

$$
\begin{array}{c|rrrrrrr}
 & 1 & 1 & -5 & -13 & -18 & -14 & -12 \\
[-i] & & -i & -1-i & -1+6i & 6+14i & 14+12i & 12 \\
\hline
 & 1 & 1-i & -6-i & -14+6i & -12+14i & 12i & 0.
\end{array}
$$

b): Wegen Teil a) sind $z_1 := -1+i$ und $z_3 := -i$ Nullstellen von p. Da p reelle Koeffizienten besitzt, sind dann auch $z_2 := -1-i$ und $z_4 := i$ Nullstellen von p.

Wir dividieren die Linearfaktoren $z - z_j$, $j = 1,2,3,4$, mit dem Horner Schema ab:

$$
\begin{array}{c|rrrrrrr}
 & 1 & 1 & -5 & -13 & -18 & -14 & -12 \\
[-1+i] & & -1+i & -1-i & 7-5i & 11-i & 8-6i & 12 \\
\hline
 & 1 & i & -6-i & -6-5i & -7-i & -6-6i & 0 \\
[-1-i] & & -1-i & 1+i & 5+5i & 1+i & 6+6i & \\
\cline{1-7}
 & 1 & -1 & -5 & -1 & -6 & 0 & \\
[i] & & & i & -1-i & 1-6i & 6 & \\
\cline{1-6}
 & 1 & -1+i & -6-i & -6i & 0 & & \\
[-i] & & & -i & i & 6i & & \\
\cline{1-5}
 & 1 & -1 & -6 & 0 & & &
\end{array}
$$

Man erhält $\tilde{p}(z) = z^2 - z - 6$ mit den Nullstellen $z_5 = 3$ und $z_6 = -2$. Daher ist die Zerlegung von $p(z)$ in Linearfaktoren

$$p(z) = (z+1-i)(z+1+i)(z-i)(z+i)(z-3)(z+2).$$

c): Fasst man die Linearfaktoren $(z-z_1)$ und $(z-z_2)$ bzw. $(z-z_3)$ und $(z-z_4)$, die zu konjugiert komplexen Nullstellen gehören, zusammen, so erhält man die Zerlegung

$$p(z) = (z^2+2z+2)(z^2+1)(z-3)(z+2).$$

$\square$

Aufgabe 12.5 *Geben Sie die Interpolationspolynome zu den folgenden Daten an:*

a)

x_i	1	2	3
p_i	1	1	1

b)

x_i	2	3	4
p_i	-1	0	1

c)

x_i	1	2	3	4	5	6	7
p_i	0	1	0	0	0	0	0

d)

x_i	-2	-1	0	1	2	3	4
p_i	0	1/2	0	0	0	-1	0

Lsung von Aufgabe 12.5

a): Das Interpolationspolynom zu den Daten

x_i	1	2	3
p_i	1	1	1

rät man leicht als $p(x) \equiv 1$. Dieses Polynom ist in Π_2 und erfüllt die Interpolationsbedingungen. Da das Interpolationspolynom zu $(n+1)$ Daten in Π_n eindeutig bestimmt ist, sind wir schon fertig.

b): Analog rät man bei

x_i	2	3	4
p_i	-1	0	1

dass das Interpolationspolynom wohl eine Gerade ist. Etwa durch Auswahl von zwei Daten läßt sich das Polynom leicht ermitteln als

$$p(x) = x - 3,$$

und dieses Polynom erfüllt dann auch die dritte Interpolationsbedingung.

c): Zu den Daten

x_i	1	2	3	4	6	7
p_i	0	1	0	0	0	0

konstruiert man leicht ein Polynom in der zugelassenen Polynomklasse Π_5, welches die "Nullbedingungen" erfüllt.

$$\tilde{p}(x) = (x-1)(x-3)(x-4)(x-6)(x-7).$$

Dieses erfüllt aber vermutlich nicht $\tilde{p}(2) = 1$. Tatsächlich gilt

$$\tilde{p}(2) = (2-1)(2-3)(2-4)(2-6)(2-7) \neq 1.$$

Aber er ist auch garantiert nicht Null. Daher können wir

$$p(x) := \frac{1}{\tilde{p}(2)} \cdot \tilde{p}(x)$$

bilden. Dieses Polynom ist immer noch in Π_5, und es erfüllt nun

$$p(2) = \tilde{p}(2)/\tilde{p}(2) = 1,$$

ist also das gesuchte Interpolationspolynom.

Wir haben damit noch einmal die Bildung der Lagrangeschen Grundpolynome wiederholt.

d): Da in den Daten

x_i	-2	-1	0	1	2	3	4
p_i	0	1/2	0	0	0	-1	0

die meisten Funktionswerte verschwinden, ist es günstig, die Lagrange-Form des Interpolationspolynoms zu verwenden.

Man bildet dazu im wesentlichen wie im vorigen Teil der Aufgabe die Interpolationspolynome

$$p_{[-1]}(x) = \frac{(x+2)(x-0)(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}{(-1+2)(-1-0)(-1-1)(-1-2)(-1-3)(-1-4)}$$

zu den Daten

x_i	-2	-1	0	1	2	3	4
p_i	0	1	0	0	0	0	0

und

$$p_{[3]}(x) = \frac{(x+2)(x+1)(x-0)(x-1)(x-2)(x-4)}{(3+2)(3+1)(3-0)(3-1)(3-2)(3-4)}$$

zu

x_i	-2	-1	0	1	2	3	4
p_i	0	0	0	0	0	1	0

und addiert sie den gewünschten Funktionswerten entsprechend

$$p(x) = \frac{1}{2} \cdot p_{[-1]}(x) + (-1) \cdot p_{[3]}(x).$$

Dann erfüllt $p \in \Pi_5$ alle Interpolationsbedingungen. $\square$

Aufgabe 12.6 *In der folgenden Tabelle von Werten p_i eines Polynoms p zweiten Grades an Stellen x_i ist genau ein Wert p_j fehlerbehaftet. Bestimmen Sie ihn.*

x_i	-3	-2	-1	0	1	2
p_i	15	9	5	3	2	5

Lsung von Aufgabe 12.6

Wären die Daten korrekt, so müßte das Interpolationspolynom zu diesen Daten ein quadratisches Polynom sein. In der Newtonschen Darstellung müßten also alle Terme, die mehr als zwei Linearfaktoren enthalten, verschwinden. Dies bedeutet, dass im Dreiecksschema der dividierten Differenzen die vierte und alle folgenden Spalten verschwinden müßten. Die dritte Spalte müßte also konstant sein.

Tatsächlich erhält man

$$\begin{array}{r|cccc}
-3 & 15 & & \\
 & & -6 & \\
-2 & 9 & & 1 \\
 & & -4 & \\
-1 & 5 & & 1 \\
 & & -2 & \\
0 & 3 & & 0.5 \\
 & & -1 & \\
1 & 2 & & 1.5 \\
 & & 3 & \\
2 & 5 & &
\end{array}$$

Die letzte Spalte wird konstant, wenn die vorletzte Spalte die Einträge -6, -4, -2, 0, 2 besitzt, und dies wird erreicht, wenn der Wert $p(1) = 2$ durch $p(1) = 3$ ersetzt wird.

Das zugehörige quadratische Polynom ist

$$p(x) = 15 - 6(x + 3) + (x + 3)(x + 2) = x^2 - x + 3.$$

□

Aufgabe 12.7 *Bestimmen Sie das Interpolationspolynom $p \in \Pi_4$, das die Interpolationsbedingungen*

$$p(0) = 0 \ , \ p(1) = i \ , \ p(i) = -1 \ , \ p(-1) = -i \ , \ p(-i) = 1$$

erfüllt mit

a) der Lagrangeschen Interpolationsformel

b) der Newtonschen Interpolationsformel

Lsung von Aufgabe 12.7

a): Die Lagrangesche Interpolationsformel liefert

$$\begin{aligned}
p(z) &= 0 \cdot \frac{(z-1)(z-i)(z+1)(z+i)}{(0-1)(0-i)(0+1)(0+i)} + i \cdot \frac{(z-0)(z-i)(z+1)(z+i)}{(1-0)(1-i)(1+1)(1+i)} \\
&\quad -1 \cdot \frac{(z-0)(z-1)(z+1)(z+i)}{(i-0)(i-1)(i+1)(i+i)} - i \cdot \frac{(z-0)(z-1)(z-i)(z+i)}{(-1-0)(-1-1)(-1-i)(-1+i)} \\
&\quad +1 \cdot \frac{(z-0)(z-1)(z-i)(z+1)}{(-i-0)(-i-1)(-i-i)(-i+1)} \\
&= \frac{i}{4}z(z^2+1)(z+1) - \frac{1}{4}z(z^2-1)(z+i) \\
&\quad -\frac{i}{4}z(z-1)(z^2+1) + \frac{1}{4}z(z^2-1)(z-i) \\
&= iz
\end{aligned}$$

b): Wir bestimmen die dividierten Differenzen

$$\begin{array}{r|rcccc}
0 & 0 & & & & \\
 & & i & & & \\
1 & i & & 0 & & \\
 & & i & & 0 & \\
i & -1 & & 0 & & 0 \\
 & & i & & 0 & \\
-1 & -i & & 0 & & \\
 & & i & & & \\
-i & 1 & & & &
\end{array}$$

Damit erhält man

$$\begin{aligned}
p(z) &= 0 + iz + 0 \cdot z(z-1) + 0 \cdot z(z-1)(z-i) + 0 \cdot z(z-1)(z-i)(z+1) \\
&= iz.
\end{aligned}$$

□

Aufgabe 12.8 *Von der Funktion* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *seien die Werte* $f(-1) = 1$, $f(1) = 1$, $f(2) = 4$ *und* $f(3) = 8$ *bekannt. Berechnen Sie durch polynomiale Interpolation einen Näherungswert für* $f(0)$.

Lsung von Aufgabe 12.8

Natürlich kann man zunächst das Interpolationspolynom $p \in \Pi_3$ mit der Lagrangeschen oder der Newtonschen Interpolationsformel berechnen und dann an der Stelle $x = 0$ auswerten. Schneller geht es jedoch, da man nur an dem Funktionswert von p an der Stelle 0 interessiert ist mit dem Algorithmus von Neville und Aitken. Mit den Bezeichnungen aus dem Algorithmus 11.?? und

$$z_0 := -1,\ z_1 := 1,\ z_2 := 2,\ z_3 := 3 \quad \text{und} \quad w_0 := 1,\ w_1 := 1,\ w_2 := 4,\ w_3 := 8$$

erhält man

$$\begin{array}{lll}
j=0: & t_0=1; & z0=1; \\
j=1: & t_1=1; & z1=-1; \\
 & i=0: & t_0=t_1+(t_0-t_1)z1/(z_0-z_1)=1+(1-1)(-1)/(-2)=1 \\
j=2: & t_2=4; & z2=-2; \\
 & i=1: & t_1=t_2+(t_1-t_2)z2/(z_1-z_2)=4+(1-4)(-2)/(-1)=-2 \\
 & i=0: & t_0=t_1+(t_0-t_1)z2/(z_0-z_2)=-2+(1+2)(-2)/(-3)=0 \\
j=3: & t_3=8; & z3=-3; \\
 & i=2: & t_2=t_3+(t_2-t_3)z3/(z_2-z_3)=8+(4-8)(-3)/(-1)=-4 \\
 & i=1: & t_1=t_2+(t_1-t_2)z3/(z_1-z_3)=-4+(-2+4)(-3)/(-2)=-1 \\
 & i=0: & t_0=t_1+(t_0-t_1)z3/(z_0-z_3)=-1+(+1)(-3)/(-4)=-0.25.
\end{array}$$

Die Approximation, die man durch Interpolation erhält ist also $f(0) \approx -0.25$. □

Aufgabe 12.9 *a) Es sei*

$$p_n(z) := \sum_{j=0}^{n} a_j z^j \quad \textit{mit } a_n = 1,$$

es seien

$$c_0, \ldots, c_{n-1} > 0 \quad \textit{mit } \sum_{j=0}^{n-1} c_j \leq 1,$$

und es sei

$$M := \max \left\{ \left(\frac{|a_j|}{c_j} \right)^{1/n-j}, \quad j = 0, \ldots, n-1 \right\}.$$

Zeigen Sie, dass dann für alle Nullstellen $z_i \in \mathbb{C}$ von p_n gilt:

$$|z_i| \leq M$$

b) Schätzen Sie die Nullstellen des Polynoms

$$p(z) = z^6 - z^5 - z^4 + 5z^3 - 6z^2 + 6z - 4$$

mit Hilfe von Teil a) und $c_j = 2^{j-6}$, $j = 0, 1, \ldots, 5$, ab.

Lsung von Aufgabe 12.9

a): Für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| > M$ gilt

$$\begin{aligned}
|p(z)| &= \Big|\sum_{j=0}^{n} a_j z^j\Big| = \Big|z^n + \sum_{j=0}^{n-1} a_j z^j\Big| = \Big|z^n\Big(1 + \sum_{j=0}^{n-1} a_j z^{j-n}\Big)\Big| \\
&\geq |z|^n \cdot \Big(1 - \sum_{j=0}^{n-1} |a_j| \cdot |z|^{j-n}\Big) > |z|^n \cdot \Big(1 - \sum_{j=0}^{n-1} |a_j| \cdot M^{j-n}\Big) \\
&\geq |z|^n \cdot \Big(1 - \sum_{j=0}^{n-1} c_j\Big) \geq 0,
\end{aligned}$$

und daher $p(z) \neq 0$.

b): Mit $c_j := 2^{j-6}$ ist

$$
\begin{aligned}
\Big(\frac{|a_5|}{c_5}\Big)^{1/1} &= 2, & \Big(\frac{|a_4|}{c_4}\Big)^{1/2} &= (4)^{1/2} = 2,\\
\Big(\frac{|a_3|}{c_3}\Big)^{1/3} &= (5 \cdot 8)^{1/3} \leq 3.4200, & \Big(\frac{|a_2|}{c_2}\Big)^{1/4} &= (6 \cdot 16)^{1/4} \leq 3.1302,\\
\Big(\frac{|a_1|}{c_1}\Big)^{1/5} &= (6 \cdot 32)^{1/5} \leq 2.8620, & \Big(\frac{|a_0|}{c_0}\Big)^{1/6} &= (4 \cdot 64)^{1/6} \leq 2.5199,
\end{aligned}
$$

und daher gilt für alle Nullstellen z_j von p

$$|z_j| \leq 3.4200.$$

Tatsächlich sind die Nullstellen

$$z_1 = -2,\ z_2 = 1,\ z_{3/4} = 1 \pm i,\ z_{5/6} = \pm i,$$

und daher gilt $|z_j| \leq 2$ für alle z_j. □

Aufgabe 12.10 *Interpolieren Sie $f(x) := |x|$ durch ein Polynom $p \in \Pi_{10}$ mit den Knoten*

$$
\begin{aligned}
&\text{a)}: \qquad x_i := -1 + \frac{i}{20},\ i = 0, \ldots, 10\\
&\text{b)}: \qquad x_i := \cos\Big(\frac{(2i+1)\pi}{22}\Big),\ i = 0, 1, \ldots, 10
\end{aligned}
$$

und skizzieren Sie die Fehlerkurven $f(x) - p(x)$ im Intervall $[-1, 1]$.

Lsung von Aufgabe 12.10
Die Fehlerkurve mit äquidistanten Interpolationsknoten ist in Abbildung 12.1 enthalten, die mit Tschebyscheff Knoten in Abbildung 12.2. □

12.2 Potenzreihen

Aufgabe 12.11 *Bestimmen Sie die Konvergenzradien der Potenzreihen*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$$

Abbildung 12.1: Aufgabe 12.10; äquidistante Knoten

für

$$
\begin{array}{llll}
\text{a)}: & a_n = \dfrac{n}{3^n}, & \text{b)}: & a_n = \dfrac{n!}{n^n}, \\
\text{c)}: & a_n = n^n, & \text{d)}: & a_n = \dfrac{n^2+n}{(1+n)^4} \\
\text{e)}: & a_n = \dfrac{n}{\left(3+\frac{1}{n}\right)^n}, & \text{f)}: & a_n = \left(\dfrac{2^n+1}{3n^2+1}\right)^{3/2} \\
\text{g)}: & a_n = n\left(1+\cos\dfrac{n\pi}{2}\right), & \text{h)}: & a_n = \begin{cases} 1 & \textit{falls } n \textit{ Primzahl} \\ 0 & \textit{sonst} \end{cases}
\end{array}
$$

Lsung von Aufgabe 12.11

a):

$$r = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n}{3^n}\cdot\frac{3^{n+1}}{n+1}\right| = 3\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} = 3.$$

b):

$$r = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n!}{n^n}\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}\right| = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.$$

c):

$$r = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = 0.$$

d):

$$r = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n^2+n)\,(n+2)^4}{(n+1)^4\,(n^2+3n+2)}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n^6+9n^5+\dots}{n^6+7n^5+\dots} = 1.$$

e):

$$\frac{1}{r} = \limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \limsup_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n}}{3+\frac{1}{n}} = \frac{1}{3},$$

Abbildung 12.2: Aufgabe 12.10; Tschebyscheff Knoten

Es ist also $r = 3$.

f):

$$\begin{aligned} r &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{2^n+1}{3n^2+1}\cdot\frac{3(n+1)^2+1}{2^{n+1}+1}\right|^{3/2} \\ &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{3+6/n+4/n^2}{3+1/n^2}\cdot\frac{1+2^{-n}}{2+2^{-n}}\right|^{3/2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{3/2} = \frac{1}{\sqrt{8}}. \end{aligned}$$

g): Es ist

$$a_n = \begin{cases} 2n & , \quad \text{falls} \quad n \equiv 0(4) \\ n & , \quad \text{falls} \quad n \equiv 1(4) \text{ oder } n \equiv 3(4) \\ 0 & , \quad \text{falls} \quad n \equiv 2(4) \end{cases} ,$$

und daher gilt

$$\frac{1}{r} = \limsup_{n\to\infty}|a_n|^{1/n} = \limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{2n} = 1.$$

h): Es ist

$$\frac{1}{r} = \limsup_{n\to\infty}|a_n|^{1/n} = 1,$$

da es unendlich viele Primzahlen gibt. □

Aufgabe 12.12 *Es seien*

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad \textit{mit } a_0 = 1 \textit{ und } a_n = 2 \textit{ für } n \le 1 \ , \\ g(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \quad \textit{mit } b_n = 3(-1)^n - 3^{-n} \end{aligned}$$

und $h(z)$ das Cauchy Produkt der Reihen $f(z)$ und $g(z)$.

Bestimmen Sie die Konvergenzradien dieser drei Reihen.

Lsung von Aufgabe 12.12
Es gilt

$$\begin{aligned} r_a &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = 1 \\ r_b &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{b_n}{b_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{3\pm 3^{-n}}{3\mp 3^{-(n+1)}}\right| = 1. \end{aligned}$$

Für

$$h(z) =: \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

gilt

$$\begin{aligned} c_n &= \sum_{k=0}^{n} a_{n-k}b_k = b_n + 2\sum_{k=0}^{n-1} b_k \\ &= \begin{cases} 3 - 3^{-n} - 2\dfrac{1-3^{-n}}{1-1/3}, & \text{falls} \quad n \text{ gerade} \\ -3 - 3^{-n} + 6 - 2\dfrac{1-3^{-n}}{1-1/3}, & \text{falls} \quad n\text{ungerade} \end{cases} \\ &= 3 - 3^{-n} - 3\left(1 - 3^{-n}\right) \;=\; 2\cdot 3^{-n}, \end{aligned}$$

und daher ist der Konvergenzradius von h

$$r_c = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right| = 3\ .$$

Satz 13.?? liefert also nur einen Kreis, in dem das Produkt zweier Reihen wenigstens konvergiert, der tatsächliche Konvergenzkreis der Produktreihe kann größer sein. Insbesondere konvergieren die Reihen $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ nicht, es existiert aber das Cauchy Produkt und $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$ konvergiert absolut. □

Aufgabe 12.13 *Untersuchen Sie die Funktionenfolgen*

$$\begin{aligned} f_n &: [0,\infty) \to \mathbb{R} \quad , \quad f_n(x) := \frac{x}{1+nx} \\ g_n &: [0,\infty) \to \mathbb{R} \quad , \quad g_n(x) := \frac{nx}{1+n^2x^2} \\ h_n(x) &: [1,\infty) \to \mathbb{R} \quad , \quad h_n(x) := \frac{n^2x}{1+n^3x^2} \end{aligned}$$

$$k_n(x) : [0,\infty) \to \mathbb{R} \quad , \quad k_n(x) := \frac{n^2x}{1+n^3x^2}$$

$$p_n(x) : [0,\pi] \to \mathbb{R} \quad , \quad p_n(x) := \frac{\cos x}{\sqrt{n}}$$

$$q_n(x) : [0,\pi] \to \mathbb{R} \quad , \quad q_n(x) := \frac{\sin n^n x}{n}$$

auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz.

Lsung von Aufgabe 12.13

Die Folge $\{f_n(x)\}$ konvergiert offenbar punktweise gegen $f(x) \equiv 0$, und wegen

$$|f_n(x) - f(x)| = \frac{x}{1+nx} < \frac{x}{nx} = \frac{1}{n}$$

ist die Konvergenz gleichmäßig.

Die Folge $\{g_n(x)\}$ konvergiert punktweise gegen $g(x) \equiv 0$. Wegen

$$g_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

ist die Konvergenz nicht gleichmäßig.

Die Folge $\{h_n(x)\}$ konvergiert punktweise gegen $h(x) \equiv 0$. Die Konvergenz ist gleichmäßig, denn

$$|h_n(x) - h(x)| = \frac{n^2x}{1+n^3x^2} < \frac{n^2x}{n^3x^2} = \frac{1}{nx} \le \frac{1}{n}.$$

Auf dem Intervall $[0,\infty)$ konvergiert die Folge $\{k_n\}$ punktweise gegen $k(x) \equiv 0$, aber wegen $k_n\left(n^{-3/2}\right) = 0.5\sqrt{n} \not\to 0$ ist die Konvergenz nicht gleichmäßig.

Wegen $|\cos x| \le 1$ für alle $x \in [0,\pi]$ und alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$|p_n(x)| = \frac{|\cos x|}{\sqrt{n}} \le \frac{1}{\sqrt{n}} \to 0,$$

und daher konvergiert die Folge $\{p_n(x)\}$ gleichmäßig gegen $p(x) \equiv 0$.

Wie eben gilt

$$|q_n(x)| = \frac{|\sin n^n x|}{n} \le \frac{1}{n} \to 0 \ ,$$

und $\{q_n(x)\}$ konvergiert gleichmäßig gegen $q(x) \equiv 0$. □

Aufgabe 12.14 *Man diskutiere die punktweise und gleichmäßige Konvergenz der folgenden Reihen von Funktionen:*

$$\begin{aligned} f_n(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} x(1-x)^n, \quad 0 \le x < 1 \\ g_n(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin((2n-1)x)}{(2n-1)^2}, \quad x \in \mathbb{R} \\ h_n(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^3}{n}, \quad x \in [0,2] \end{aligned}$$

Lsung von Aufgabe 12.14
Es gilt für alle $x \in (0,1)$

$$f_n(x) = x\sum_{j=0}^{n}(1-x)^j = x\frac{1-x^{n+1}}{1-(1-x)} = 1 - x^{n+1} \to 1 \ ,$$

und wegen $f_n(0) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ konvergiert die Reihe punktweise gegen

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , \text{ falls } x = 0 \\ 1 & , \text{ falls } x \in (0,1) \ . \end{cases}$$

Die Konvergenz kann nicht gleichmäßig sein, da alle $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ stetig sind, die Grenzfunktion f aber nicht.

Wegen

$$|g_n(x)| \le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin(2n-1)x|}{(2n-1)^2} \le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$$

konvergiert $g_n(x)$ nach dem Majorantenkriterium gleichmäßig.

Es gilt

$$h_n(x) = x^3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n},$$

und da die Abbildung $x \mapsto x$ in dem Intervall $[0,2]$ beschränkt ist und die alternierende harmonische Reihe nach dem Leibniz Kriterium konvergiert, konvergiert $\{h_n\}$ gleichmäßig in $[0,2]$. □

12.3 Exponentialfunktion, Logarithmusfunktion

Aufgabe 12.15 *Rechnen Sie per Hand (d.h. ohne Rechner) aus*

$$\log_{10}\left(100^{3.2} \cdot \sqrt{10}\right)$$

sowie unter Verwendung der Näherungswerte

$$\log_7(2) \approx 0.356, \quad \log_7(3) \approx 0.565, \quad \log_7(5) \approx 0.827$$

Werte für

$$\log_7(7.5), \quad \log_5(6), \quad \log_2(\sqrt{5}), \quad \log_{0.4}(0.6).$$

Lsung von Aufgabe 12.15

Es gilt

$$\begin{aligned}\log_{10}\left(100^{3.2}\cdot\sqrt{10}\right) &= \log_{10}(100^{3.2}) + \log_{10}(10^{0.5})\\ &= 3.2\cdot\log_{10}(100) + 0.5\cdot\log_{10}(10) \;=\; 3.2\cdot 2 + 0.5\cdot 1 \;=\; 6.9.\end{aligned}$$

Genauso ist

$$\log_7(7.5) = \log_7\left(\frac{3\cdot 5}{2}\right) = \log_7(3) + \log_7(5) - \log_7(2) = 0.036.$$

Bevor wir die übrigen Ausdrücke auswerten, merken wir an, dass gilt

$$\log_a(b) = \frac{1}{\log_b(a)},\ \log_a(b) = \log_a(c)\cdot\log_c(b) \quad \text{für alle } a, b, c \in (0, \infty),$$

denn nach Definition des Logarithmus ist

$$x = \log_a(b) \iff a^x = b \iff a = b^{1/x} \iff \frac{1}{x} = \log_b(a)$$

und

$$x = \log_a(b) \iff a^x = b \iff \log_c(a^x) = \log_c(b) \iff x\cdot\log_c(a) = \log_c(b).$$

Damit erhält man

$$\log_5(6) = \log_7(6)\cdot\log_5(7) = (\log_7(2) + \log_7(3))\cdot\frac{1}{\log_7(5)} = \frac{0.356\cdot 0.565}{0.827} =,$$

$$\log_2(\sqrt{5}) = \frac{1}{2}\log_2(5) = \frac{1}{2}\log_7(5)\cdot\log_2(7) = \frac{\log_7(5)}{2\cdot\log_7(2)} = \frac{0.827}{2\cdot 0.356} =,$$

$$\log_{0.4}(0.6) = \frac{\log_7(0.6)}{\log_7(0.4)} = \frac{\log_7(3/5)}{\log_7(2/5)} = \frac{\log_7(3) - \log_7(5)}{\log_7(2) - \log_7(5)} = \frac{0.565 - 0.827}{0.356 - 0.827} = .$$

□

Aufgabe 12.16 *Ein Biologe will das Wachstum einer Zellkultur beschreiben. Nach einem Tag Wachstum zählt er* $z_1 = 111$ *Zellen, nach zwei Tagen ermittelt er* $z_2 =$

2464 Zellen und nach dem dritten Tag schließlich $z_3 = 54690$ Zellen. Können Sie ihm nach Ausfüllen der folgenden Tabelle

Tag	*1*	*2*	*3*
z_i	*111*	*2464*	*54690*
$\ln(z_i)$			

mit einem Wachstumsgesetz $z = F(t)$ aushelfen und eine Prognose für der vierten Tag machen?

Lsung von Aufgabe 12.16

Die Logarithmen in der Tabelle

Tag	1	2	3
z_i	111	2464	54690
$\ln(z_i)$	4.709530201	7.809541325	10.90943616

scheinen dem ersten Augenschein nach linear zu wachsen.
Prüfen können wir diese Hypothese durch die Bildung der dividierten Differenzen zu den Zeit- und Logarithmus-Werten:

$$\begin{array}{c|lll} 1 & 4.709530201 & & \\ & & 3.100011124 & \\ 2 & 7.809541325 & & -5.8146E-05 \\ & & 3.099894832 & \\ 3 & 10.90943616 & & \end{array}$$

Der kleine Wert der zweiten dividierten Differenz deutet auf eine ganz geringe Krümmung von $\ln(F(t))$. Tatsächlich kann ein solcher Wert schon durch einen Fehler von nur einer vergessenen Zelle entstehen[1]. Es bietet sich daher an, $\ln(F(t))$ durch lineare Interpolation zu modellieren.

Mit dem obigen Differenzenschema stehen uns hier (mindestens) vier Polynome zur Verfügung:

$$\begin{aligned} p_1(t) &= 4.709530201 + 3.100011124(t-1), \\ p_2(t) &= 7.809541325 + 3.100011124(t-2), \\ p_3(t) &= 7.809541325 + 3.099894832(t-2), \\ p_4(t) &= 10.90943616 + 3.099894832(t-3). \end{aligned}$$

(Es wäre sinnvoll für Sie, hier zu klären, wie diese Polynome zustande kommen.)

[1]wenn Sie mögen, können Sie dies einmal durch Variation der Daten nachprüfen

Modellieren wir nun $F(t)$ durch die Funktionen $F_i(t) = e^{p_i(t)}$, so ergeben sich die folgenden Vergleichswerte bzw. der Voraussagewert:

F_1-Ergebnisse

Tag	1	2	3	4
$F_1(t)$	111	2464.000001	54696.36042	1214160.65

F_2-Ergebnisse

Tag	1	2	3	4
$F_2(t)$	111	2464.000001	54696.36042	1214160.65

F_3-Ergebnisse

Tag	1	2	3	4
$F_3(t)$	111.0129091	2464.000001	54690.00004	1213878.289

F_4-Ergebnisse

Tag	1	2	3	4
$F_4(t)$	111.0129095	2464.000008	54690.0002	1213878.292

(Frage nebenbei: Weshalb stimmen die F_1- und F_2-Werte sowie die F_3- und F_4-Werte übrigens (fast) überein?)

Welches der Modelle zu verwenden ist, ist ohne Mehrinformation über die Güte der Messungen nicht zu entscheiden. Übrigens wird man in der Praxis keines der Modelle verwenden, sondern — wie in der Aufgabe W2.42 — ein Modell, welches alle Daten gleichermaßen gut approximiert.

12.4 Trigonometrische Funktionen

Aufgabe 12.17 *Wie jeder weiß "verhält sich* $\sin(x)$ *für betragsmäßig kleine* x*-Werte wie* x *selbst". Konkretisieren Sie diese Aussage, indem Sie ein Intervall* $[-\alpha, \alpha]$ *bestimmen, so dass man bei der Näherung* $\sin(x) \approx x$ *für* $x \in [-\alpha, \alpha] \setminus \{0\}$ *einen relativen Fehler von nicht mehr als* 1% *begeht.*

Lsung von Aufgabe 12.17

Um den relativen Fehler

$$\delta_x := \left| \frac{\sin x - x}{\sin x} \right|$$

abzuschätzen, benötigen wir eine obere Schranke für $|\sin x - x|$ und eine untere Schranke für $|\sin x|$. Aus der Vorlesung ist bekannt, dass

$$|\sin x| \geq \left| x - \frac{x^3}{6} \right| \quad \text{für alle } x \in (-2, 2)$$

gilt.

Ferner ist

$$\sin x - x = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{x^{2j+1}}{(2j+1)!} - x = \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j \frac{x^{2j+1}}{(2j+1)!}$$

eine alternierende Reihe. Da für $|x| < 1$ die Folge $\dfrac{|x|^{2j+1}}{(2j+1)!}$ monoton fällt, folgt aus dem Leibnitz Kriterium

$$|\sin x - x| \le \frac{|x|^3}{3!} ,$$

und daher für $x \in [-1, 1] \setminus \{0\}$

$$\Big|\frac{\sin x - x}{\sin x}\Big| \le \frac{x|^3/6}{|x - x^3/6|} = \Big|\frac{x^2}{6 - x^2}\Big| .$$

Da die Funktion $y \mapsto \frac{y}{6-y}$ für $0 \le y \le 6$ monoton wächst, ist der relative Fehler im Intervall $[-\alpha, \alpha] \setminus \{0\}$ höchstens 1%, falls

$$\frac{\alpha^2}{6 - \alpha^2} = 0.01, \quad \text{d.h. falls } \alpha = \sqrt{\frac{6}{101}} = 0.2449.$$

□

Aufgabe 12.18 *Zeigen Sie*

a) $e^z \ne 0$ *für alle* $z \in \mathbb{C}$

b) $\sin z \ne 0, \quad \cos z \ne 0$ *für alle* $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$

Lsung von Aufgabe 12.18

a): Es sei $z := x + iy$. Dann gilt

$$|e^z| = |e^x| \cdot |e^{iy}| = e^x|\cos y + i \sin y| = e^x \sqrt{\cos^2 y + \sin^2 y} = e^x > 0,$$

und daher folgt $e^z \ne 0$.

b): Es sei

$$\sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}) = 0.$$

Dann folgt $e^{iz} = e^{-iz}$, d.h. $e^{2iz} = 1$. Mit $z := x + iy$, $y \in [0, 2\pi)$, bedeutet dies $e^{2ix-2y} = 1$, d.h. $e^{2ix} = e^{2y} \in \mathbb{R}_+$. Wegen $|e^{2ix}| = 1$ folgt $e^{2y} = 1$, und daher $y = 0$ oder $y = \pi$. In beiden Fällen ist $z \in \mathbb{R}$.

Genauso folgt aus

$$\cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}) = 0$$

zunächst $e^{iz} = -e^{-iz}$, und damit $e^{2iz} = -1$. Hieraus erhält man $e^{2ix} = -e^{2y} < 0$, und wegen $|e^{2ix}| = 1$ folgt wieder $e^{2y} = 1$. Dies liefert wie oben $z \in \mathbb{R}$. □

12.5 Hyperbelfunktionen

Aufgabe 12.19 *Stellen Sie die Funktionen* Arcosh *und* Artanh *unter Verwendung von der Logarithmusfunktion* ln *dar.*

Lsung von Aufgabe 12.19
Zur Bestimmung von Arcosh haben wir die Gleichung

$$y = \operatorname{Cosh} x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$$

nach x aufzulösen. Multiplikation mit e^x liefert die in e^x quadratische Gleichung

$$(e^x)^2 - 2y(e^x) + 1 = 0$$

mit der Lösung

$$e^x = y \pm \sqrt{y^2 - 1}.$$

Hieraus erhält man

$$x = \operatorname{Arcosh} y = \ln (y \pm \sqrt{y^2 - 1}), \quad y \geq 1.$$

Dabei gehört das positive Vorzeichen zu dem Ast *Arcosh* $: [1, \infty) \to \mathbb{R}_+$ und das negative Vorzeichen zu dem Ast *Arcosh* $: [1, \infty) \to \mathbb{R}_-$.

Die Gleichung

$$y = \tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

ist äquivalent

$$e^{2x}(1 - y) = 1 + y,$$

und durch Auflösung nach x erhält man

$$y = \operatorname{Artanh} y = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + y}{1 - y}, \quad |y| < 1.$$

□

Aufgabe 12.20 *Zeigen Sie die Additionstheoreme der Hypertelfunktionen*

$$\begin{aligned}
\sinh (x_1 \pm x_2) &= \sinh x_1 \cosh x_2 \pm \cosh x_1 \sinh x_2 \ , \\
\cosh (x_1 \pm x_2) &= \cosh x_1 \cosh x_2 \pm \sinh x_1 \sinh x_2 \ , \\
\tanh (x_1 + x_2) &= \frac{\tanh x_1 + \tanh x_2}{1 + \tanh x_1 \tanh x_2}
\end{aligned}$$

Lsung von Aufgabe 12.20
Es gilt

$$\begin{aligned}
&\sinh x_1 \cosh x_2 + \sinh x_2 \cosh x_1 \\
&= \frac{e^{x_1} - e^{-x_1}}{2} \cdot \frac{e^{x_2} + e^{-x_2}}{2} + \frac{e^{x_2} - e^{-x_2}}{2} \cdot \frac{e^{x_1} + e^{-x_1}}{2} \\
&= \frac{1}{4} \Big(e^{x_1+x_2} + e^{x_1-x_2} - e^{-x_1+x_2} - e^{-x_1-x_2} \\
&\qquad + e^{x_1+x_2} - e^{x_1-x_2} + e^{x_2-x_1} - e^{-x_1-x_2} \Big) \\
&= \frac{1}{2} \Big(e^{x_1+x_2} - e^{-x_1-x_2} \Big) = \sinh (x_1 + x_2) \ .
\end{aligned}$$

Genauso zeigt man

$$\cosh (x_1 + x_2) = \cosh x_1 \cosh x_2 - \sinh x_1 \sinh x_2 \ .$$

Die Formeln für $\sinh(x_1 - x_2)$ und $\cosh(x_1 - x_2)$ erhält man, indem man in diesen Formeln x_2 durch $-x_2$ ersetzt und $\sinh(-x_2) = -\sinh x_2$ ausnutzt.

Schließlich gilt

$$\tanh(x_1 + x_2) = \frac{\sinh(x_1 + x_2)}{\cosh(x_1 + x_2)} = \frac{\sinh x_1 \cosh x_2 + \cosh x_1 \sinh x_2}{\cosh x_1 \cosh x_2 + \sinh x_1 \sinh x_2}.$$

Erweitert man mit $1/(\cosh x_1 \cosh x_2)$, so erhält man

$$\tanh(x_1 + x_2) = \frac{\tanh x_1 + \tanh x_2}{1 + \tanh x_1 \tanh x_2} \ .$$

□

Aufgabe 12.21 *Die Tschebyscheff Polynome sind rekursiv definiert durch*

$$T_{n+1}(x) := 2xT_n(x) - T_{n-1}(x), \ T_0(x) \equiv 1, \ T_1(x) = x \ .$$

a) Berechnen Sie T_n für $0 \leq n \leq 5$.

b) Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$T_n(x) = \cos(n \cdot \arccos x) \ , \quad -1 \leq x \leq 1 \ .$$

c) Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$T_n(x) = \cosh(n \cdot \operatorname{Arcosh} x) \ , \quad x \geq 1.$$

d) Bestimmen Sie alle Nullstellen von $T_n(x)$.

Lsung von Aufgabe 12.21

a): Es gilt

$$\begin{aligned}
T_0(x) &\equiv 1,\\
T_1(x) &= x,\\
T_2(x) &= 2xT_1(x) - T_0(x) \;=\; 2x^2 - 1,\\
T_3(x) &= 2xT_2(x) - T_1(x) \;=\; 4x^3 - 3x,\\
T_4(x) &= 2xT_3(x) - T_2(x) \;=\; 8x^4 - 8x^2 + 1,\\
T_5(x) &= 2xT_4(x) - T_3(x) \;=\; 16x^5 - 20x^3 + 5x
\end{aligned}$$

b): Wir zeigen, dass die Funktionen $f_n(x) := \cos(n \arccos x)$, die auf $[-1, 1]$ definiert sind, die Rekursionsformeln der Tschebyscheffpolynome erfüllen. Wegen

$$f_0(x) = \cos(0) = 1\ ,\ \ f_1(x) = \cos(\arccos x) = x$$

gilt für Startwerte $f_0 = T_0$ und $f_1 = T_1$.

Aus den Additionstheoremen der Kosinusfunktion folgt mit $\xi := \arccos x$

$$\begin{aligned}
\cos((n+1)\xi) &= \cos(n\xi)\cos\xi - \sin(n\xi)\sin\xi\\
\cos((n-1)\xi) &= \cos(n\xi)\cos\xi + \sin(n\xi)\sin\xi,
\end{aligned}$$

und durch Addition wegen $\cos\xi = x$

$$f_{n+1}(x) + f_{n-1}(x) = 2xf_n(x)\ ,$$

d.h.

$$f_{n+1}(x) = 2xf_n(x) - f_{n-1}(x)\ .$$

c): Wie in b) erhält man mit den Additionstheoremen aus Aufgabe 12.20, dass die Funktionen

$$g_n(x) := \cosh(n \cdot \operatorname{Arcosh} x),$$

die auf $[1, \infty)$ definiert sind, die Rekursionsformeln der Tschebyscheffpolynome erfüllen.

d): Wir bestimmen zunächst die Nullstellen, die in dem Intervall $[-1, 1]$ liegen. Dort gilt

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x) = 0$$

genau dann, wenn

$$n \cdot \arccos x = \frac{2k-1}{2}\pi, \quad k \in \mathbb{Z},$$

d.h.

$$x_k = \cos\Big(\frac{2k-1}{2n}\pi\Big), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Diese Nullstellen sind für $k = 1, \ldots, n$ voneinander verschieden. Damit haben wir n Nullstellen gefunden, und da T_n ein Polynom vom Grade n ist, sind dies auch alle.
$\square$

Kapitel 13

Differenzierbare reelle Funktionen

13.1 Motivation und Definition

Aufgabe 13.1 *Bestimmen Sie alle Geraden durch den Punkt* $\binom{x}{y} = \binom{4}{7}$, *welche den Graphen der Parabel* $y = x^2$ *tangieren.*

Lsung von Aufgabe 13.1
Die Steigung der Gerade durch den vorgegebenen Punkt $(4, 7)^T$ und den Punkt $(z, z^2)^T$ auf dem Graphen der Parabel ist

$$s(z) = \frac{z^2 - 7}{z - 4}.$$

Gesucht werden die Argumentwerte z, bei denen diese Steigung gleich der Steigung $2z$ der Parabel im x-Wert z ist. Die gewünschten Argumentwerte sind demnach Lösung der quadratischen Gleichung

$$\frac{z^2 - 7}{z - 4} = 2z.$$

Man ermittelt diese schnell zu

$$z_{1/2} = 4 \pm 3$$

und findet als Gleichungen für die gewünschten Tangenten demnach

$$t_1(x) = 7 + 14(x - 4) \quad \text{und} \quad t_2(x) = 7 + 2(x - 4).$$

$\square$

Aufgabe 13.2 *Zeigen Sie unter Benutzung von Satz 14.1, dass die Funktionen*

$$\begin{array}{ll} \text{a)} & f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) := x^3, \\ \text{b)} & g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) := \sqrt{x} \end{array}$$

differenzierbar sind.

Besitzt g eine rechtsseitige Ableitung in $x_0 = 0$?

Lsung von Aufgabe 13.2

a): Es ist für $x_0 \in \mathbb{R}$ und $x \neq x_0$

$$\begin{aligned} \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} &= \lim_{x \to x_0} \frac{x^3 - x_0^3}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{(x^2 + x x_0 + x_0^2)(x - x_0)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \to x_0} (x^2 + x x_0 + x_0^2) = 3x_0^2. \end{aligned}$$

Die Funktion f ist also in x_0 differenzierbar mit der Ableitung $f'(x_0) = 3x_0^2$.

b): Für $x_0 > 0$ und $x > 0$, $x \neq x_0$, gilt

$$\begin{aligned} \lim_{x \to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} &= \lim_{x \to x_0} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x_0}}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x_0}}{(\sqrt{x} - \sqrt{x_0})(\sqrt{x} + \sqrt{x_0})} \\ &= \lim_{x \to x_0} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}. \end{aligned}$$

g ist also differenzierbar in $x_0 > 0$, und es gilt $g'(x_0) = 1/(2\sqrt{x_0})$.

g besitzt keine rechtsseitige Ableitung in $x_0 = 0$, denn wegen

$$g(0+0) = \lim_{x \to 0,\ x > 0} \sqrt{x} = 0$$

gilt

$$\lim_{x \to 0,\ x > 0} \frac{g(x) - g(0+0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0,\ x > 0} \frac{\sqrt{x}}{x} = \lim_{x \to 0,\ x > 0} \frac{1}{\sqrt{x}} = \infty.$$

□

Aufgabe 13.3 *Es seien f die periodischen Fortsetzung von*

$$\tilde{f} : (-1, 1] \to \mathbb{R},\ \tilde{f}(x) := x,$$

mit der Periode 2, d.h.

$$f(x) := \tilde{f}(x) \text{ für alle } x \in (-1, 1] \quad \text{und } f(x+2) = f(x) \text{ für alle } x \in \mathbb{R},$$

und g die periodische Fortsetzung von

$$\tilde{g} : (-1, 1] \to \mathbb{R},\ \tilde{g}(x) := x^2$$

der Periode 2.

Bestimmen Sie die einseitigen Ableitungen von f und g. In welchen Punkten sind f und g differenzierbar?

Lsung von Aufgabe 13.3
Die Funktion $\tilde{f}$ ist die Restriktion der linearen Funktion $\hat{f}(x) := x$, und nach Beispiel 14.1 ist $\tilde{f}$ im Innern ihres Definitionsbereichs $(-1, 1)$ differenzierbar mit der Ableitung $\tilde{f}'(x) = 1$.

Es sei $x_0 \in (2k-1, 2k+1)$, $k \in \mathbb{Z}$. Dann gilt $f(x_0) = \tilde{f}(y_0)$ für $y_0 := x_0 - 2k$, und für $x \in (2k-1, 2k+1)$, $x \neq x_0$ folgt mit $y := x - 2k$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{y \to y_0} \frac{\tilde{f}(y) - \tilde{f}(y_0)}{y - y_0} = \tilde{f}'(y) = 1.$$

f ist also in jedem der Intervalle $(2k-1, 2k+1)$, $k \in \mathbb{Z}$, differenzierbar, und nach Satz 14.1 sowohl links- als auch rechtsseitig differenzierbar mit $f'_-(x_0) = f'_+(x_0) = 1$.

Für $x_0 = 2k-1$, $k \in \mathbb{Z}$, ist f sicher nicht differenzierbar, denn f ist in diesen Punkten nicht einmal stetig. Für $x \in (2k-3, 2k-1)$ gilt mit $y := x - (2k-2)$ wegen $f(x_0 - 0) = f(x_0) = 1$

$$\lim_{x \to x_0 - 0} \frac{f(x) - f(x_0 - 0)}{x - x_0} = \lim_{y \to 1-0} \frac{y-1}{y-1} = 1 = f'_-(x_0)$$

und für $x \in (2k-1, 2k+1)$ gilt mit $y := y - 2k$ wegen $f(x_0 + 0) = -1$

$$\lim_{x \to x_0 + 0} \frac{f(x) - f(x_0 + 0)}{x - x_0} = \lim_{y \to -1+0} \frac{y - f(x_0 + 0)}{y + 1} = 1 = f'_+(x_0).$$

f besitzt also auch in den Punkten $x_0 = 2k-1$, $k \in \mathbb{Z}$, beide einseitigen Ableitungen. Beachten Sie, dass im Differenzenquotienten bei der Berechnung von $f'_+(2k-1)$ der rechtsseitige Grenzwert $f(2k-1+0) = -1$ und nicht $f(2k-1) = 1$ zu verwenden ist.

Für die Funktion g erhält man auf ähnliche Weise, dass g in allen Punkten $x_0 \in (2k-1, 2k+1)$, $k \in \mathbb{Z}$, differenzierbar ist mit der Ableitung

$$g'(x_0) = g'_-(x_0) = g'_+(x_0) = 2(x_0 - 2k)$$

und dass in den Punkten $x_0 = 2k-1$, $k \in \mathbb{Z}$, die einseitigen Ableitungen existieren und

$$g'_-(2k-1) = 2, \quad g_+(2k-1) = -2.$$

Da diese nicht übereinstimmen, ist g in diesen Punkten nicht differenzierbar. $\square$

Aufgabe 13.4 *Bestimmen Sie unter Benutzung geometrischer Argumente (also der Additionstheoreme und des Ergebnisses* $\lim_{h \to 0} (\sin h)/h = 1$ *von Aufgabe 11.22) die Ableitungen des Sinus- und der Kosinusfunktion.*

Lsung von Aufgabe 13.4

Die Additionstheoreme für die Sinus- und die Kosinusfunktion lauten

$$\begin{aligned}\sin(x+h) &= \sin x\cos h + \cos x \,\mathrm{sinh}\\ \cos(x+h) &= \cos x\cos h - \sin x\sin h.\end{aligned}$$

Daher gilt

$$\frac{d}{dx}\sin x = \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sin x\cos h+\cos x\sin h-\sin h}{h}$$

und

$$\frac{d}{dx}\cos x = \lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\cos x\cos h-\sin x\sin h-\cos x}{h}.$$

Wir wissen bereits, dass

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h} = 1$$

gilt. Ferner gilt wegen $\cos(2\theta) = \cos^2\theta - \sin^2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$

$$\lim_{h\to 0}\frac{\cos h-1}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{-2\sin^2\frac{h}{2}}{h} = -\lim_{h\to 0}\frac{\sin(h/2)}{h/2}\cdot\lim_{h\to 0}\sin\frac{h}{2} = 0.$$

Daher folgt

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\sin x &= \lim_{h\to 0}\frac{\cos x\sin h + (\cos h-1)\sin x}{h}\\ &= \cos x\cdot\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h} + \sin x\cdot\lim_{h\to 0}\frac{\cos h-1}{h}\\ &= \cos x\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\cos x &= \lim_{h\to 0}\frac{\cos x\cos h-\sin x\sin h-\cos x}{h}\\ &= -\sin x\cdot\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h} + \cos x\cdot\lim_{h\to 0}\frac{\cos h-1}{h}\\ &= -\sin x.\end{aligned}$$

□

Aufgabe 13.5 *Es sei $f : I \to \mathbb{R}$ in dem inneren Punkt x_0 von I differenzierbar. Zeigen Sie, dass dann der Grenzwert*

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h} \tag{13.1}$$

existiert und gleich $f'(x_0)$ ist. Zeigen Sie, dass umgekehrt aus der Existenz des Grenzwertes in (13.1) nicht folgt, dass f in dem Punkt x_0 differenzierbar ist.

Lsung von Aufgabe 13.5

Es sei f in x_0 differenzierbar. Dann existieren die Grenzwerte

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \quad \text{und} \quad \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0-h)-f(x_0)}{-h}$$

und sind beide gleich $f'(x_0)$. Nach den Rechenregeln für Grenzwerte existiert dann auch

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h} = \frac{1}{2}\lim_{h\to 0}\Big(\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}+\frac{f(x_0-h)-f(x_0)}{-h}\Big),$$

und es gilt

$$\begin{aligned}&\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}\\ =\ &\frac{1}{2}\Big(\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0-h)-f(x_0)}{-h}\Big) = f'(x_0).\end{aligned}$$

Umgekehrt folgt aus der Existenz von

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}$$

die Differenzierbarkeit von f, denn für

$$f\,:\,\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x) := \begin{cases} -1, & \text{für} \quad x<0 \\ 1, & \text{für} \quad x\geq 0\end{cases}$$

und $x_0 = 0$ gilt

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h} = 0,$$

aber f ist nicht einmal stetig in x_0, also erst recht nicht differenzierbar. □

Aufgabe 13.6 *Es sei $f\,:\,[-a,a]\to\mathbb{R}$ differenzierbar in dem Intervall $(-a,a)$. Zeigen Sie*

a) Ist f eine gerade Funktion, so ist die Funktion f' ungerade.

b) Ist f eine ungerade Funktion, so ist die Funktion f' gerade.

Lsung von Aufgabe 13.6

a): Ist f eine gerade Funktion, so gilt $f(-y)=f(y)$ für alle $y\in[-a,a]$, und daher folgt für alle $x\in(-a,a)$

$$\begin{aligned} f'(-x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(-x+h)-f(-x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x-h)-f(x)}{h}\\ &= -\lim_{-h\to 0}\frac{f(x-h)-f(x)}{-h} = -f'(x),\end{aligned}$$

d.h. f' ist eine ungerade Funktion.

b): Ist f eine ungerade Funktion, so gilt $f(-y) = f - (y)$ für alle $y \in [-a, a]$, und daher folgt für alle $x \in (-a, a)$

$$\begin{aligned} f'(-x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(-x+h) - f(-x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-f(x-h) + f(x)}{h} \\ &= \lim_{-h\to 0} \frac{f(x-h) - f(x)}{-h} = f'(x), \end{aligned}$$

d.h. f' ist eine gerade Funktion. □

13.2 Rechenregeln

Aufgabe 13.7 *Bestimmen Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen:*

a) :	$f(x) = \sin x \cdot e^x$	b) :	$g(y) = \cos y \cdot \sinh y \cdot \ln y$
c) :	$h(x) = \dfrac{x \cdot \sin x - \cos x}{x \cdot \cos x - \sin x}$	d) :	$i(z) = \dfrac{3z + z^4}{3z^3 - 1}$
e) :	$j(x) = \left(\left(x \cdot x^{1/3}\right)^{1/3} \cdot x\right)^{1/3}$	f) :	$k(p) = p^p$
g) :	$l(w) = (e^w)^2 - e^{w^2}$	h) :	$m(x) = \arctan \dfrac{1+x}{1-x}$
i) :	$p(y) = \exp(\exp(\exp(y)))$	j) :	$q(z) = \arcsin \dfrac{1}{\sqrt{z}}.$
k) :	$f(x) = \ln\left(\sqrt{1 + \sin^2 x}\right)$		

Lsung von Aufgabe 13.7
a): Nach der Produktregel gilt

$$f'(x) = \cos x e^x + \sin x e^x = e^x(\cos x + \sin x).$$

b): Wiederum nach der Produktregel gilt

$$\begin{aligned} g'(y) &= -\sin y \cdot \sinh y \cdot \ln y + \cos y \cdot (\sinh y \cdot \ln y)' \\ &= -\sin y \cdot \sinh y \cdot \ln y + \cos y \cdot \cosh y \cdot \ln y + \frac{1}{y} \cos y \cdot \sinh y. \end{aligned}$$

c): Nach der Quotientenregel gilt

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{(x \cdot \cos x - \sin x)(x \cdot \cos x + 2\sin x) - (-x \cdot \sin x)(x \cdot \sin x - \cos x)}{(x \cdot \cos x - \sin x)^2} \\ &= \frac{x^2 - 2\sin^2 x}{(x \cdot \cos x - \sin x)^2}. \end{aligned}$$

d): Die Quotientenregel liefert

$$i'(z) = -\frac{3z^6 + 22z^3 - 3}{(3z^3 - 1)^2}.$$

e): Es ist $j(x) = x^{13/27}$ und daher

$$j'(x) = \frac{13}{27} x^{-14/27}.$$

f): Es ist $k(p) = exp(p \cdot \ln p)$, und daher erhält man aus der Kettenregel

$$\begin{aligned} k'(p) &= \exp(p \cdot \ln p) \cdot (p \cdot \frac{1}{p} + \ln p) \\ &= p^p \cdot (\ln p + 1). \end{aligned}$$

g): Die Kettenregel liefert

$$l'(w) = 2\,(e^w)^2 - 2we^{w^2}.$$

h): Aus der Kettenregel und der Produktregel folgt

$$m'(x) = \frac{1}{1 + ((1+x)/(1-x))^2} \cdot \frac{2}{(1-x)^2} = \frac{1}{1+x^2}.$$

i): Zweimalige Anwendung der Kettenregel liefert

$$\begin{aligned} p'(y) &= \exp(\exp(\exp(y))) \cdot (\,\exp(\exp(y)))' \\ &= \exp(\exp(\exp(y))) \cdot \exp(\exp(y)) \cdot (\,\exp(y))' \\ &= \exp(\exp(\exp(y))) \cdot \exp(\exp(y)) \cdot \exp(y) \\ &= \exp\left(\,\exp(\exp(y)) + \exp(y) + y\right). \end{aligned}$$

j): Mit der Kettenregel erhält man

$$q'(z) = \frac{1}{\sqrt{1 - 1/z}} \cdot \frac{-1}{2z^{3/2}} = \frac{-1}{2z\sqrt{z-1}}.$$

k) Durch mehrfache Anwendung der Kettenregel erhält man

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{\sqrt{1+\sin^2 x}} \cdot (\sqrt{1+\sin^2 x})' \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+\sin^2 x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{1+\sin^2 x}} \cdot (1+\sin^2 x)' \\ &= \frac{2\sin x\cos x}{2(1+\sin^2 x)} = \frac{\sin x \cos x}{1+\sin^2 x}. \end{aligned}$$

□

Aufgabe 13.8 *Bestimmen Sie die Ableitungen der Funktionen*

$$f(y) := \operatorname{Arsinh} y\ ,\ \ g(y) := \operatorname{Artanh} y.$$

Lsung von Aufgabe 13.8

Nach Satz 14.6 gilt

$$\begin{aligned} f'(y) &= \frac{1}{(\sinh x)'}\Big|_{x=\operatorname{Arsinh} y} = \frac{1}{\cosh x}\Big|_{x=\operatorname{Arsinh} y} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+\sinh^2 x}}\Big|_{x=\operatorname{Arsinh} y} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}. \end{aligned}$$

Wegen

$$(\tanh x)' = \left(\frac{\sinh x}{\cosh x}\right)' = \frac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{\cosh^2 x} = \frac{1}{\cosh^2 x}$$

gilt

$$\begin{aligned} g'(y) &= \frac{1}{(\tanh x)'}\Big|_{x=\operatorname{Artanh} y} = \cosh^2 x\Big|_{x=\operatorname{Artanh} y} = \frac{\cosh^2 x}{\cosh^2 x - \sinh^2 x}\Big|_{x=\operatorname{Artanh} y} \\ &= \frac{1}{1-\tanh^2 x}\Big|_{x=\operatorname{Artanh} y} = \frac{1}{1-y^2}. \end{aligned}$$

□

Aufgabe 13.9 *a) Differenzieren Sie unter Benutzung von Satz 14.6 die Funktion*

$$f(x) := \sqrt{x+3} - 2.$$

b) Wir werden noch sehen, dass die Gleichung

$$x = y\sqrt{5-y^2}$$

eine Funktion $y : I \to \mathbb{R}$ definiert, die auf einem Intervall $I = (2-\varepsilon, 2+eps)$ definiert ist und für die $y(2) = 2$ gilt.

Bestimmen Sie die die Ableitung $y'(2)$.

Lsung von Aufgabe 13.9

a): Wir bestimmen die inverse Funktion von f:

$$y = \sqrt{x+3} - 2 \iff x = (y+2)^2 - 3 =: g(y).$$

Hiermit gilt nach Satz 14.6

$$f'(x) = \frac{1}{g'(y)}\Big|_{y=f(x)} = \frac{1}{2(y+2)}\Big|_{y=f(x)} = \frac{1}{2\sqrt{x+3}}.$$

b): Wegen

$$\frac{dx}{df} = \sqrt{5-f^2} - \frac{f^2}{\sqrt{5-f^2}}$$

gilt nach Satz 14.6

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{5-f^2} - \frac{f^2}{\sqrt{5-f^2}}} = \frac{\sqrt{5-f^2}}{5-2f^2},$$

und mit $f(2) = 2$ folgt

$$f'(2) = -\frac{1}{3}.$$

Will man nicht Satz 14.6 verwenden, so kann man die Gleichung

$$x = f\sqrt{5-f^2}$$

unter Beachtung von $f(2) = 2$ auflösen:

$$\begin{aligned} x = f\sqrt{5-f^2} \quad &\Longleftrightarrow \quad x^2 = f^2(5-f^2) \Longleftrightarrow f^4 - 5f^2 + x^2 = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad f^2 = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - x^2} \\ &\Longleftrightarrow \quad f = \pm\sqrt{\frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - x^2}}. \end{aligned}$$

Wegen $f(2) = 2$ hat man in beiden Fällen $+$ zu wählen, und die gesuchte Funktion f ist

$$f(x) = \sqrt{\frac{5}{2} + \sqrt{\frac{25}{4} - x^2}}.$$

Mit der Kettenregel erhält man

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\frac{5}{2} + \sqrt{\frac{25}{4} - x^2}}} \cdot \frac{-2x}{2\sqrt{\frac{25}{4} - x^2}},$$

und daher wie oben (aber mit aufwendigerer Rechnung)

$$f'(2) = -\frac{1}{3}.$$

□

Aufgabe 13.10 *Wir werden später noch sehen, dass durch die beiden Gleichungen*

$$2y - 4x + y^2 - x^2y + y\cos x = 0 \quad \textit{und} \quad 4y + 3x + x^2 + x^3y^2 = 0$$

zwei Funktionen $y_1 : I \to \mathbb{R}$ und $y_2 : I \to \mathbb{R}$ erklärt sind, die auf einem offenen Intervall I definiert sind, das den Punkt 0 enthält, und für die $y_1(0) = 0$ und $y_(0) = 0$ gilt. Diese Abbildungen sind in I differenzierbar.

Zeigen Sie, dass sich ihre Graphen unter einem rechten Winkel schneiden.

Lsung von Aufgabe 13.10
Nach der Kettenregel gilt für alle $x \in I$

$$2y_1'(x) - 4 + 2y_1(x)y_1'(x) - 2xy_1(x) - x^2y_1'(x) + y_1'(x)\cos x + y_1(x)\sin x = 0$$

und

$$4y_2'(x) + 3 + 2x + 3x^2y_2(x)^2 + 2x^3y_2(x)y_2'(x) = 0.$$

Wegen $y(0) = 0$ folgt

$$3y_1'(0) - 4 = 0 \quad \text{und} \quad 4y_2'(0) = 3.$$

Die Tangentenvektoren der Graphen sind also

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 4/3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -3/4 \end{pmatrix},$$

und diese stehen offenbar senkrecht aufeinander. □

Aufgabe 13.11 *Bestimmen Sie die Tangentenrichtungen der Ellipse $2x^2+3y^2 = 5$ und der Kuspe, die durch die Gleichung $y^2 = x^3$ gegeben ist, in ihren Schnittpunkten und die Winkel, unter denen beide Kurven sich schneiden.*

Unterstellen Sie, dass beide Kurven in einer Umgebung der Schnittpunkte als Graphen von differenzierbaren Funktionen geschrieben werden können.

Lsung von Aufgabe 13.11
Einsetzen von $y^2 = x^3$ in die Ellipsengleichung liefert $2x^2 + 3x^3 = 5$. Offensichtlich ist $x_0 = 1$ eine Lösung, und wegen

$$(3x^3 + 2x^2 - 5) : (x - 1) = (3x^2 + 5x + 5)$$

ist dies der einzige Abszissenwert von Schnittpunkten.

Aus den Gleichungen $2x^2 + 3y^2 = 5$ und $y^2 = x^3$ erhält man, dass die Ellipse und die Kuspe genau zwei Schnittpunkte haben, nämlich $(1, 1)$ und $(1, -1)$.

Für die Steigung der Ellipse im Punkte $(1, 1)$ gilt

$$4x + 6yy'\Big|_{(x,y)=(1,1)} = 4 + 6y'(1) = 0, \quad \text{d.h. } y'(1) = -\frac{2}{3},$$

und für die Steigung der Kuspe im Punkt $(1, 1)$ erhält man

$$2yy' - 3x^2\Big|_{(x,y)=(1,1)} = 2y' - 3 = 0, \quad \text{d.h. } y'(1) = \frac{3}{2}.$$

Die Tangentenrichtungen sind also

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2/3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 3/2 \end{pmatrix} ,$$

und daher schneiden sich die Ellipse und die Kuspe unter einem rechten Winkel.

Genauso erhält man für den Punkt $(1, -1)$ als Tangentenrichtung der Ellipse und der Kuspe

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2/3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -3/2 \end{pmatrix} .$$

□

Aufgabe 13.12 *Berechnen Sie die Ableitungen von*

$$\begin{aligned} f(x) &:= \frac{x^2 \cosh x}{(1+x^2)\sin x \; e^{2x}} \\ g(x) &:= x^{1/x} \end{aligned}$$

Lsung von Aufgabe 13.12

Wegen

$$\ln f(x) = \ln x^2 + \ln(\cosh x) - \ln\left(1+x^2\right) - \ln(\sin x) - 2x$$

erhält man durch logarithmische Differentiation

$$\begin{aligned} f'(x) &= f(x)\left(\frac{2x}{x^2} + \frac{\sinh x}{\cosh x} - \frac{2x}{1+x^2} - \frac{\cos x}{\sin x} - 2\right) \\ &= \frac{x^2 \cosh x}{(1+x^2)\sin x e^x}\left(\frac{1}{x} + \tanh x - \frac{2x}{1+x^2} - \cot x - 2\right) . \end{aligned}$$

Es ist

$$\ln g(x) = \frac{1}{x} \ln x \ ,$$

und daher folgt

$$g'(x) = g(x)\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2}\ln x\right) = \frac{1}{x^3}\ln x \cdot (1 - \ln x).$$

□

Aufgabe 13.13 *a) Untersuchen Sie, für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ die Funktion*

$$f \ : \ \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ , \ f(x) := \begin{cases} x^\alpha \sin \frac{1}{x} & \textit{für} \quad x \neq 0 \\ 0 & \textit{für} \quad x = 0 \end{cases}$$

differenzierbar bzw. stetig differenzierbar ist.

b) Untersuchen Sie, in welchen Punkten die Funktion

$$f(x) := \begin{cases} x^2 \ , & x \in \mathbb{Q} \\ x^3 \ , & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

stetig ist, differenzierbar oder stetig differenzierbar ist.

Lsung von Aufgabe 13.13

a): In jedem $x \neq 0$ ist die Funktion sicher beliebig oft stetig differenzierbar. Wir haben also nur den Punkt $x_0 = 0$ zu untersuchen.

Für $\alpha \leq 0$ ist f nicht einmal stetig in x_0, also erst recht nicht differenzierbar.

Für $\alpha > 0$ existiert der Grenzwert

$$\lim_{x \to 0} \left| \frac{f(x) - f(0)}{x} \right| = \lim_{x \to 0} \left| x^{\alpha - 1} \sin \frac{1}{x} \right|$$

genau dann, wenn $\alpha > 1$ gilt. Es ist also f für $\alpha > 1$ differenzierbar mit $f'(0) = 0$.

Für $x \neq 0$ gilt

$$f'(x) = \alpha x^{\alpha-1} \sin \frac{1}{x} - x^{\alpha-2} \cos \frac{1}{x},$$

und daher ist f genau dann stetig differenzierbar, wenn $\alpha > 2$ gilt.

b): Für $x \notin \{0, 1\}$ gilt

$$\lim_{\substack{x_n \to x \\ x_n \in \mathbb{Q}}} f(x_n) = x^2 \neq x^3 = \lim_{\substack{x_n \to x \\ x_n \notin \mathbb{Q}}} f(x_n) \ ,$$

und daher ist f nicht stetig in x.

In $x = 0$ und $x = 1$ ist f stetig.

Wegen

$$\lim_{\substack{x_n \to 1 \\ x_n \in \mathbb{Q}}} \left| \frac{f(x_n) - f(1)}{x_n - 1} \right| = \lim_{x_n \to 1} \left| \frac{x_n^2 - 1}{x_n - 1} \right| = 2$$

und

$$\lim_{\substack{x_n \to 1 \\ x_n \notin \mathbb{Q}}} \left| \frac{f(x_n) - f(1)}{x_n - 1} \right| = \lim_{x_n \to 1} \left| \frac{x_n^3 - 1}{x_n - 1} \right| = 3$$

ist f nicht differenzierbar in $x = 1$.

Wegen

$$\lim_{x_n \to 0} \left| \frac{f(x_n) - f(0)}{x_n - 0} \right| = \lim_{x_n - 0} \left\{ \begin{array}{lll} x_n & , \text{ falls } & x_n \in \mathbb{Q} \\ x_n^2 & , \text{ falls } & x_n \notin \mathbb{Q} \end{array} \right\} = 0$$

ist f differenzierbar in $x = 0$ mit der Ableitung $f'(0) = 0$.

Die Frage nach der stetigen Differenzierbarkeit ist sinnlos, da f nicht in einer Umgebung von $x_0 = 0$ differenzierbar ist. $\square$

Aufgabe 13.14 *Beweisen Sie durch Differentiation*

$$\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} \cdot \operatorname{sign} x \ , \quad \textit{für } x \neq 0,$$
$$2 \arctan x = \arcsin \frac{2x}{1+x^2} \ , \quad \textit{für } -1 \leq x \leq 1,$$
$$\arcsin x = \arctan \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \ , \quad \textit{für } -1 < x < x.$$

Lsung von Aufgabe 13.14

Es sei $f(x) = \arctan x + \arctan \frac{1}{x}$, $x \neq 0$. Dann gilt

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+(1/x)^2} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = 0.$$

Daher ist f sowohl auf dem Intervall $(-\infty, 0)$ als auch auf $(0, \infty)$ konstant. Es gilt $\arctan(\pm 1) = \pm\pi/4$, und daher folgt die Behauptung.

Man rechnet leicht nach, dass

$$-1 \leq \frac{2x}{1+x^2} \leq 1 \quad \text{für alle } x \in [-1, 1]$$

gilt, und daher ist die Funktion

$$g(x) := 2 \arctan x - \arcsin \frac{2x}{1+x^2}$$

in dem Intervall $[-1, 1]$ definiert. Es gilt

$$g'(x) = \frac{2}{1+x^2} - \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{4x^2}{(1+x^2)^2}}} \cdot \frac{2(1+x^2) - 4x^2}{(1+x^2)^2} = 0.$$

g ist also konstant auf dem Intervall $[-1, 1]$, und $g(0) = 0$ liefert die Behauptung.

Für

$$h(x) := \arcsin x - \arctan \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

erhält man

$$h'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{1 + \frac{x^2}{1-x^2}} \cdot \frac{\sqrt{1-x^2} - x \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}(-2x)}{1-x^2} = 0.$$

Es folgt also $h(x) = h(0) = 0$ für alle $x \in (0, 1)$. $\square$

Kapitel 14

Anwendungen der Differentialrechnung

14.1 Mittelwertsätze

Aufgabe 14.1 *Gehen Sie die folgenden Probleme mit dem Mittelwertsatz an:*

a) *Man zeige: Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig in $[a, b]$ und differenzierbar in (a, b) und ist*

$$|f'(x)| \leq L \quad \text{für ein } L \geq 0 \text{ und alle } x \in (a, b),$$

so ist f auf $[a, b]$ Lipschitz-stetig mit der Lipschitzkonstante L.

b) *Man zeige: Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar für alle $x \in \mathbb{R}$, und sei $f'(x)$ konstant. Dann ist f eine lineare Funktion.*

c) *Je nach Fahrweise verbraucht Ihr Auto zwischen 6 und 10 Liter Benzin auf 100 km. Sei $f(x)$ die (differenzierbare) Anzahl von Litern im Tank Ihres Wagens nach x gefahrenen Kilometern. Bestimmen Sie aus dem Wissen $f(0) = 40$ eine obere und eine untere Schranke für $f(200)$.*

Lsung von Aufgabe 14.1
a): Für $a \leq x < y \leq b$ erhält man durch Anwendung des Mittelwertsatzes auf dem Intervall $[x, y]$:

$$f(y) - f(x) = f'(\xi)(x - y) \quad \text{für ein } \xi \in (x, y).$$

Da der Betrag der Ableitung von f überall in (a, b) durch L beschränkt ist, gilt dies natürlich auch für diese Stelle $\xi \in (x, y) \subset (a, b)$, so dass

$$|f(y) - f(x)| \leq L \cdot |y - x|$$

ist.

b): Wie in a) findet man, dass für jedes $x \in \mathbb{R}$ ein ξ_x zwischen x und (z.B.) dem Punkt $x_0 = 0$ existiert, mit dem

$$f(x) - f(0) = f'(\xi_x)(x - 0)$$

ist. Da $f'(x)$ in ganz $\mathbb{R}$ konstant ist (sagen wir gleich C), heißt dies

$$f(x) - f(0) = C \cdot x$$

oder

$$f(x) = f(0) + C \cdot x.$$

c): $f'(x_0)$ ist die Variation des Tankinhaltes pro gefahrenem Kilometer bei x_0 gefahrenen Kilometern.

Die Angabe über die Gefräßigkeit Ihres Wagens besagt gerade

$$-6/100 \leq f'(x) \leq -10/100 \tag{14.1}$$

(natürlich nur solange $f(x)$ noch größer als Null ist).

Der Mittelwertsatz sagt nun

$$f(200) - f(0) = f'(\xi)(200 - 0) \quad \text{für ein } \xi \in (0, 200)$$

oder

$$f(200) = 40 + f'(\xi) \cdot 200.$$

Mit (14.1) ergibt sich hieraus

$$20 = 40 - \frac{10}{100} \cdot 200 \leq f(200) \leq 40 - \frac{6}{100} \cdot 200 = 28.$$

Das haben Sie auch ohne Mittelwertsatz gewusst? Nein! Andersherum, Sie haben den Mittelwertsatz schon immer angewendet!

Aufgabe 14.2 *a) Zeigen Sie, dass die Funktion*

$$f(x) := x^p - px + q \ , \quad p, q \in \mathbb{R},$$

für jedes $p > 1$ höchstens eine Nullstelle im Intervall $(0,1)$ besitzt.

b) Zeigen Sie, dass die Funktion

$$g(x) := x^n + px + q \ , \quad n \in \mathbb{N}, \ p, q \in \mathbb{R},$$

für gerades n höchstens eine reelle Nullstelle und für ungerades n höchstens zwei reelle Nullstellen besitzt.

Lsung von Aufgabe 14.2

a): Wir zeigen die Aussage indirekt. Existieren zwei Nullstellen $\xi_1, \xi_2 \in (0,1)$ von f, so besitzt nach dem Satz von Rolle die Ableitung f' eine Nullstelle η zwischen ξ_1 und ξ_2, also im Intervall $(0,1)$.

$$f'(x) = px^{p-1} - p = p(x^{p-1} - 1)$$

besitzt jedoch wegen $p > 1$ nur die Nullstelle $x = 1$.

b): Wir machen uns zunächst klar, dass aus dem Satz von Rolle die Aussage folgt: Ist $h : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und in (a,b) differenzierbar und besitzt h' höchstens k Nullstellen in (a,b), so hat h höchstens $k+1$ Nullstellen in $[a,b]$. Besitzt nämlich h die $k+2$ Nullstellen

$$a \leq \xi_1 < \xi_2 < \ldots < \xi_{k+1} < \xi_{k+2} \leq b,$$

so hat h' in jedem der Intervalle (ξ_j, ξ_{j+1}), $j = 1, \ldots, k+1$, eine Nullstelle, insgesamt also wenigstens $k+1$ Nullstellen in (a,b).

Es gilt

$$g'(x) = nx^{n-1} + p.$$

Ist $n \in \mathbb{N}$ gerade, so besitzt g' genau eine reelle Nullstelle, und nach den obigen Überlegungen besitzt g höchstens 2 reelle Nullstellen, und ist n ungerade, so hat g' höchstens zwei und damit g höchstens drei reelle Nullstellen. $\square$

Aufgabe 14.3 *a) Welche der folgenden Funktionen erfüllen die Voraussetzungen des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung?*

$$
\begin{array}{lll}
f : [-1,2] \to \mathbb{R} & , & f(x) := \sqrt[3]{x^4}, \\
g : [-2,1] \to \mathbb{R} & , & g(x) := \sqrt[5]{(x+1)^4}, \\
h : [0,2] \to \mathbb{R} & , & h(x) := \sqrt{x(4-x^2)}, \\
k : [0,1] \to \mathbb{R} & , & k(x) := \begin{cases} 1, & \text{für } x = 0 \\ \frac{x}{\sin x} & \text{für } 0 < x \le 1 \end{cases} \\
\ell : [-1,1] \to \mathbb{R} & , & \ell(x) := \begin{cases} x^2 \cdot \sin \frac{1}{x} & \text{für } x \in [-1,1] \setminus \{0\} \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}
\end{array}
$$

b) Für welche Werte von $a, b, c \in \mathbb{R}$ erfüllt die Funktion

$$
f : [0,2] \to \mathbb{R}, \; f(x) := \begin{cases} ax + b & \text{für } 0 \le x \le 1 \\ x^2 - x + c & \text{für } 1 < x < 2 \\ 3 & \text{für } x = 2 \end{cases}
$$

im Intervall $[0,2]$ die Voraussetzungen des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung?

Lsung von Aufgabe 14.3

Die Funktion $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ erfüllt im Intervall $[a,b]$ die Voraussetzungen des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung, wenn sie stetig im abgeschlossenen Intervall $[a,b]$ ist und differenzierbar im offenen Intervall (a,b) ist. Es müssen in den Intervallenden also nicht die einseitigen Ableitungen zu existieren.

a): Die Funktion $f(x) := \sqrt[3]{x^4}$ erfüllt die Voraussetzungen, denn f ist stetig und die Ableitung $f'(x) := \frac{4}{3}x^{1/3}$ existiert auf $(-1,2)$ (ist sogar in die Randpunkte des Definitionsbereichs stetig fortsetzbar).

g erfüllt nicht die Voraussetzungen, denn g ist nicht differenzierbar im Punkt -1.

$h(x) := \sqrt{x(4-x^2)}$ ist stetig in $[0,2]$ und, da $x(4-x^2) > 0$ für alle $x \in (0,2)$ gilt, nach der Kettenregel differenzierbar in $(0,2)$. Die Voraussetzungen sind des Mittelwertsatzes sind also erfüllt (auch wenn h in den Punkten 0 bzw. 2 nicht rechts- bzw. linksseitig differenzierbar ist).

Nach Aufgabe 11.?? existiert der Grenzwert

$$
\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad \text{und damit auch } \lim_{x \to 0} \frac{x}{\sin x} = 1.
$$

Wegen $\sin x \neq 0$ für alle $x \in (0,1]$ ist also k stetig in $[0,1]$ und nach der Quotientenregel auch differenzierbar in $(0,1)$. Die Voraussetzungen des Mittelwertsatzes sind also erfüllt.

Die Funktion ℓ ist nach Aufgabe 13.?? stetig in $[-1,1]$ und differenzierbar in $(-1,1)$ und erfüllt daher die Voraussetzungen des Mittelwertsatzes. Dass f' nicht stetig in $(-1,1)$ ist, wird nicht benötigt.

b): Damit f stetig im Punkt $x=2$ ist, muss

$$\lim_{x\to 2-0} f(x) = \lim_{x\to 2-0} x^2 - x + c = 2 + c = 3\ , \quad \text{d.h. } c = 1$$

gelten. Mit $c=1$ ist f für alle $a,b \in \mathbb{R}$ stetig in $[0,1)\cup(1,2]$ und differenzierbar in $(0,1)\cup(1,2)$. Wir müssen also a und b so bestimmen, dass f in $x_0 := 1$ differenzierbar ist (und dann automatisch stetig ist). Es gilt

$$\begin{array}{lcl} \lim_{x\to 1-0} f(x) = a+b & , & \lim_{x\to 1+0} f(x) = c = 1 \\ \lim_{x\to 1-0} f'(x) = a & , & \lim_{x\to 1+0} f'(x) = 1. \end{array}$$

Daher ist f nach Satz 14.1 differenzierbar in $x=1$, falls $a=1$ und $b=0$ gilt. □

Aufgabe 14.4 *a) Gewünscht ist eine Tabelle von Sinuswerten* $\sin(x_i)$ *zu äquidistanten Argumentwerten*

$$0 := x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n := 1, \quad x_{i+1} - x_i = \frac{1}{n},$$

aus der für jeden beliebigen x*–Wert in* $[0,1]$ *ein* x_i *gewählt werden kann mit*

$$|\sin(x) - \sin(x_i)| \leq 0.001.$$

Bestimmen Sie ein $n \in \mathbb{N}$*, welches diesen Anforderungen genügt.*

b) Wir groß muss n *gewählt werden, damit zu einem* $x \in [x_{i-1}, x_i]$ *die lineare Interpolation*

$$f(x) := \frac{1}{x_i - x_{i-1}}((x - x_{i-1})\sin(x_i) + (x_i - x)\sin(x_{i-1}))$$

die Bedingung

$$|f(x) - \sin(x)| \leq 0.001$$

erfüllt.

Lsung von Aufgabe 14.4
a): Es ist klar, dass man zu jedem $x \in [0,1]$ ein x_i in der Tabelle wählen kann, welches

$$|x - x_i| \le \frac{1}{2n} \tag{14.2}$$

erfüllt. Damit gilt nach dem Mittelwertsatz mit einem ξ zwischen x und x_i

$$|\sin(x) - \sin(x_i)| = |\cos(\xi)| \cdot |x - x_i| \le 1 \cdot \frac{1}{2n}.$$

Hieraus liest man ab, dass $n = 500$ den gewünschten Genauigkeitsanforderungen genügt.

b): Die Funktion

$$g(x) := \sin(x) - f(x) = \sin(x) - \frac{1}{x_i - x_{i-1}}((x - x_{i-1})\sin(x_i) + (x_i - x)\sin(x_{i-1}))$$

erfüllt die Voraussetzungend des Mittelwertsatzes in $[x_{i-1}, x_i]$, und daher gilt für alle $x \in [x_{i-1}, x_i]$ mit einem ξ zwischen x und x_i

$$\begin{aligned} |g(x) - g(x_i)| &= |g'(\xi)| \cdot |x - x_i| \\ &= \Big|\cos(\xi) - \frac{1}{x_i - x_{i-1}}(\sin(x_i) - \sin(x_{i-1})\Big)\Big| \cdot |x - x_i|. \end{aligned}$$

Ferner gibt es, ebenfalls nach dem Mittelwertsatz ein $\eta \in [x_{i-1}, x_i]$ mit

$$\sin(x_i) - \sin(x_{i-1}) = \cos(\eta)(x_i - x_{i-1}),$$

und daher können wir den Fehler schreiben als

$$|g(x) - g(x_i)| = |\cos(\xi) - \cos(\eta)| \cdot |x - x_i|.$$

Schließlich gibt es, erneut nach dem Mittelwertsatz, ein ζ zwischen ξ und η mit

$$\cos(\xi) - \cos(\eta) = -\sin(\zeta)(\xi - \eta),$$

und hiermit erhalten wir

$$|g(x) - g(x_i)| = |\sin(\zeta)| \cdot |\xi - \eta| \cdot |x - x_i| \le 1 \cdot |x_i - x_{i-1}| \cdot |x - x_i|.$$

Genauso erhält man die Abschätzung

$$|g(x) - g(x_{i-1})| \le |x_i - x_{i-1}| \cdot |x - x_{i-1}|.$$

Zusammengenommen hat man also

$$|g(x) - g(x_{i-1})| \le |x_i - x_{i-1}| \cdot \min\{|x - x_{i-1}|, |x - x_i|\},$$

und wegen (vgl. (14.2))

$$x_i - x_{i-1} = \frac{1}{n} \quad \text{und} \quad \min\{|x - x_{i-1}|, |x - x_i|\} \le \frac{1}{2n}$$

folgt

$$|g(x) - g(x_{i-1})| \le \frac{1}{2n^2}.$$

Damit ist die Genauigkeitsanforderung erfüllt, falls

$$\frac{1}{2n^2} \le 10^{-3}, \quad \text{d.h. } n \ge \sqrt{500}$$

gilt. Wir könne also $n = 23$ wählen. □

Aufgabe 14.5 *Zeigen Sie, dass gilt*

$$\begin{aligned} nx^{n-1}(y-x) \le y^n - x^n \le ny^{n-1}(y-x) \qquad & \textit{für } 0 < x < y,\ n \in \mathbb{N}, \\ (x-y)\cos x \le \sin x - \sin y \le (x-y)\cos y \qquad & \textit{für } x, y \in [0, \pi/2]. \end{aligned}$$

Lsung von Aufgabe 14.5

Beide Aussagen folgen aus dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung.

Es sei $f(x) := x^n$. Dann gibt es nach dem Mittelwertsatz ein $\xi \in (x, y)$ mit

$$f'(\xi) = n\xi^{n-1} = \frac{y^n - x^n}{y - x},$$

und da f' monoton wachsend in $\mathbb{R}^+$ ist, folgt

$$f'(x) = nx^{n-1} \le \frac{y^n - x^n}{y - x} \le ny^{n-1}.$$

Für $x = y$ ist die Aussage trivial. Wir betrachten daher nur den Fall $x \ne y$. Für $g(x) := \sin x$ existiert nach dem Mittelwertsatz ein ξ zwischen x und y mit

$$g'(\xi)(x-y) = (x-y)\cos\xi = g(x) - g(y) = \sin x - \sin y.$$

Da cos monoton fallend im Intervall $[0, \pi/2]$ ist, erhält man für $0 \le y < x \le \pi/2$

$$(x-y)\cos x \le \sin x - \sin y \le (x-y)\cos y.$$

Die Ungleichung erhält man auch im Fall $0 \le y < x \le \pi/2$, da dann $x - y < 0$ ist.
□

Aufgabe 14.6 *a) Zeigen Sie: Ist zu* $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *eine differenzierbare Funktion* $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *bekannt mit*

$$A'(x) = a(x) \quad \textit{für alle } x \in \mathbb{R},$$

so besitzt jede differenzierbare Funktion $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*, die die Differentialgleichung*

$$y'(x) = a(x)y(x)\ , \quad x \in \mathbb{R}, \tag{14.3}$$

erfüllt, mit einer Konstante $c \in \mathbb{R}$ *die Gestalt*

$$y(x) = c \cdot \exp(A(x))\ , \quad x \in \mathbb{R}.$$

b) Bestimmen Sie die Lösung der Anfangswertaufgabe

$$y'(x) = \frac{1}{1+x^2}y(x)\ , \quad y(0) = 1.$$

Lsung von Aufgabe 14.6

a): Es sei $y(x)$ eine beliebige Lösung der Differentialgleichung (14.3). Wie im Beweis von Korollar 15.6 setzen wir

$$h(x) := y(x) \cdot \exp(-A(x)).$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} h'(x) &= y'(x)\exp(-A(x)) + y(x) \cdot \exp(-A(x)) \cdot (-(A'(x))) \\ &= a(x)y(x)\exp(-A(x)) - a(x)y(x)\exp(-A(x)) = 0\ , \end{aligned}$$

und daher ist h konstant. Es gibt also ein $c \in \mathbb{R}$ mit $h(x) = c$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Hieraus folgt

$$y(x) = c\exp(A(x))\ , \quad x \in \mathbb{R}.$$

b): Mit $a(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ und $A(x) = \arctan x$ sind die Voraussetzungen von Teil a) erfüllt. Daher gilt

$$y(x) = c \cdot \exp(\arctan x)$$

und die Anfangsbedingung $y(0) = 1$ liefert $c = 1$, d.h.

$$y(x) = \exp(\arctan x)\ .$$

□

Aufgabe 14.7 *Es seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig auf $[a, b]$ und differenzierbar auf (a, b). Zeigen Sie:*

a) Existieren $C \geq 0$ und $\alpha > 1$ mit

$$|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|^\alpha \quad \text{für alle } x, y \in [a, b], \tag{14.4}$$

so ist f konstant auf $[a, b]$.

b) Gilt $f(a) = g(a)$ und $0 \leq f'(x) < g'(x)$ für alle $x \in (a, b)$, so ist $f(x) < g(x)$ für alle $x \in (a, b]$.

Lsung von Aufgabe 14.7
a): Für $x \neq y$ folgt aus (14.4)

$$\Big|\frac{f(x) - f(y)}{x - y}\Big| \leq C \cdot |x - y|^{\alpha - 1},$$

und wegen $\alpha - 1 > 0$ erhält man hieraus

$$f'(x) = 0 \quad \text{für alle } x \in (a, b).$$

Die Behauptung folgt damit aus Korollar 15.4.

b): Für jedes feste $\tilde{x} \in (a, b]$ sind die Voraussetzungen des verallgemeinerten Mittelwertsatzes für die Funktionen f und g in dem Intervall $[a, \tilde{x}]$ erfüllt. Daher gilt $g(\tilde{x}) \neq g(a)$, und es gibt ein $\xi = \xi(\tilde{x})$ mit

$$\frac{f(\tilde{x}) - f(a)}{g(\tilde{x}) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} < 1.$$

Hieraus folgt

$$f(\tilde{x}) - f(a) < g(\tilde{x}) - g(a), \quad \text{d.h. } f(\tilde{x}) < g(\tilde{x}).$$

□

Aufgabe 14.8 *Sie wollen mit einem Algorithmus A die Nullstelle einer Funktion $f \in C^1(\mathbb{R})$ bestimmen. A bricht ab, sobald ein x-Wert $\tilde{x}$ gefunden wurde, für den $|f(\tilde{x})| \leq Tol_f$ ist. Dabei ist Tol_f eine dem Algorithmus vorgebbare Toleranz.*

Es sei Ihnen jetzt bekannt, das $|f'(x)| \geq 0.1$ für alle reellen x ist. Welchen Wert für Tol_f müssen Sie A vorgeben, damit eine von A gelieferte approximative Nullstelle einen x-Fehler von höchstens 10^{-5} hat?

Lsung von Aufgabe 14.8

Der Ordnung halber überlegen wir uns zunächst einmal, dass f unter den angegebenen Voraussetzungen (genau) eine reelle Nullstelle besitzt:

Aus der Bedingung $|f'(x)| \geq 0.1$ und der vorausgesetzten Stetigkeit von f' schließen wir, dass $f'(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ ein gleichbleibendes Vorzeichen hat. Sei $s \in \{-1, 1\}$ dieses Vorzeichen, mit dem dann gilt

$$s \cdot f'(x) = |f'(x)| \geq 0.1 \quad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{14.5}$$

Wegen der Vorzeichenkonstanz ist f streng monoton, so dass f (wenn überhaupt) sicher nur eine Nullstelle besitzt.

Sei nun $\hat{x}$ irgendein Wert in $\mathbb{R}$ mit $f(\hat{x}) \neq 0$ (davon gibt es — wie wir uns gerade überlegt haben — in $\mathbb{R}$ reichlich Punkte). Dann finden wir für den Punkt

$$y := \hat{x} - 20 \cdot s \cdot f(\hat{x})$$

mit dem Mittelwertsatz die Existenz eines ζ zwischen $\hat{x}$ und y, so dass

$$\begin{aligned} f(y) &= f(\hat{x} - 20 \cdot s \cdot f(\hat{x})) \\ &= f(\hat{x}) + f'(\zeta)\,(\hat{x} - 20 \cdot s \cdot f(\hat{x}) - \hat{x}) \\ &= f(\hat{x}) - 20 \cdot s \cdot f'(\zeta) \cdot f(\hat{x}) \\ &= f(\hat{x}) \cdot (1 - 20 \cdot |f'(\zeta)|). \end{aligned}$$

Da $|f'(\zeta)| \geq 0.1$ ist, erfüllt der Koeffizient $(1 - 20 \cdot |f'(\zeta)|)$ von $f(\hat{x})$ die Ungleichung

$$(1 - 20 \cdot |f'(\zeta)|) \leq -1,$$

ist damit auf jeden Fall negativ.

Mithin wechselt f zwischen $\hat{x}$ und y das Vorzeichen, besitzt wegen seiner Stetigkeit dort also eine Nullstelle $\bar{x}$.

Nachdem wir nun die Existenz einer (eindeutigen) Nullstelle nachgewiesen haben, können wir die eigentliche Frage der Aufgabe beantworten:

$\mathrm{Tol}_f = 10^{-6}$ reicht aus.

Es ist dann nämlich

$$10^{-6} = \mathrm{Tol}_f \geq |f(\tilde{x})| = |f(\tilde{x}) - f(\bar{x})| = |f'(\mu)| \cdot |\tilde{x} - \bar{x}|$$

für ein μ zwischen $\bar{x}$ und $\tilde{x}$.

Indem wir $|f'(\mu)| \geq 0.1$ ausnutzen, ergibt dies

$$10^{-6} \geq 0.1 \cdot |\bar{x} - \tilde{x}|.$$

Multiplikation mit 10 ergibt nun die gewünschte Ungleichung

$$|\bar{x} - \tilde{x}| \leq 10^{-5}.$$

□

14.2 Regeln von de l'Hospital

Aufgabe 14.9 *Prüfen Sie, ob die folgenden Grenzwerte existieren, und berechnen Sie sie gegebenenfalls.*

a) :	$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+\sin x} - \cos x}{\arcsin x}$	b) :	$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln(10+3e^{2x})}{\sqrt{1+9x^2}}$
c) :	$\lim\limits_{x\to 0+0} ((\ln x)\cdot(\ln(1-x)))$	d) :	$\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-4x+3}{x^2-4}$
e) :	$\lim\limits_{x\to\infty} x \sin\frac{1}{x}$	f) :	$\lim\limits_{x\to\infty} \Big(x\cdot \ln\frac{x-1}{x+1}\Big)$
g) :	$\lim\limits_{x\to 1} x^{x-1}$	h) :	$\lim\limits_{x\to\infty} \Big((1+x)^\alpha - x^\alpha\Big).$

Lsung von Aufgabe 14.9
a): Es gilt $f(0) = g(0) = 0$ für $f(x) := \sqrt{1+\sin x} - \cos x$ und $g(x) := \arcsin x$. Es sind f und g in einer Umgebung von $x_0 := 0$ differenzierbar, und es gilt $g'(x) \neq 0$ für $x \in (-\pi/2, \pi/2) \setminus \{0\}$. Damit sind die allgemeinen Voraussetzungen von Satz 15.9 erfüllt.

Es gilt

$$f'(x) = \frac{\cos x}{2\sqrt{1+\sin x}} + \sin x \quad \text{und} \quad g'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Hiermit erhält man

$$\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0} \Big(\frac{\cos x}{2\sqrt{1+\sin x}} + \sin x\Big) \cdot \sqrt{1-x^2} = \frac{1}{2}.$$

Der Grenzwert

$$\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

existiert also, und daher existiert nach der Regel von de l'Hospital auch der gesuchte Grenzwert, und beide stimmen überein, d.h.

$$\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{1}{2}.$$

Die folgenden Aufgabenteile werden wir nicht mehr so ausführlich bearbeiten. Wir werden die generellen Voraussetzungen der de l'Hospitalschen Regeln nicht mehr überprüfen (sie sind in allen Fällen erfüllt, in den eine Regel von de l'Hospital anwandt wird), und wir werden nicht mehr betonen, wie die Gleichung

$$\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

zu verstehen ist, dass nämlich aus der Existenz des Grenzwertes auf der rechten Seite die Existenz des Grenzwertes auf der linken Seite und die Gleichheit der beiden Grenzwerte folgt.

b):

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(10+3e^{2x})}{\sqrt{1+9x^2}} &= \lim_{x\to\infty}\frac{(6e^{2x})/(10+3e^{2x})}{(18x)/(2\sqrt{1+9x^2})}\\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{6/(10e^{-2x}+3)}{9/(\sqrt{1/x^2+9})} = \frac{2}{3}.\end{aligned}$$

c): Diese Aufgabe kann leicht in ein Problem umgeschrieben werden, auf das Satz 15.9 angewandt werden kann:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0+0}((\ln x)\cdot(\ln(1-x))) &= \lim_{x\to 0+0}\frac{\ln(1-x)}{1/\ln x} = \lim_{x\to 0+0}\frac{-1/(1-x)}{1/(x(\ln x)^2)}\\ &= \lim_{x\to 0+0}\frac{x(\ln x)^2}{1-x} = \left(\lim_{x\to 0+0} x^{1/2}\ln x\right)^2 = 0\ .\end{aligned}$$

d):

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4x+3}{x^2-4}$$

existiert nicht, denn $x = 2$ ist eine Nullstelle des Nenners aber nicht des Zählers. Es existieren nur die uneigentlichen einseitigen Grenzwerte

$$\lim_{x\to 2-0}\frac{x^2-4x+3}{x^2-4} = \infty \quad \text{und} \quad \lim_{x\to 2+0}\frac{x^2-4x+3}{x^2-4} = -\infty.$$

e): Mit der Transformation $y := 1/x$ erhält man die Situation, die durch Satz 15.9 erfasst wird:

$$\lim_{x\to\infty} x\sin\frac{1}{x} = \lim_{y\to 0+0}\frac{\sin y}{y} = \lim_{y\to 0+0}\frac{\cos y}{1} = 1.$$

f):

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\left(x\cdot\ln\frac{x-1}{x+1}\right) &= \lim_{x\to\infty}\frac{\ln\frac{x-1}{x+1}}{1/x} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x+1}{x-1}\cdot\frac{2}{(x+1)^2}}{-1/x^2}\\ &= -\lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{x-1}\cdot\frac{2}{1+1/x^2} = -2.\end{aligned}$$

g): Wegen der Stetigkeit der Exponentialfunktion gilt

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 1} x^{1/(x-1)} &= \lim_{x\to 1} \exp\Big(\frac{1}{x-1}\ln x\Big) = \exp\Big(\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1}\Big) \\ &= \exp\Big(\lim_{x\to 1}\frac{1/x}{1}\Big) = 2. \end{aligned}$$

h): Für $\alpha = 1$ gilt

$$\lim_{x\to\infty}\Big((1+x)^\alpha - x^\alpha\Big) = 1.$$

Für $\alpha \neq 1$ verwenden wir die Variablentransformation $y = 1/x$. Hiermit gilt

$$\begin{aligned} &\lim_{x\to\infty}\Big((1+x)^\alpha - x^\alpha\Big) = \lim_{y\to 0+0}\Big((1+\frac{1}{y})^\alpha - \frac{1}{y^\alpha}\Big) = \lim_{y\to 0+0}\frac{(1+y)^\alpha - 1}{y^\alpha} \\ &= \lim_{y\to 0+0}\frac{\alpha(1+y)^{\alpha-1}}{\alpha y^{\alpha-1}} = \lim_{y\to 0+0}\frac{(1+y)^{\alpha-1}}{y^{\alpha-1}} = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad \alpha < 1 \\ \infty & \text{für} \quad \alpha > 1 \end{cases} \end{aligned}$$

□

Aufgabe 14.10 *Es sei $a_n > 0$. Bestimmen Sie den Grenzwert*

$$\lim_{x\to\infty}\Big(\sqrt[n]{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0} - x\Big).$$

Lsung von Aufgabe 14.10

Mit der Variablentransformation $y := 1/x$ gilt zunächst

$$\begin{aligned} &\lim_{x\to\infty}\Big(\sqrt[n]{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0} - x\Big) \\ &= \lim_{y\to 0+0}\Big(\sqrt[n]{a_n y^{-n} + a_{n-1}y^{1-n} + \ldots + a_1 y^{-1} + a_0} - \frac{1}{y}\Big) \\ &= \lim_{y\to 0+0}\Big(\frac{\sqrt[n]{a_n + a_{n-1}y + \ldots + a_1 y^{n-1} + a_0 y^n} - 1}{y}\Big). \end{aligned}$$

Für $a_n \neq 1$ konvergiert der Zähler für $y \to 0$ gegen einen von 0 verschiedenen Wert und der Nenner gegen 0. Daher divergiert in diesem Fall der Ausdruck bestimmt, und zwar für $a_n > 1$ gegen ∞ und für $0 < a_n < 1$ gegen $-\infty$.

Für $a_n = 1$ erhält man aus der de l'Hospitalschen Regel

$$\begin{aligned} &\lim_{x\to\infty}\Big(\sqrt[n]{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0} - x\Big) \\ &= \lim_{y\to 0+0}\frac{1}{n}\Big(\sum_{j=0}^{n} a_{n-j}y^j\Big)^{(n-1)/n} \cdot \Big(a_{n-1} + 2a_{n-2}y + \ldots + y a_0 y^{n-1}\Big) = \frac{a_{n-1}}{n}. \end{aligned}$$

□

Aufgabe 14.11 *Bestimmen Sie den Grenzwert*

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}.$$

Lsung von Aufgabe 14.11

Es gilt

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\left(x\sin\frac{1}{x}\right)\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}.$$

Wegen der Beschränktheit der Sinusfunktion konvergiert der erste Grenzwert der rechten Seite gegen 0 und der zweite ist nach der Regel von de l'Hospital 1. Daher gilt

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}=0.$$

Dieses Beispiel verdeutlicht noch einmal die Aussage des Satzes 15.9.: Der Grenzwert

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}$$

existiert, aber der Quotient der Ableitungen

$$\frac{2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}}{\cos x}$$

besitzt keinen Grenzwert für $x\to 0$.

Das Beispiel zeigt, dass im Falle $f(0)=g(0)=0$ die Existenz von

$$\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

hinreichend für die Existenz von

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}$$

ist, nicht aber notwendig. Mehr wurde in Satz 15.9 auch nicht behauptet. □

Aufgabe 14.12 *Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte:*

a) : $\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 x-1}{\sinh^2 x}$, b) : $\lim_{x\to 0}(\cos x)^{1/x^2}$,

c) : $\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2-x^2}{(\cos x-1)^2}$, d) : $\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{2+x^2}}{x}$

Lsung von Aufgabe 14.12

a): Für $f(x):=\cos^2 x-1$ und $g(x):=\sinh^2 x$ gilt

$$f'(x)=-2\cos x\sin x=-\sin(2x)\quad\text{und}\quad g'(x)=2\sinh x\cosh x=\sinh(2x).$$

Es ist also $\lim_{x\to 0} f'(x) = f'(0) = 0$ und $\lim_{x\to 0} g'(x) = g'(0) = 0$, und daher ist die Regel von de l'Hospital nicht (sofort) anwendbar.

Die Funktionen $F(x) := \sin(2x)$ und $G(x) := \sinh(2x)$ erfüllen jedoch in einer Umgebung von $x = 0$ die Voraussetzungen von Satz 15.??. Es gilt

$$\lim_{x\to 0} \frac{F'(x)}{G'(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{-2\cos(2x)}{2\cosh(2x)} = -1,$$

und nach der Regel von de l'Hospital besitzt $F(x)/G(x)$ für $x \to 0$ einen Grenzwert, und es gilt

$$\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{F(x)}{G(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{F'(x)}{G'(x)} = 1.$$

Wenden wir die Regel von de l'Hospital erneut an, so erhalten wir die Existenz des Grenzwertes von $f(x)/g(x)$ für $x \to 0$ und

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = 1.$$

Man kann also die Regel von de l'Hospital mehrfach anwenden. Stößt man dabei nach einigen Schritten auf einen (eigentlichen oder uneigentlichen) Grenzwert, so existiert auch der Grenzwert des Ausgangsproblems, und beide stimmen überein. Stellt man fest, dass nach einigen Schritten der Grenzwert nicht existiert, so kann man nichts über die Existenz und den Wert des Grenzwerts in den vorhergehenden Schritten aussagen (vgl. Aufgabe 14.11).

b): Wir nutzen die Stetigkeit der Exponentialfunktion aus und erhalten durch zweimalige Anwendung der Regel von de l'Hospital

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} (\cos x)^{1/x^2} &= \lim_{x\to 0} \exp\Big(\frac{\ln\cos x}{x^2}\Big) = \exp\Big(\lim_{x\to 0} \frac{\ln\cos x}{x^2}\Big) \\
&= \exp\Big(\lim_{x\to 0} \frac{-\sin x/\cos x}{2x}\Big) = \exp\Big(\lim_{x\to 0} \frac{-1/\cos^2 x}{2}\Big) = \frac{1}{\sqrt{e}}.
\end{aligned}$$

c): Durch viermalige Anwendung der de l'Hospitalschen Regel folgt

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2 - x^2}{(\cos x - 1)^2} &= \lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{-2(\cos x - 1)\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{-\sin(2x) + 2\sin x} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{-2\cos(2x) + 2\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{4\sin(2x) - 2\sin x} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x}}{8\cos(2x) - 2\cos x} = \frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

d): Die (blinde) wiederholte Anwendung der de l'Hospitalschen Regel führt auf

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{2+x^2}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{\sqrt{2+x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{2+x^2}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{\sqrt{2+x^2}} = \ldots$$

Auf direktem Wege erhält man

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{2+x^2}}{x} = \lim_{x\to\infty} \sqrt{\frac{2+x^2}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \sqrt{\frac{2}{x^2}+1} = 1.$$

□

Aufgabe 14.13 *Was ist falsch an der folgenden Berechnung des Grenzwertes*

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1} \frac{x^4-4x^3+8x^2-8x+3}{(x-1)^4} &= \lim_{x\to 1} \frac{4x^3-12x^2+16x-8}{4(x-1)^3} \\ = \lim_{x\to 1} \frac{12x^2-24x+16}{12(x-1)^2} &= \lim_{x\to 1} \frac{24x-24}{24(x-1)} = \lim_{x\to 1} \frac{24}{24} = 1\end{aligned}$$

nach der Regel von de l'Hospital?

Lsung von Aufgabe 14.13

Nach zwei Schritten ist der Zähler an der Stelle $x = 1$ von Null verschieden und die Regel von de l'Hospital nicht mehr anwendbar. Tatsächlich gilt

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1} \frac{x^4-4x^3+8x^2-8x+3}{(x-1)^4} &= \lim_{x\to 1} \frac{4x^3-12x^2+16x-8}{4(x-1)^3} \\ = \lim_{x\to 1} \frac{12x^2-24x+16}{12(x-1)^2} &= \lim_{x\to 1} \frac{12(x-1)^2+4}{12(x-1)^2} = \infty.\end{aligned}$$

□

Aufgabe 14.14 *Bestimmen Sie die Grenzwerte*

$$\text{a) : } \quad \lim_{x\to 0} \frac{\cos x \sinh x}{(3+\sqrt{1+x^2})\ln(1-x)}, \qquad \text{b) : } \quad \lim_{x\to\infty} \frac{(3x+2\ln x)\arctan x}{4x-\ln x}$$

Lsung von Aufgabe 14.14

a): Die Voraussetzungen von Satz.?? sind erfüllt, und man kann den Grenzwert mit Hilfe der de l'Hospitalschen Regel bestimmen. Die Ableitungen des Zählers und (nochmehr) des Nenners werden sehr kompliziert werden, und es lohnt sich daher sich den Ausdruck genauer anzusehen. Der Faktor

$$g(x) := \frac{\cos x}{1+\sqrt{3+x^2}}$$

ist in $x = 0$ stetig, und es gilt $g(0) = 1/3 \neq 0$. Er hat also sicher keinen Einflußauf die Existenz des gesuchten Grenzwerts. Es gilt

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{\cos x \sinh x}{(3+\sqrt{1+x^2})\ln(1-x)} &= \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1+\sqrt{3+x^2}} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\sinh x}{\ln(1-x)} \\ &= \frac{1}{3} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\cosh x}{-1/(1-x)} = -\frac{1}{3}.\end{aligned}$$

b): Es ist

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\frac{(3x+2\ln x)\arctan x}{4x-\ln x} &= \lim_{x\to\infty}\arctan x\cdot\lim_{x\to\infty}\frac{3x+2\ln x}{4x-\ln x}\\ &= \frac{\pi}{2}\lim_{x\to\infty}\frac{3+2/x}{4-1/x} = \frac{3\pi}{8}.\end{aligned}$$

□

Aufgabe 14.15 *Wir betrachten den freien Fall eines Körpers der Masse m in einem zähen Medium. Nimmt man an, dass der Reibungswiderstand proportional dem Quadrat der Geschwindigkeit ist, so ist die Fallstrecke s nach t Zeiteinheiten*

$$s_k = \frac{m}{k}\ln\Big(\cosh\sqrt{\frac{kg}{m}}\cdot t\Big).$$

Dabei bezeichnet k die Proportionalitätskonstante aus dem Reibungswiderstand und g die Erdbeschleunigung.

Bestimmen Sie den Grenzwert

$$\lim_{k\to 0} s_k.$$

Lsung von Aufgabe 14.15

Durch zweimalige Anwendung der de l'Hospitalschen Regel erhält man mit der Abkürzung $\gamma := \sqrt{g/m}\cdot t$

$$\begin{aligned}\lim_{k\to 0}s_k &= \lim_{k\to 0}\frac{m}{k}\ln\big(\cosh(\gamma\sqrt{k})\big) = \frac{m\gamma}{2}\lim_{k\to 0}\frac{\sin(\gamma\sqrt{k})}{\sqrt{k}\cosh(\gamma\sqrt{k})}\\ &= \frac{m\gamma}{2}\lim_{k\to 0}\frac{\tanh(\gamma\sqrt{k})}{\sqrt{k}} = \frac{m\gamma^2}{2}\lim_{k\to 0}\frac{1}{\cosh^2(\gamma\sqrt{k})} = \frac{m\gamma^2}{2} = \frac{gt^2}{2},\end{aligned}$$

und dies ist die Fallstrecke beim freien Fall ohne Reibung.

Die Rechnung wird etwas einfacher, wenn man $\kappa := \gamma\sqrt{k}$ setzt. Dann geht κ genau dann gegen 0, wenn k gegen 0 geht, und daher gilt

$$\begin{aligned}\lim_{k\to 0}s_k &= \lim_{\kappa\to 0}\frac{m\gamma^2}{\kappa^2}\ln\big(\cosh(\kappa)\big) = gt^2\lim_{\kappa\to 0}\frac{\sinh\kappa}{2\kappa\cosh\kappa}\\ &= \frac{gt^2}{2}\lim_{\kappa\to 0}\frac{\tanh\kappa}{\kappa} = \frac{gt^2}{2}\lim_{\kappa\to 0}\frac{1}{\cosh^2\kappa} = \frac{gt^2}{2}.\end{aligned}$$

□

Aufgabe 14.16 *Es seien*

$$f(x) := x+\sin x\cos x \quad \textit{und} \quad g(x) = \exp(\sin x)\cdot f(x).$$

Zeigen Sie, dass gilt:

a) $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty, \quad \lim_{x\to\infty} g(x) = \infty,$

b) $\lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = 0,$

c) $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ *existiert nicht.*

Ist dies kein Gegenbeispiel zur de l'Hospitalschen Regel?

Lsung von Aufgabe 14.16

a): Dass f über alle Grenzen wächst, ist klar, und wegen $\exp(\sin x) \in [1/e, e]$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt dies auch für g.

b): Es gilt $f'(x) = 1 + \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x$, und daher

$$\begin{aligned} \frac{f'(x)}{g'(x)} &= \frac{2\cos^2 x}{\exp(\sin x)\cdot(\cos x(x + \sin x\cos x) + 2\cos^2 x)} \\ &= \frac{2\cos x}{\exp(\sin x)\cdot(x + \sin x\cos x + 2\cos x)}, \end{aligned}$$

und da $x \mapsto 2\cos x/\exp(\sin x)$ beschränkt ist, folgt

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = 0.$$

c): Dass

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\exp(\sin x)}$$

nicht existiert, ist offensichtlich.

Die Funktionen f und g erfüllen nicht die Voraussetzungen des Satzes 15.??, denn für $x_k := (2k-1)\pi/2$ gilt $x_k \to \infty$ und

$$g'(x_k) = \exp(x_k)(x_k + \sin x_k \cos x_k + 2\cos x_k)\cdot\cos x_k = 0 \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}.$$

Es gibt also keine Umgebung von ∞, auf der g' von Null verschieden ist. □

14.3 Der Satz von Taylor

Aufgabe 14.17 *a) Es sei $f \in C^3[a,b]$ mit $f(a) = f(b) = f'(a) = f'(b) = 0$. Zeigen Sie, dass es ein $\xi \in (a,b)$ gibt mit $f'''(\xi) = 0$.*

b) Gilt die Aussage auch dann, wenn man nur $f \in C^3[a,b]$ und $f(a) = f(b) = f'(a) = f'(b)$ voraussetzt ?

Lsung von Aufgabe 14.17
a): Nach dem Satz von Rolle gibt es ein $c \in (a,b)$ mit $f'(c) = 0$.

Wendet man den Satz von Rolle auf die Funktion f' in den Intervallen $[a,c]$ und $[c,b]$ an, so erhält man die Existenz von $d \in (a,c)$ mit $f''(d) = 0$ und von $e \in (c,b)$ mit $f''(e) = 0$.

Erneute Anwendung des Satzes von Rolle auf die Funktion f'' im Intervall $[d,e]$ liefert die Existenz eines $\xi \in (d,e) \subset (a,b)$ mit $f'''(\xi) = 0$.

b): Ohne die Voraussetzung $f(a) = 0$ gilt die Aussage nicht, denn

$$f(x) = 1 + x - 3x^2 + 2x^3$$

erfüllt $f(0) = f'(0) = f(1) = f'(1) = 1$ und $f'''(x) \equiv 12$. □

Aufgabe 14.18 *Es sei*

$$f(x) := \begin{cases} -x^2 & , \quad x \le 0 \\ 2 - x & , \quad x \ge 1 \ . \end{cases}$$

Bestimmen Sie ein Polynom $p \in \Pi_5$, so dass die zusammengesetzte Funktion

$$g(x) := \begin{cases} f(x) & , \quad x \notin (0,1) \\ p(x) & , \quad x \in (0,1) \end{cases}$$

zweimal stetig differenzierbar ist.

Lsung von Aufgabe 14.18
Es sei

$$p(x) := \sum_{j=0}^{5} a_j x^j \ .$$

Dann ist g im Punkt 0 genau dann zweimal stetig differenzierbar, wenn $f(0) = 0 = p(0+0) = a_0$, $f'(0) = 0 = p'(0+0) = a_1$ und $f''(0) = -2 = p''(0+0) = 2a_2$ gilt.

p hat daher die Gestalt

$$p(x) = -x^2 + \sum_{j=3}^{5} a_j x^j .$$

Die Forderung, dass g in 1 zweimal stetig differenzierbar ist, besagt

$$\begin{array}{rcrcrcl} f(1) & = & 1 & = & -1 + a_3 + a_4 + a_5 & = & p(1-0), \\ f'(1) & = & -1 & = & -2 + 3a_3 + 4a_4 + 5a_5 & = & p'(1-0), \\ f''(1) & = & 0 & = & -2 + 6a_3 + 12a_4 + 20a_5 & = & p''(1-0). \end{array}$$

Dies ist ein lineares Gleichungssystem in a_3, a_4 und a_5 mit der Lösung $a_3 = 17$, $a_4 = -25$ und $a_5 = 10$. Daher gilt

$$p(x) = -x^2 + 17x^3 - 25x^4 + 10x^5 .$$

$\square$

Aufgabe 14.19 *a) Zeigen Sie die Leibnizsche Regel: Sind $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ in einer Umgebung von x_0 n mal differenzierbar, so gilt*

$$(f \cdot g)^{(n)}(x_0) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x_0) g^{(n-k)}(x_0) \ ,$$

wobei $f^{(0)}(x) := f(x)$ und $g^{(0)}(x) := g(x)$ gesetzt ist.

b) Berechnen Sie für

$$h(x) := x^5 \cdot \ln \frac{7+x^2}{1+x}$$

die Ableitung $h^{(5)}(0)$.

Lsung von Aufgabe 14.19

a): Für $n = 1$ die Leibnizsche Regel gerade die Produktregel. Ist sie schon für ein $n \in \mathbb{N}$ bewiesen, so folgt

$$\begin{aligned} (f \cdot g)^{(n+1)}(x_0) &= \frac{d}{dx}\left((f \cdot g)^{(n)} \right)(x_0) \\ &= \frac{d}{dx} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x_0) g^{(n-k)}(x_0) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k+1)}(x_0) g^{(n-k)}(x_0) + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x_0) g^{(n+1-k)}(x_0) \\ &= f^{(n+1)}(x_0) g(x_0) + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} f^{(k+1)}(x_0) g^{(n-k)}(x_0) \\ &\quad + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x_0) g^{(n+1-k)}(x_0) + f(x_0) g^{(n+1)}(x_0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= f^{(n+1)}(x_0)g(x_0) + \sum_{k=1}^{n} \tbinom{n}{k-1} f^{(k)}(x_0)g^{(n+1-k)}(x_0) \\
&\quad + \sum_{k=1}^{n} \tbinom{n}{k} f^{(k)}(x_0)g^{(n+1-k)}(x_0) + f(x_0)g^{(n+1)}(x_0) \\
&= f^{(n+1)}(x_0)g(x_0) + \sum_{k=1}^{n} \left(\tbinom{n}{k-1} + \tbinom{n}{k}\right) f^{(k)}(x_0)g^{(n+1-k)}(x_0) + f(x_0)g^{(n+1)}(x_0) \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \tbinom{n+1}{k} f^{(k)}(x_0)g^{(n+1-k)}(x_0) \ .
\end{aligned}$$

b): Mit

$$f(x) := x^5 \quad \text{und} \quad g(x) := \ln \frac{7+x^2}{1+x}$$

gilt $h(x) = f(x) \cdot g(x)$.

Wegen $f^{(j)}(0) = 0$ für $j = 0, 1, 2, 3, 4$ und $f^{(5)}(0) = 5!$ folgt aus der Leibnizschen Regel

$$h^{(5)}(0) = f^{(5)}(0) \cdot g(0) = 5! \ln 7 \ .$$

□

Aufgabe 14.20 *Von einer Funktion $f \in C^2[-1,1]$ ist bekannt, dass ihre zweite Ableitung auf $[-1,1]$ den Wert 1 im Betrag nicht übersteigt. Ludger Luschig will in einem Versuch die Werte $f(-1) = 1$, $f(1) = 1$ und $f(0) = 0$ gemessen haben. Weisen Sie ihm nach, dass er geschummelt oder unsauber gearbeitet haben muss.*

Lsung von Aufgabe 14.20

Nach dem Taylorschen Satz gilt

$$\begin{aligned}
f(-1) &= f(0) - f'(0) + \frac{1}{2}f''(\zeta_1), \quad \text{für ein } \zeta_1 \in (-1,0) \\
f(1) &= f(0) + f'(0) + \frac{1}{2}f''(\zeta_2), \quad \text{für ein } \zeta_2 \in (0,1).
\end{aligned}$$

Addition dieser beiden Gleichungen ergibt unter Ausnutzung der Daten $f(0) = 0$ und $f(-1) = 1$ und $f(1) = 1$

$$2 = \frac{f''(\zeta_1) + f''(\zeta_2)}{2}.$$

Die Voraussetzung an $f''(x)$ führt damit aber zu dem Widerspruch

$$2 \le \frac{|f''(\zeta_1)| + |f''(\zeta_2)|}{2} \le \frac{1+1}{2} = 1.$$

Man kann den Nachweis auch mit Hilfe des Mittelwertsatzes führen: Danach gibts es nämlich einen Punkt $\xi_1 \in (-1,0)$ und einen Punkt $\xi_2 \in (0,1)$, so dass

$$f'(\xi_1) = -1 \quad \text{und} \quad f'(\xi_2) = 1.$$

Eine zweite Anwendung des Mittelwertsatzes zeigt, dass es in (ξ_1, ξ_2) einen Punkt η gibt, mit dem

$$2 = f'(\xi_2) - f'(\xi_1) = f''(\eta)(\xi_2 - \xi_1)$$

ist. Die Information über die zweite Ableitung und die Tatsache, dass $|\xi_2 - \xi_1| < 2$ ist, liefern nun ebenfalls einen Widerspruch:

$$2 \le 1 \cdot |\zeta_2 - \zeta_1| < 2.$$

□

Aufgabe 14.21 *Bestimmen Sie mit Hilfe des Taylorschen Satzes*

$$y = \arcsin_0 0.1$$

mit einem absoluten Fehler, der kleiner oder gleich 10^{-5} *ist.*

Lsung von Aufgabe 14.21

Die Taylorreihe von $f(x) := \arcsin_0 x$ wurde in der Vorlesung mit Hilfe der binomischen Reihe bestimmt:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} \binom{-1/2}{k} x^{2k+1} .$$

Um den Fehler abzuschätzen benötigen wir die Ableitungen von f. Es gilt

$$\begin{array}{lcl@{\qquad}lcl}
f(x) & = & \arcsin_0 x & f(0) & = & 0 \\
f'(x) & = & (1-x^2)^{-1/2} & f'(0) & = & 1 \\
f''(x) & = & x(1-x^2)^{-3/2} & f''(0) & = & 0 \\
f'''(x) & = & (1-x^2)^{-3/2} + 3x^2(1-x^2)^{-5/2} & f'''(0) & = & 1 \\
f^{(4)}(x) & = & 3x\left(3\left(1-x^2\right)^{-5/2} + 5x^2\left(1-x^2\right)^{-7/2}\right) . & & &
\end{array}$$

Wir hoffen, dass wir mit dem Taylorpolynom vom Grade 4 die gewünschte Genauigkeit erreichen und schätzen den Fehler ab.

Es gilt für alle $x \in (0,1)$ mit einem $\xi(x) \in (0,x)$

$$\arcsin_0 x = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3\xi\left(3\left(1-\xi^2\right)^{-5/2} + 5\xi^2\left(1-\xi^2\right)^{-7/2}\right)}{4!} x^4 .$$

Die Funktion

$$g(\xi) := 3\xi\left(3\left(1-\xi^2\right)^{-5/2} + 5\xi^2\left(1-\xi^2\right)^{-7/2}\right)$$

ist offenbar monoton wachsend (in der Ableitung bzgl. ξ treten nur positive Terme auf). Daher erhält man für $x = 0.1$ (und damit $\xi \in (0,1)$) die Abschätzung

$$\begin{aligned}&\left|3\xi\left(3(1-\xi^2)^{-5/2} + 5\xi^2(1-\xi^2)^{-7/2}\right)\right| \\ &\leq \; 3\cdot 0.1\left(3(1-0.1^2)^{-5/2} + 5\cdot 0.1^2(1-0.1^2)^{-7/2}\right) \leq 0.94\ .\end{aligned}$$

Daher folgt

$$\left|\arcsin_0 0.1 - \left(0.1 + \frac{(0.1)^3}{6}\right)\right| \leq \frac{0.94}{4!}\cdot(0.1)^4 \leq 3.92\cdot 10^{-6} < 10^{-5},$$

und der Grad 4 des Taylorpolynoms ist ausreichend, um die geforderte Genauigkeit zu erreichen.

Tatsächlich gilt

$$\arcsin_0 0.1 = 0.1001674212\ , \quad 0.1 + \frac{(0.1)^2}{6} = 0.1001666667$$

□

Aufgabe 14.22 *Mit Hilfe des Taylorschen Satzes beweise man die Ungleichung*

$$0 \leq (x+8)^{-1/3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{48}x \leq \frac{2}{9}x^2 \quad \textit{für alle} \quad x \in |-7,7|.$$

Lsung von Aufgabe 14.22

$$\begin{aligned}f(x) &= (x+8)^{-1/3} & f(0) &= \tfrac{1}{2}\\ f'(x) &= -\tfrac{1}{3}(x+8)^{-4/3} & f'(0) &= -\tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{1}{16} = -\tfrac{1}{48}\\ f''(x) &= \tfrac{4}{9}(x+8)^{-7/3}\end{aligned}$$

also ist das Taylorpolynom ersten Grades mit dem Entwicklungspunkt $x_0 = 0$

$$T_1(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{48}x.$$

Für den Fehler gilt

$$f(x) - T_1(x) = \frac{f''(\xi)}{2!}x^2.$$

Es ist $f''(\xi) \geq 0$ für alle $\xi \in [-7,7]$, und wegen

$$f'''(x) = -\frac{28}{27}(x+8)^{-10/3} \leq 0 \quad \text{für alle } x \in [-7,7]$$

ist f'' monoton fallend, also

$$f''(\xi) \leq f''(-7) = \frac{4}{9} \quad \text{für alle } x \in [-7, 7].$$

Damit folgt

$$0 \leq f(x) - T_1(x) = (x+8)^{-1/3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{48}x \leq \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{2}x^2 = \frac{2}{9}x^2.$$

□

Aufgabe 14.23 *a) Bestimmen Sie durch Taylorentwicklung von $f(x) := 10^x$ in $x_0 = 0$ eine Approximation von $10^{0.1}$ mit einem absoluten Fehler von maximal 10^{-5}.*

b) Betrachten Sie die Taylorreihe zu $f(x) = 10^x$ und dem Entwicklungspunkt $x_0 = 0$. Untersuchen Sie, für welche Werte $x \in \mathbb{R}$ die Reihe konvergiert. Klären Sie weiter, für welche dieser Werte die Taylorreihe die Funktion f darstellt.

Hinweise: Die angegebene Approximation darf den Ausdruck $\ln(10)$ noch enthalten.

Lsung von Aufgabe 14.23

a): Für $f(x) = 10^x$ wollen wir bei $x = 0.1$ die Taylorentwicklung

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + \frac{f^{(n+1)}(\zeta)}{(n+1)!}x^{n+1} \tag{14.6}$$

$(\zeta = \zeta(x, n) \in (0, x))$ zur Approximation von $10^{0.1} = f(0.1)$ heranziehem.

Es ist

$$f(x) = \exp(x \cdot \ln(10))$$

und somit

$$f'(x) = \ln(10) \cdot \exp(x \cdot \ln(10)) = \ln(10) \cdot 10^x = \ln(10) \cdot f(x).$$

Hieraus folgt sofort

$$f^{(k)}(x) = (\ln(10))^k \cdot 10^x, \quad k \in \mathbb{N},$$

Insbesondere ist

$$f^{(k)}(0) = (\ln(10))^k, \quad k \in \mathbb{N},$$

und wir können (14.6) konkretisieren zu

$$10^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{(\ln(10) \cdot x)^k}{k!} + R(x, n)$$

mit
$$|R(x,n)| = \frac{(\ln(10)\cdot x)^{n+1}}{(n+1)!}10^{\zeta}, \tag{14.7}$$
wobei $\zeta = \zeta(x,n)$ zwischen dem Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ und dem Auswertungspunkt x liegt.

Bevor wir irgendeine der Taylorapproximationen
$$T_n(x) := \sum_{k=0}^{n} \frac{(\ln(10)\cdot x)^k}{k!}$$
bei $x = 0.1$ auswerten, analysieren wir den Fehlerterm aus (14.7) für variables n, um zu erfahren, welche der Taylorapproximationen die erforderliche Genauigkeit von 10^{-5} liefert.

Bei $x = 0.1$ ist
$$|R(0.1,n)| = \frac{(\ln(10)\cdot 0.1)^{n+1}}{(n+1)!}10^{\zeta},$$
mit $\zeta \in (0, 0.1)$.

Zwar kennen wir den genauen Wert von ζ nicht, doch können wir wegen des monotonen Wachstums von 10^x in $\mathbb{R}$ auf jeden Fall wie folgt abschätzen:
$$|R(0.1,n)| \le \frac{(\ln(10)\cdot 0.1)^{n+1}}{(n+1)!}10^{0.1}. \tag{14.8}$$

Es wäre an dieser Stelle unsportlich, einfach den Taschenrechner zu nehmen und die auf der rechten Seite auftretende Zahl $10^{0.1}$ damit "auszurechnen". Tatsächlich ist das Ziel dieser Aufgabe ja gerade die Herleitung einer Approximation dieser Zahl.

Es genügt für unsere Zwecke auch völlig, diesen Wert nach oben abzuschätzen. Wir könnten dies etwa ganz grob tun
$$10^{0.1} \le 10^1 = 10$$
und tatsächlich mit dieser Abschätzung weiterrechnen. (Wie man sich am Ende der Lösung leicht überlegt, hätte dies nur zur Folge, dass man einige Terme mehr in die Taylorapproximation aufnehmen müßte, um die gewünschte Genauigkeit garantieren zu können. Man muss sich also entscheiden, an welcher Stelle man Arbeit investieren möchte.)

Da eine wesentlich genauere Abschätzung nur wenig Mühe kostet, wollen wir hier etwas genauer sein. Das kann man ganz leicht, indem man sich überlegt
$$10^{0.1} = 10^{1/10} \le a \quad \Longleftrightarrow \quad 10 \le a^{10}.$$

Nach ein wenig Probieren findet man, dass

$$(1.3)^{10} = 13.78... > 10$$

ist, weshalb

$$10^{0.1} \leq 1.3 \tag{14.9}$$

sein muss.

Für den in (14.8) auftretenden Funktionswert ln(10) könnten wir eine obere Schranke aus einem Tafelwerk oder mit unserem Rechner ermitteln. Wir wollen aus sportlichen Gründen und zur Übung auch hier einmal "zu Fuß" weiter abschätzen.

Es ist ln(10) der Exponent, mit dem die Eulersche Zahl e potenziert werden muss um 10 zu ergeben. Bekanntlich ist $2.5 < e$. Damit ist 2.5 sicherlich mit einer größeren Zahl als e zu potenzieren, um auch 10 zu ergeben:

$$\log_{2.5}(10) > \ln(10).$$

Wegen $(2.5)^3 = 15.625 > 10$ ist deshalb sicherlich

$$3 > \log_{2.5}(10) > \ln(10).$$

Wir können damit schließlich sagen:

$$\left| \frac{f^{(n+1)}(\zeta)}{(n+1)!}(0.1)^{n+1} \right| \leq \frac{(0.3)^{n+1} \cdot 1.3}{(n+1)!}.$$

Ein geeignetes n berechnet man nun aus der Forderung

$$F_n := \frac{(0.3)^{n+1} \cdot 1.3}{(n+1)!} \overset{!}{\leq} 10^{-5}.$$

Aus der Tabelle

n	F_n
1	5.85000E-2
2	5.85000E-3
3	4.387..E-4
4	2.632..E-5
5	1.316..E-6

entnimmt man, dass die Approximation

$$10^{0.1} \approx \sum_{k=0}^{5} \frac{f1^{(k)}(0)}{k!}(0.1)^k = \sum_{k=0}^{5} \frac{(\ln(10) \cdot 0.1)^k}{k!} =: T_5$$

sicher genau genug ist.

Um zu sehen, wie realistisch unsere Fehlerschätzung ist, stellen wir in der folgenden Tabelle die Approximationen $T_n(0.1)$, ihre tatsächlichen Fehler Φ_n, unserer Fehlerabschätzung F_n und den Quotienten F_n/Φ_n zusammen.

n	T_n	Φ_n	F_n	F_n/Φ_n
0	1.230258509	2.589..E-1	3.90000E-1	1.50..
1	1.230258509	2.866..E-2	5.85000E-2	2.04..
2	1.256768000	2.157..E-3	5.85000E-3	2.71..
3	1.258802678	1.227..E-4	4.387..E-4	3.57..
4	1.258919804	5.607..E-6	2.632..E-5	4.69..
5	1.258925198	2.139..E-7	1.316..E-6	6.35..

Wir sehen, dass unsere doch recht grobe Fehlerabschätzung gar nicht so schlecht ist und die Größenordnungen der Fehler gut trifft.

b): Nach unseren Ergebnissen aus a) können wir die Taylorreihe von 10^x sofort hinschreiben

$$T_f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\ln(10) \cdot x)^k}{k!}.$$

Den Konvergenzradius dieser Reihe könnten wir jetzt mit der Formel von Cauchy-Hadamard oder dem Quotientenkriterium ausrechnen. Einfacher ist natürlich die Beobachtung, dass $T_f(x)$ nichts anderes als die Exponentialreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^k}{k!}$$

für $y = \ln(10) \cdot x$ ist. Diese Reihe konvergiert bekanntlich für alle $y \in \mathbb{R}$ (sogar in $\mathbb{C}$) und folglich auch für alle $x \in \mathbb{R}$.

Erst an dieser Stelle fällt uns vielleicht ein, dass $f(x) = 10^x$ ja durch

$$10^x := \exp(x \cdot \ln(10))$$

definiert wurde.

Mit der letzten Beobachtung ist letzte Frage dieses Aufgabenteiles natürlich auch ganz flink beantwortet: Da $f(x)$ über die in ganz $\mathbb{R}$ konvergente Potenzreihe T_f definiert wurde, stellt diese die Funktion natürlich auch in ganz $\mathbb{R}$ dar. Sollte man dies vergessen haben, oder nur die Ableitungen von f zur Verfügung haben, kann man natürlich auch schließen, dass der Lagrangesche Restterm in

$$f(x) - T_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\zeta)}{(n+1)!} x^{n+1}$$

für jedes $x \in \mathbb{R}$ bei wachsendem $n \in \mathbb{N}$ gegen Null konvergiert. Wir machen hier darauf aufmerksam, dass man bei diesem Schluss wie folgt schön falsch argumentieren kann:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f^{(n+1)}(\zeta)}{(n+1)!} x^{n+1} = 0,$$

da

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(\zeta)}{n!} x^n = 10^{\zeta} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\ln(10)\cdot x)^n}{n!}$$

als Exponentialreihe konvergiert.

Was hier falsch ist? — Das ζ ist keine feste Zahl, so dass 10^{ζ} nicht aus der Reihe herausgezogen werden kann. ζ hängt noch vom n ab. In jedem Summanden steht damit ein anderer Wert 10^{ζ_n}. Der Fehler ist allerdings leicht zu flicken, indem man jedes 10^{ζ_n} durch $10^{|x|}$ abschätzt und die Argumentation sonst beibehält. □

Aufgabe 14.24 *Berechnen Sie* $\ln 3$ *mit Hilfe der Reihenentwicklung von* $\ln(1+x)$. *Ferner gebe man eine obere Schranke für den Fehler an, der dadurch entsteht, dass die Reihenentwicklung nach dem Glied mit* x^3 *abgebrochen wird.*

Hinweis: Es gilt

$$\ln 3 = \ln\left(e\left(1 + \frac{3-e}{e}\right)\right).$$

Lsung von Aufgabe 14.24

Es gilt

$$\ln(1+x) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j+1}}{j} x^j, \quad -1 < x \le 1$$

und

$$\begin{aligned} \ln 3 &= \ln\Big(e\Big(1 + \frac{3-e}{e}\Big)\Big) = \ln e + \ln\Big(1 + \frac{3-e}{e}\Big) \\ &= 1 + \ln(1+t), \quad t := \frac{3-e}{e} \in (0,1). \end{aligned}$$

Also konvergiert die Reihe für t. Da die Glieder der Reihe

$$\frac{(-1)^{j+1}}{j} t^j$$

alternieren und den Betrage nach monoton fallen, gilt für den Fehler

$$\Big|\ln(1+t) - \sum_{j=1}^{n} \frac{(-1)^{j+1} t^j}{j}\Big| \le \Big|\frac{(-1)^{n+2} t^{n+1}}{n+1}\Big| = \frac{t^4}{4}.$$

□

Aufgabe 14.25 *Bestimmen Sie die Taylorreihe der Funktion*

$$f\,:\,\mathbb{R}\to\mathbb{R},\;\; f(x):=\arctan x$$

mit dem Entwicklungspunkt $x_0 := 0$

Lsung von Aufgabe 14.25
f ist beliebig oft differenzierbar in $\mathbb{R}$ und besitzt daher eine Taylorreihe

$$T_f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n,$$

wobei der konstante Term wegen $f(0) = 0$ verschwindet.

Durch gliedweises Differenzieren folgt

$$\frac{d}{dx}T_f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n.$$

Andererseits gilt für $|x| < 1$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = \sum_{n=0}^{\infty}(-x^2)^n,$$

und durch Reihervergleich erhält man

$$a_{2n} = 0, \quad a_{2n+1} = \frac{(-1)^n}{2n+1}, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Daher folgt

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}.$$

$\square$

Aufgabe 14.26 *Es sei* $f\,:\,(-a,a)\to\mathbb{R}$ *beliebig oft differenzierbar.*

Zeigen Sie, dass die Taylorreihe von f *zum Entwicklungspunkt* $x_0 = 0$ *nur gerade Potenzen enthält, wenn* f *eine gerade Funktion ist, und dass sie nur ungerade Potenzen enthält, wenn* f *eine ungerade Funktion ist.*

Lsung von Aufgabe 14.26
Wir wissen bereits aus Aufgabe ??.??, dass die Ableitung einer geraden Funktion ungerade ist und dass die Ableitung einer ungeraden Funktion gerade ist. Ist also f eine gerade, beliebig oft differenzierbare Funktion, so sind alle Ableitungen $f^{(2n)}$ gerader Ordnung gerade Funktionen und alle Ableitungen $f^{(2n+1)}$ ungerader Ordnung

ungerade Funktionen. Da eine ungerade stetige Funktion im Punkte 0 den Wert 0 annimmt, folgt $f^{(2n+1)}(0)$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$, und es ist

$$T_f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(2k)}(0)}{(2k)!} x^{2k}.$$

Genauso folgt die Behauptung über die ungerade Funktion. □

Aufgabe 14.27 *Lösen Sie die Anfangswertaufgabe*

$$y'' = ay \ , \quad y(0) = 0 \ , \ y'(0) = 1$$

für festes $a \in \mathbb{R}$ mit Hilfe des Taylorschen Satzes.

Lsung von Aufgabe 14.27

Durch Differenzieren erhalten wir aus der Differentialgleichung

$$y^{(k+2)} = ay^{(k)} \ , \quad k \in \mathbb{N}_0 \ ,$$

und die Anfangsbedingungen liefern

$$y^{(2k)}(0) = 0 \ , \ y^{(2k+1)}(0) = a^k \ , \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

Damit erhalten wir als Taylorreihe der gesuchten Funktion

$$T(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} \ .$$

Es ist also für $a = 0$

$$T(x) = x \ ,$$

für $a > 0$

$$T(x) = \frac{1}{\sqrt{a}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\sqrt{a}x)^{2k+1}}{(2k+1)!} = \frac{1}{\sqrt{a}} \sinh\left(\sqrt{a}x\right)$$

und für $a < 0$

$$T(x) = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \left(\sqrt{|a|}x\right)^{2k+1} = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \sin\left(\sqrt{|a|}x\right) \ .$$

Durch Einsetzen überzeugt man sich leicht, dass diese Funktionen tatsächlich die Anfangswertaufgabe lösen. □

Aufgabe 14.28 *Es sei $f : (-a, a) \to \mathbb{R}$ beliebig oft differenzierbar, und es gelte*

$$\left|f^{(n)}(x)\right| \le M^n \cdot n! \quad \textit{für alle } n \in \mathbb{N} \textit{ und alle } x \in (-a, a) \ .$$

Zeigen Sie, dass die Taylorreihe von f in $(-\alpha, \alpha)$, $\alpha := \min\left(a, \frac{1}{M}\right)$, gegen f konvergiert.

Lsung von Aufgabe 14.28

Das Lagrangesche Restglied lautet

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1} \quad \text{mit einem } \xi \in (-a,a) \ .$$

Daher gilt für alle $x \in (-a,a)$

$$|R_n(x)| \leq \frac{1}{(n+1)!}\left|f^{(n+1)}(\xi)\right| \cdot |x|^{n+1} \leq (M|x|)^{n+1} \ .$$

Für $x \in (-\alpha,\alpha)$ ist $r := M|x| < M\alpha \leq 1$, und daher gilt für diese x

$$|R_n(x)| \to 0 \quad \text{für } n \to \infty \ .$$

□

Aufgabe 14.29 *Die Fehlerfunktion ist definiert durch*

$$\phi'(x) := \frac{2}{\sqrt{\pi}}\exp(-x^2) \ , \quad \phi(0) := 0 \ .$$

a) Bestimmen Sie die Taylorreihe von ϕ zum Entwicklungspunkt $x_0 =$.

b) Wir werden noch setzen, dass die Taylorreihe in $\mathbb{R}$ gegen ϕ konvergiert.

ϕ werde im Intervall $[-0.5, 0.5]$ durch das Taylorpolynom vom Grade 7 ersetzt.

Schätzen Sie hierfür den relativen Fehler ab.

c) Wieviele Summanden der Taylorreihe benötigt man, um $\phi(0.5)$ auf vier Dezimalstellen genau zu berechnen ?

Lsung von Aufgabe 14.29

a): ϕ ist beliebig oft differenzierbar, besitzt also eine Taylorreihe.

Es gilt

$$\phi'(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\exp(-x^2) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-x^2)^k}{k!} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}x^{2k} \ .$$

Hieraus liest man ab, dass die Taylorreihe von ϕ die Gestalt

$$\phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)\cdot k!}x^{2k+1} + C$$

haben muss, und aus $\phi(0) =$ erhält man $C =$.

b): Es bezeichne

$$\phi_n(x) := \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)\cdot k!} x^{2k+1}$$

die $n-$te Partialsumme der Taylorreihe. Da die Reihe alternierend ist, gilt dann

$$|\phi(x) - \phi_n(x)| \le \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{|x|^{2n+3}}{(2n+3)\cdot(n+1)!} .$$

Da für $|x| \le 0.5$ die Reihenglieder von ϕ monoton fallen, gilt

$$|\phi(x)| \ge \frac{2}{\sqrt{\pi}} |x| \Big(1 - \frac{x^2}{3}\Big) \ge \frac{11}{6\sqrt{\pi}} \cdot |x| \quad \text{für alle } |x| \le 0.5 .$$

Für den relativen Fehler erhält man daher

$$\frac{|\phi(x) - \phi_n(x)|}{|\phi(x)|} \le \frac{12}{11} \cdot \frac{0.5^{2n+2}}{(n+1)!(2n+3)} ,$$

und speziell für $n = 3$

$$\frac{|\phi(x) - \phi_3(x)|}{|\phi(x)|} \le \frac{12}{11} \cdot \frac{0.5^8}{9 \cdot 4!} \le 1.97 \cdot 10^{-5} .$$

Es sind also $4 - 5$ Dezimalstellen bereits richtig.

c): Teil b) zeigt, dass für $n = 3$ ist die geforderte Genauigkeit gesichert ist. Wir prüfen, ob bereits $n = 2$ ausreichend ist. Man erhält aus der Fehlerabschätzung aus Teil b)

$$\frac{|\phi_2(x) - \phi(x)|}{|\phi(x)|} \le \frac{12}{11} \cdot \frac{0.5^6}{7 \cdot 3!} = 4.05 \cdot 10^{-4} .$$

ϕ_2 genügt also noch nicht den Genauigkeitsanforderungen.

Die folgende Tabelle enthält die Approximationen von $\phi(0.5)$ durch $\phi_n(0.5)$, wobei die gültigen Stellen unterstrichen sind.

n	$\phi_n(0.5)$
1	$\underline{0.51}7\ldots$
2	$\underline{0.520}69\ldots$
3	$\underline{0.5204}90\ldots$
4	$\underline{0.52050}02$
$\vdots$	$\vdots$
7	$\underline{0.5204998778}$

$\square$

Aufgabe 14.30 *Bestimmen Sie die Taylorreihe von $f(x) := \cos(5x)$ mit dem Entwicklungspunkt $x_0 := \pi/5$. In welchem Intervall konvergiert die Reihe gegen f?*

Lsung von Aufgabe 14.30
Es gilt

$$f'(x) = -5\sin 5x,\ f''(x) = -25\cos 5x,\ f'''(x) = 125\sin x,\ f^{(5)}(x) = 5^4\cos x,$$

und durch Induktion für alle $k \in \mathbb{N}_0$

$$f^{(4k)}(x) = 5^{4k}\cos 5x,\ f^{(4k+1)}(x) = -5^{4k+1}\sin 5x,$$

$$f^{(4k+2)}(x) = -5^{4k+2}\cos 5x,\ f^{(4k+3)}(x) = 5^{4k+3}\sin 5x.$$

Für $x_0 = \pi/5$ folgt

$$f^{(2n)}(x_0) = (-1)^n 5^{2n},\ f^{(2n+1)}(x_0) = 0 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_0.$$

Daher ist die Taylorreihe von f mit dem Entwicklungspunkt x_0

$$\begin{aligned} T_f(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(2n)}(x_0)}{(2n)!}(x-x_0)^{2n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 5^{2n}}{(2n)!}(x-\frac{\pi}{5})^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}(5x-\pi)^{2n}. \end{aligned}$$

Die Taylorreihe konvergiert in ganz $\mathbb{R}$ gegen f, denn für das Restglied gilt mit einem ξ zwischen x und x_0 für $n \to \infty$

$$\begin{aligned} |R_{2n-1}(x)| &= |R_{2n}(x)| = \Big|\frac{f^{(2n+1)}(\xi)}{(2n+1)!}(x-x_0)^{2n+1}\Big| \\ &= \Big|\frac{5^{2n+1}\sin(5\xi)}{(2n+1)!}(x-x_0)^{2n+1}\Big| \le \frac{|5x-\pi|^{2n+1}}{(2n+1)!} \to 0. \end{aligned}$$

□

Aufgabe 14.31 *a) Zeigen Sie, dass die Funktion* $y(x) := \tan x$ *die Anfangswertaufgabe*

$$y' = 1 + y^2,\ y(0) = 0,$$

löst.

b) Bestimmen Sie das Taylorpolynom T_5 *von* $f(x) := \tan x$ *vom Grad* $n = 5$ *mit dem Entwicklungspunkt* $x_0 := 0$.

Lsung von Aufgabe 14.31
a): Es ist

$$y'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x} = 1 + y^2$$

und $y(0) = 0$. **b)**: Die Ableitungen

$$y'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}, \; y''(x) = \frac{-2\sin x}{\cos^3 x}, \; \ldots$$

bis zur fünften Ordnung direkt zu berechnen ist sehr aufwendig.

Nach Teil a) gilt $y' = 1 + y^2$. Daher folgt

$$y'' = 2yy', \; y''' = 2(y'^2 + yy''), \; y^{(4)} = 2(3y'y'' + yy'''), \; y^{(5)} = 2(3y''^2 + 4y'y''' + yy^{(4)}).$$

Daher folgt aus $y(0) = 0$

$$y'(0) = 1, \; y''(0) = 0, \; y'''(0) = 2, \; y^{(4)}(0) = 0, \; y^{(5)}(0) = 16,$$

und das Taylorpolynom vom Grad 5 ist

$$T_5(x) = \sum_{k=0}^{5} \frac{y^{(k)}(0)}{k!} x^k = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15}.$$

□

Aufgabe 14.32 *Die Bessel Funktion der Ordnung 0 (die eine große Rolle in den Anwendungen, z.B. bei der Schwingung von Membranen, spielt) ist definiert als Lösung der Anfangswertaufgabe*

$$xy'' + y' + xy = 0, \; y(0) = 1, \; y'(0) = 0. \tag{14.10}$$

a) *Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt*

$$xy^{(n+2)} + (n+1)y^{(n+1)} + xy^{(n)} + ny^{(n-1)} = 0. \tag{14.11}$$

b) *Bestimmen Sie die Taylorreihe der Bessel Funktion der Ordnung* 0 *zum Entwicklungspunkt* 0*.*

Lsung von Aufgabe 14.32

a): Durch Differentiation von (14.10) erhält man

$$xy''' + 2y'' + xy' + y = 0,$$

d.h. Gleichung (14.11) für $n = 1$. Gilt (14.11) für ein n, so folgt durch Ableiten

$$xy^{(n+3)} + (n+2)y^{(n+2)} + xy^{(n+1)} + (n+1)y^{(n)} = 0,$$

und dies ist (14.11) mit $n + 1$ an Stelle von n.

b): Für $x = 0$ erhält man aus (14.11)

$$(n+1)y^{(n+1)}(0) + ny^{(n-1)}(0) = 0, \quad n \geq 1,$$

d.h.

$$y^{(n+1)}(0) = -\frac{n}{n+1} y^{(n-1)}(0), \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Aus $y'(0) = 0$ folgt $y^{(2n-1)}(0) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $y(0) = 1$ liefert

$$y''(0) = -\frac{1}{2}, \; y^{(4)} = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}, \; y^{(6)} = -\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6},$$

und durch vollständige Induktion folgt

$$y^{(2n)}(0) = (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (2n)} = (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2^n \cdot n!}.$$

Daher ist die Taylorreihe der Bessel Funktion der Ordnung 0

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n)!} \frac{1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2^n \cdot n!} \cdot x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2} x^{2n}.$$

□

Aufgabe 14.33 *Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte mit Hilfe der Taylorreihen der auftretenden Funktionen.*

$$\text{a)}: \quad \lim_{x \to 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2 - x}{(\cos x - 1)^2}, \qquad \text{b)}: \quad \lim_{x \to 0} \frac{2x - \sin x - \arcsin x}{\exp(x^4) - 1}$$

Lsung von Aufgabe 14.33

a): Es gilt für alle $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} e^x + e^{-x} - 2 - x^2 &= \Big(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \ldots\Big) \\ &+ \Big(1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} - + \ldots\Big) - 2 - x^2 \\ &= x^4\Big(\frac{2}{4!} + \frac{2x^2}{6!} + \ldots\Big) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} (-1 + \cos x)^2 &= \Big(-1 + 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - + \ldots\Big)^2 \\ &= x^4\Big(-\frac{1}{2} + \frac{x^2}{4!} - + \ldots\Big)^2. \end{aligned}$$

Daher folgt

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2 - x}{(\cos x - 1)^2} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{12} + \frac{2x^2}{6!} + \ldots}{(-\frac{1}{2} + \frac{x^2}{4!} - + \ldots)^2} = \frac{1}{3}.$$

Wir haben diesen Grenzwert schon einmal in Aufgabe 14.12 mit der Regel von de l'Hospital bestimmt. Dort mußten wir Zähler und Nenner viermal differenzieren, um ans Ziel zu kommen. Die Bestimmung mit dem Taylorschen Satz ist weniger anfällig für Fehler.

b): Es gilt

$$\exp(4x) - 1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n}}{n!} - 1 = x^4 + \frac{1}{2}x^8 + \dots .$$

Um den Grenzwert zu berechnen, benötigen wir also für den Zähler nur die Terme, die x^k, $0 \le k \le 4$, enthalten. Es gilt

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!} - + \dots, \quad \arcsin x = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{120} + \dots .$$

Daher ist

$$2x - \sin x - \arcsin x = \frac{x^5}{12} + \dots,$$

und es folgt

$$\lim_{x\to 0} \frac{2x - \sin x - \arcsin x}{\exp(x^4) - 1} = 0.$$

□

Aufgabe 14.34 *Bestimmen Sie die Taylorentwicklung der Funktion*

$$f(x) = x^5 + 2x^4 + 4x^2 - x - 3$$

zum Entwicklungspunkt $x_0 = -2$.

Lsung von Aufgabe 14.34

f ist ein Polynom. Die Taylorentwicklung ist also wieder ein Polynom vom selben Grad, das man mit dem vollständigen Horner Schema bestimmen kann.

$$
\begin{array}{c|llllll}
 & 1 & 2 & 0 & 4 & -1 & -3 \\
x=-2 & & -2 & 0 & 0 & -8 & 18 \\
\hline
 & 1 & 0 & 0 & 4 & -9 & 15 = f(-2) \\
x=-2 & & -2 & 4 & -8 & 8 & \\
\hline
 & 1 & -2 & 4 & -4 & -1 = f'(-2) & \\
x=-2 & & -2 & 8 & -24 & & \\
\hline
 & 1 & -4 & 12 & -28 = \frac{1}{2}\, f''(-2) & & \\
x=-2 & & -2 & 12 & & & \\
\hline
 & 1 & -6 & 24 = \frac{1}{6}\, f'''(-2) & & & \\
x=-2 & & -2 & & & & \\
\hline
 & 1 & -8 = \frac{1}{24}\, f^{(4)}(-2) & & & & \\
x=-2 & & & & & & \\
\hline
 & 1 = \frac{1}{120}\, f^{(5)}(-2). & & & & &
\end{array}
$$

Das umgeordnete Polynom ist daher

$$f(x) = (x+2)^5 - 8(x+2)^4 + 24(x+2)^3 - 28(x+2)^2 - (x+2) + 15.$$

□

Aufgabe 14.35 *Zur lokalen Approximation von Funktionen, die Ableitungen hoher Ordnungen besitzen, kann man an Stelle des Taylorpolynoms häufig mit besserem Erfolg rationale Funktionen verwenden.*

a) *f besitze die Taylorentwicklung*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \quad \textit{mit } a_0 \neq 0.$$

Zeigen Sie, dass es zu festen $m, n \in \mathbb{N}_0$ eine rationale Funktion

$$r(x) := \frac{p(x)}{q(x)}, \; p \in \Pi_m, \; q \in \Pi_n,$$

gibt, so dass in der Taylorreihe der Funktion

$$g(x) := q(x)f(x) - p(x)$$

mit Entwicklungspunkt 0 alle Terme zu Potenzen x^j, $j = 0, \ldots, m+n$, verschwinden. Die so bestimmte rationale Funktion heißt **Padé Approximation** *der Ordnung (m, n) von f.*

b) *Zeigen Sie, dass die rationale Funktion aus Teil a) in dem folgenden Sinne eindeutig ist. Lösen*

$$r(x) := \frac{p(x)}{q(x)} \; \textit{und } \tilde{r}(x) := \frac{\tilde{p}(x)}{\tilde{q}(x)}, \; p, \tilde{p} \in \Pi_m, \; q, \tilde{q} \in \Pi_n,$$

das Problem aus Teil a), so gilt

$$p(x)\tilde{q}(x) = \tilde{p}(x)q(x).$$

Die rationalen Funktionen gehen also durch Kürzen auseinander hervor.

c) *Bestimmen Sie die Padé Approximation $r(z)$ der Funktion*

$$f(z) := \frac{1}{\sqrt{z}} \tan(\sqrt{z})$$

der Ordnung $(1, 1)$ und vergleichen Sie die Genauigkeit der so gefundenen Approximation $R(x) := x \cdot r(x^2)$ mit der des Taylorpolynoms vom Grade 5 in den Punkten $x_j := 0.1j$, $j = 1, \ldots, 10$.

Lsung von Aufgabe 14.35

a): Wir verwenden den Ansatz

$$p(x) := \sum_{k=0}^{m} b_k x^k, \; q(x) := \sum_{k=0}^{n} c_k x^k.$$

Dann gilt nach der Leibnizregel für $k = 0, \dots, m$

$$\begin{aligned}
\frac{d^k}{dx^k}(q \cdot f - p)(0) &= \sum_{\nu=0}^{k} \binom{k}{\nu} q^{(\nu)}(0) f^{(k-\nu)}(0) - p^{(k)}(0) \\
&= \sum_{\nu=0}^{\min(k,m)} \frac{k!}{\nu!(k-\nu)!}(\nu! c_\nu)((k-\nu)! a_{k-\nu}) - k! b_k \\
&= k! \Big(\sum_{\nu=0}^{\min(k,n)} c_\nu a_{k-\nu} - b_k \Big)
\end{aligned}$$

und für $k = m+1, \dots, n$

$$\begin{aligned}
\frac{d^k}{dx^k}(q \cdot f)(0) &= \sum_{\nu=0}^{k} \binom{k}{\nu} q^{(\nu)}(0) f^{(k-\nu)}(0) \\
&= \sum_{\nu=0}^{\min(k,n)} \frac{k!}{\nu!(k-\nu)!}(\nu! c_\nu)((k-\nu)! a_{k-\nu}) \\
&= k! \sum_{\nu=0}^{\min(k,n)} c_\nu a_{k-\nu}.
\end{aligned}$$

Die Forderung an die Koeffizienten der Taylorreihe von g lauten daher

$$\begin{aligned}
b_0 &= c_0 a_0 \\
b_1 &= c_0 a_1 + c_1 a_0 \\
&\,.\,. \\
b_m &= c_0 a_m + c_1 a_{m-1} + \dots + c_{\min(m,n)} a_{n-\min(m,n)}
\end{aligned} \tag{14.12}$$

und

$$\begin{array}{ccccccccc}
a_{m+1}c_0 & + & a_m c_1 & + & \dots & a_{m-n+1}c_n & = & 0 \\
a_{m+2}c_0 & + & a_{m+1}c_1 & + & \dots & a_{m-n+2}c_n & = & 0 \\
\dots\dots & & & & & & & \\
a_{m+n}c_0 & + & a_{m+1}c_1 & + & \dots & a_m c_n & = & 0,
\end{array} \tag{14.13}$$

wobei $a_\ell = 0$ für $ell < 0$ gesetzt wurde.

(14.13) ist ein lineares homogenes Gleichungssystem von n Gleichungen in den $n+1$ Unbekannten $c_0, \dots, c_n$. Es besitzt also eine nichttriviale Lösung. Setzt man diese in (14.12), so erhält man die zugehörigen Koeffizienten b_k der Funktion p.

b): Lösen

$$r(x) := \frac{p(x)}{q(x)} \text{ und } \tilde{r}(x) := \frac{\tilde{p}(x)}{\tilde{q}(x)},\ p, \tilde{p} \in \Pi_m,\ q, \tilde{q} \in \Pi_n,$$

das Problem aus Teil a), so ist

$$-\tilde{q}(x)(q(x)f(x) - p(x)) + q(x)(\tilde{q}(x)f(x) - \tilde{p}(x)) = p(x)\tilde{q}(x) - \tilde{p}(x)q(x) =: P(x)$$

ein Polynom vom Höchstgrad $m+n$, das nach Konstruktion nur Koeffizienten besitzt, die Null sind. Es gilt also

$$p(x)\tilde{q}(x) = \tilde{p}(x)q(x).$$

c): Nach Aufgabe Aufgabe 14.35 gilt

$$\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \dots .$$

Daher folgt

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{z}}\tan(\sqrt{z}) = 1 + \frac{1}{3}z + \frac{2}{15}z^2 + \ldots =: a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots .$$

Die Bestimmungsgleichungen (14.13), (14.12) der Padé Approximation der Ordnung $(1,1)$ lauten also

$$\begin{aligned} b_0 &= a_0 c_0 &&= c_0, \\ b_1 &= a_1 c_0 + a_0 c_1 &&= \tfrac{1}{3}c_0 + c_1, \\ 0 &= a_2 c_0 + a_1 c_1 &&= \tfrac{2}{15}c_0 + \tfrac{1}{3}c_1 \end{aligned}$$

mit der Lösung

$$b_0 = c_0,\ b_1 = -\frac{1}{15}c_0,\ c_1 = -\frac{2}{5}c_0,\ c_0 \in \mathbb{R}.$$

Damit erhält man als rationale Approximation für die Funktion f

$$r(z) = \frac{15 - z}{15 - 6z}$$

und als Approximation der Tangensfunktion

$$R(x) = \frac{15x - x^3}{15 - 6x^2}.$$

Die folgende Tabelle enthält die relativen Fehler von R und der Taylorapproximation

$$T(x) = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5$$

in den Punkten $x_j = j \cdot 0.1$, $j = 1, \dots, n$.

x	$(\tan x - R(x))/\tan x$	$(\tan x - T(x))/\tan x$
0.1	$6.38\ E - 10$	$5.40\ E - 08$
0.2	$4.15\ E - 08$	$3.46\ E - 06$
0.3	$4.85\ E - 07$	$3.96\ E - 05$
0.4	$2.83\ E - 06$	$2.24\ E - 04$
0.5	$1.13\ E - 05$	$8.58\ E - 04$
0.6	$3.60\ E - 05$	$2.59\ E - 03$
0.7	$9.82\ E - 05$	$6.58\ E - 03$
0.8	$2.41\ E - 04$	$1.48\ E - 02$
0.9	$5.48\ E - 04$	$3.05\ E - 02$
1.0	$1.19\ E - 03$	$5.83\ E - 02.$

Die rationale Approximation liefert also wesentlich bessere Näherungen. □

14.4 Kurvendiskussion

Aufgabe 14.36 *Bestimmen Sie alle Extrema der folgenden Funktionen und klassifizieren Sie diese:*

$$\begin{array}{lll}
\text{a)}: & f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, & f(x) := 4x^3 + 9x^2 - 12x + 7 \\
\text{b)}: & g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, & g(x) := \dfrac{x^2-1}{x^2+1} \\
\text{c)}: & h : [0,2] \to \mathbb{R}, & h(x) := \begin{cases} 2 - x^2 & \textit{für } x \le 1 \\ x^2 - 2x + 2 & \textit{für } x > 1 \end{cases} \\
\text{d)}: & p : [0,2] \to \mathbb{R}, & p(x) := \begin{cases} 1 + x & \textit{für } x \le 1 \\ 2 - x & \textit{für } x > 1 \end{cases} \\
\text{e)}: & q : [0,2] \to \mathbb{R}, & q(x) := \begin{cases} 1 + x & \textit{für } x < 1 \\ 2 - x & \textit{für } x \ge 1 \end{cases} \\
\text{f)}: & r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, & r(x) := \dfrac{x^n}{1+x^2} \quad \textit{für } n \in \mathbb{N}.
\end{array}$$

Lsung von Aufgabe 14.36

a): Es ist

$$f'(x) = 12x^2 + 18x - 12 = 0 \iff x_{1/2} = -\frac{3}{4} \pm \frac{5}{4}.$$

Wegen $f''(\frac{1}{2}) = 30 > 0$ ist $x_1 = \frac{1}{2}$ ein striktes lokales Minimum und wegen $f''(-2) = -30 < 0$ ist $x_2 = 2$ ein strikes lokales Maximum von f.

Beide Extrema sind nicht global wegen

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty.$$

b): Es ist

$$g'(x) = \frac{4x}{(x^2+1)^2} = 0 \iff x_1 = 0$$

und

$$g''(x) = \frac{-12x^2 + 4}{(x^2+1)^3}\,, \qquad \text{d.h. } g''(0) = 4 > 0.$$

g besitzt also in $x_1 = 0$ ein striktes lokales Minimum und dies ist der einzige stationäre Punkt.

Wegen $g(0) = -1$ und $\lim\limits_{x \to \pm\infty} g(x) = 1$ ist $x_1 = 0$ auch globales Minimum.

c): Es ist

$$h'(x) = \left\{ \begin{array}{lll} -2x & \text{für} & x \le 1 \\ 2x - 2 & \text{für} & x > 1 \end{array} \right\} \ne 0$$

für alle $x \in (0,1) \cup (1,2)$. Daher können Extrema von h nur in den Randpunkten des Definitionsbereichs $[0,2]$ liegen oder in Punkten, in denen h nicht differenzierbar ist, d.h. in den Punkten $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ oder $x_2 = 2$. Wegen $h(0) = 2$, $h(1) = 1$ und $h(2) = 2$ sind $x_0 = 0$ und $x_2 = 2$ globale Maxima und $x_1 = 1$ ist das globale Minimum von h.

c): Da p streng monoton wachsend in $[0,1]$ und streng monoton fallend in $(1,2]$ ist, besitzt p in $x_0 = 0$ und $x_2 = 2$ strikte lokale Minima. Wegen $p(0) = 1$ und $p(2) = 0$ ist $x_2 = 2$ das globale Minimum. Wegen

$$\lim_{x\to 1-0} p(x) = 2 = p(1) \ , \quad \lim_{x\to 1+0} p(x) = 1$$

nimmt p in $x_1 = 1$ das globale Maximum an.

d): q besitzt wie p in $x_0 = 0$ und $x_2 = 2$ strikte lokale Minima und in $x_2 = 2$ ein globales Minimum.

Wegen

$$\lim_{x\to 1-0} q(x) = 2 \ , \quad \lim_{x\to 1+0} q(x) = 1 = q(1)$$

nimmt q kein lokales oder globales Maximum an.

e): Es ist

$$r'(x) = \frac{(n-2)x^{n+1} + nx^{n-1}}{(1+x^2)^2} \ .$$

Für $n = 1$ besitzt r' die Nullstellen $x_1 = -1$ und $x_2 = 1$. Wegen

$$r''(x) = \frac{2x(x^2-6)}{(1+x^2)^3}$$

gilt $r''(-1) = \frac{5}{4} > 0$, d.h. $x_1 = -1$ ist ein striktes lokales Minimum, und $r''(1) = -\frac{5}{4} < 0$, d.h. $x_2 = 1$ ist ein striktes lokales Maximum. Wegen $\lim\limits_{x\to\pm\infty} r(x) = 0$ sind diese Extrema auch global.

Für $n > 1$ besitzt r nur den stationären Punkt $x_0 = 0$. Mit

$$\phi(x) := x^n \quad \text{und} \quad \psi(x) := \frac{1}{1+x^2}$$

gilt wegen $\phi^{(j)}(0) = 0$, $j = 0, \ldots, n-1$, und $\phi^{(n)}(0) = n!$ nach der Leibnizschen Regel

$$\begin{aligned} r^{(j)}(0) &= \sum_{k=0}^{j} \binom{j}{k} \phi^{(k)}(0)\psi^{(j-k)}(0) = 0 \quad \text{für } j = 2, \ldots, n-1, \\ r^{(n)}(0) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \phi^{(k)}(0)\psi^{(n-k)}(0) \ = \ \phi^{(n)}(0)\psi(0) \ = \ n! \ > \ 0 \ . \end{aligned}$$

r besitzt also für ungerades n kein Extremum in $x_0 = 0$ und für gerades n ein striktes lokales Minimum.

Wegen $\lim\limits_{x\to\pm\infty} r(x) = 1$ für $n = 2$ und $\lim\limits_{x\to\pm\infty} r(x) = \infty$ für gerades $n > 2$ ist dies auch das globales Minimum. □

Aufgabe 14.37 *Bestimmen Sie die Extrema der Funktion*

$$f(x) := \frac{3}{\sqrt{36 - 16x^2 + 2x^4}}.$$

Lsung von Aufgabe 14.37
Es gilt

$$f'(x) = \frac{-3(-32x + 8x^3)}{2\sqrt{(36 - 16x^2 + 2x^4)^3}} = \frac{-24x(4 - x^2)}{2\sqrt{(36 - 16x^2 + 2x^4)^3}},$$

und die stationären Punkte von f sind $x_1 := -2$, $x_2 := 0$ und $x_3 := 2$.

Um festzustellen, ob es sich bei den stationären Punkten um Maxima oder Minima handelt, ist der Standardweg die Bestimmung der Vorzeichen der zweiten Ableitung von f an den Stellen x_j. Die Brechnung von f'' scheint sehr kompliziert zu werden. Wir versuchen daher, die stationären Punkte x_j ohne Kenntnis von f'' zu klassifizieren.

Wir betrachten zunächst den Punkt $x_2 = 0$. Für alle $x \in (-2, 0)$ gilt $4 - x^2 > 0$ und $-24x > 0$ und der Nenner in f' ist überall positiv. Daher gilt $f'(x) > 0$ für alle $x \in (-2, 0)$ und genauso $f'(x) < 0$ für alle $x \in (0, 2)$. f ist also in einer linksseitigen Umgebung von 0 streng monoton fallend und in einer rechtsseitigen Umgebung von 0 streng monoton wachsend und besitzt daher in $x_2 = 0$ ein striktes lokales Minimum.

Genauso sieht man, dass f links von $x_1 = -2$ streng monoton wächst und in einer rechtsseitigen Umgebung von x_1 streng monoton fällt und damit in $x_1 = -2$ ein strenges lokales Maximum hat und dass f in einer linksseitigen Umgebung von x_3 streng monoton wächst und rechts von x_3 streng monoton fällt und daher auch in $x_3 = 2$ ein striktes lokales Maximum hat

Wegen

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0 \quad \text{und} \quad f(0) = \frac{1}{2}$$

sind x_1 und x_3 globale Maxima und x_2 kein globales Minimum.

Manchmal lohnt es sich, die Funktion, die man minimieren will genau anzusehen, bevor man mit dem Rechnen beginnt. Die Funktion f wird sicher genau dann minimal, wenn der Nenner

$$g(x) := \sqrt{36 - 16x^2 + 2x^4}$$

maximal wird, und f wird genau dann maximal, wenn g minimal wird. Ferner wird g genau minimal bzw. maximal, wenn

$$h(x) := (g(x))^2 = 36 - 16x^2 + 2x^4$$

minimal bzw. maximal wird. Es ist

$$h'(x) = -32x + 8x^3 \quad \text{und} \quad h''(x) = -32 + 24x^2.$$

Hieraus liest man sofort ab, dass $x_1 = -2$, $x_2 = 0$ und $x_3 = 2$ die stationären Punkte von h sind, und wegen $h''(0) < 0$ und $h''(\pm 2) > 0$ ist $x_2 = 0$ ein striktes lokales Maximum von h - also striktes lokales Minimum von f - und sind $x_1 = -2$ und $x_3 = 2$ striktes lokale Minima von h und damit strikte lokale Maxima von f. □

Aufgabe 14.38 *Ein Teilchen bewegt sich in der (x, y)–Ebene auf der Bahn mit der Gleichung*

$$x^4 + 4y^4 = 1.$$

Bestimmen Sie den maximalen und den minimalen Euklidischen Abstand $\sqrt{x^2 + y^2}$ vom Nullpunkt, den das Teilchen erreichen kann.

Lsung von Aufgabe 14.38

Der Euklidische Abstand $\sqrt{x^2 + y^2}$ vom Nullpunkt wird natürlich genau dann minimal bzw. maximal, wenn $x^2 + y^2$ minimal bzw. maximal wird. Wir untersuchen daher die "bequemere" Funktion

$$f(x, y) := x^2 + y^2 \quad \text{auf } \{(x, y)^T \,:\, x^4 + 4y^4 = 1\}.$$

Löst man die Bahngleichung nach x^2 auf, so erhält man

$$x^2 = \sqrt{1 - 4y^4}, \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \le y \le \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Die negative Wurzel kommt nicht in Frage, weil $x^2 \ge 0$ gilt. Einsetzen in die Funktion f liefert

$$\phi(y) := f(x(y), y) = \sqrt{1 - 4y^4} + y^2, \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \le y \le \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Wegen

$$\phi'(y) = \frac{-16y^3}{2\sqrt{1 - 4y^4}} + 2y$$

sind

$$y_1 := -\frac{1}{\sqrt[4]{20}}, \; y_2 := 0, \; y_3 := \frac{1}{\sqrt[4]{20}}$$

die einzigen stationären Punkte von ϕ, und die einzigen Kandidaten für Extremalstellen von ϕ im Intervall $[-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}]$ sind

$$y_4 := -\frac{1}{\sqrt{2}},\ y_1,\ y_2,\ y_3,\ y_5 := \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Setzt man diese Werte in ϕ ein (oder beschafft man sich die zugehörigen x–Werte und setzt dann in f ein), so erhält man

$$\phi(y_4) = \phi(y_5) = \frac{1}{2},\ \phi(y_1) = \phi(y_3) = \frac{\sqrt{5}}{2},\ \phi(y_2) = 1.$$

Damit ist das Minimum des Euklidischen Abstandes $1/\sqrt{2}$, und dieses wird in den Punkten

$$\Big(0, \frac{1}{\sqrt{2}}\Big)^T \quad \text{und} \quad \Big(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\Big)^T$$

angenommen, und das Maximum des Euklidischen Abstandes ist $\sqrt[4]{1.25}$, und dieses wird in den vier Punkten

$$\Big(\pm\sqrt[4]{1.25}, \pm\sqrt[4]{0.05}\Big)^T$$

angenommen. □

Aufgabe 14.39 *Es seien $w_1, \ldots, w_n$ gegebene positive reelle Zahlen. Zeigen Sie dass für beliebige positive reelle Zahlen $a_1, \ldots, a_n$*

$$\frac{w_1 a_1 + w_2 a_2 + \ldots + w_n a_n}{W_n} \geq \Big(a_1^{w_1} a_2^{w_2} \cdot \ldots \cdot a_n^{w_n}\Big)^{1/W_n} \tag{14.14}$$

gilt, wobei $W_n := w_1 + \ldots + w_n$ gesetzt ist, und dass das Gleichheitszeichen genau dann gilt, wenn $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$ gilt.

Für $w_1 = w_2 = \ldots = w_n = 1$ ist (14.14) die bekannte Ungleichung

$$\frac{1}{n}\Big(a_1 + a_2 + \ldots a_n\Big) \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdot \ldots \cdot a_n}$$

zwischen dem arithmetischen und dem geometrischen Mittel.

Lsung von Aufgabe 14.39

Wir führen den Beweis durch vollständige Induktion. Für $n = 1$ ist die Aussage klar, und wir haben nichts zu beweisen. Wir nehmen an, dass sie für ein $n \in \mathbb{N}$ gilt. Um den Induktionsschluss auszuführen, bertachten wir die Funktion

$$f(x) := \frac{1}{W_{n+1}}\Big(w_1 a_1 + \ldots + w_n a_n + w_{n+1} x\Big)\Big(a_1^{w_1} \cdot \ldots \cdot a_n^{w_n} x^{w_{n+1}}\Big)^{-1/W_{n+1}}.$$

Logarithmisches Differenzieren liefert

$$\begin{aligned}\frac{f'(x)}{f(x)} &= \frac{w_{n+1}}{w_1a_1+\ldots+w_na_n+w_{n+1}x}-\frac{w_{n+1}}{W_{n+1}x}\\ &= \frac{w_{n+1}}{(w_1a_1+\ldots+w_na_n+w_{n+1}x)W_{n+1}x}\cdot\Big(W_nx-(w_1a_1+\ldots+w_na_n)\Big).\end{aligned}$$

Die einzige Nullstelle von f' ist also

$$x_0 := \frac{1}{W_n}(w_1a_1+\ldots+w_na_n).$$

Wegen

$$\lim_{x\to 0+0} f(x) = \lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$$

besitzt die Funktion f in x_0 ihr globales striktes Minimum.

Einsetzen von x_0 in die Abbildungsvorschrift f liefert

$$f(x_0) = \Big(\frac{1}{W_n}(\sum_{k=1}^n w_ka_k)\cdot(\prod_{k=1}^n a_k^{w_k})^{-1/W_n}\Big)^{W_n/W_{n+1}}.$$

Nach Induktionsvoraussetzung ist also $f(x_0)\geq 1$, und daher

$$f(x)\geq 1 \quad \text{für alle } x>0.$$

Gleichheit tritt in (14.14) genau dann ein, wenn $f(x_0)=1$ gilt, und dies ist nach Induktionsvoraussetzung genau dann der Fall, wenn

$$a_1=a_2=\ldots=a_n=:a$$

gilt. In diesem Fall folgt

$$x_0=\frac{1}{W_n}\sum_{k=1}^n w_ka=a.$$

□

Aufgabe 14.40 *Die Funktion f sei auf dem abgeschlossenen Intervall $[a,b]$ differenzierbar, und es gelte $f'(a)\neq f'(b)$. Zeigen Sie, dass die Ableitung f' in dem Intervall (a,b) jeden Wert zwischen $f'(a)$ und $f'(b)$ annimmt.*

Lsung von Aufgabe 14.40

Wir setzen voraus, dass $f'(a)>0$ und $f'(b)<0$ gilt, und zeigen, dass es ein $\xi\in(a,b)$ gibt mit $f'(\xi)=0$.

Da f differenzierbar in $[a,b]$ ist, ist f erst recht stetig in diesem abgeschlossenen Intervall, und daher nimmt f sein Maximum in $[a,b]$ an. Wir zeigen, dass das Maximum in einem inneren Punkt $\xi\in(a,b)$ angenommen wird. Dann folgt aus Satz 15.14, dass $f'(\xi)=0$ gilt.

Aus

$$0 < f'(a) = \lim_{x\to a, x>a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

folgt, dass für alle $x > a$, die genügend nahe bei a liegen, $f(x) > f(a)$ gilt. Genauso gilt $f(x) > f(b)$ für alle $x < b$, die hinreichend nahe bei b liegen. Daher wird das Maximum von f in (a, b) angenommen.

Genauso erhalten wir, dass im Falle $f'(a) < 0$ und $f'(b) > 0$ das Minimum von f in einem Punkt $\eta \in (a, b)$ angenommen wird und dass $f'(\eta) = 0$ gilt.

Ist schließlich $f'(a) \neq f'(b)$ beliebig und liegt λ zwischen $f(a)$ und $f(b)$, so erfüllt $g(x) := f(x) - \lambda x$ die Voraussetzungen $g'(a) < 0 < g'(b)$ oder $g'(b) < 0 < g'(a)$, und nach den obigen Überlegungen gibt es ein $\xi \in (a, b)$ mit $0 = g'(\xi) = f'(\xi) - \lambda$. □

Aufgabe 14.41 *Verallgemeinern Sie die Bernoullische Ungleichung, und zeigen Sie, dass gilt*

$$(1+x)^\alpha \geq 1 + \alpha x \quad \textit{für alle } x \geq -1 \textit{ und alle } \alpha \geq 1 \ .$$

Lsung von Aufgabe 14.41

Für $\alpha = 1$ und für $x = -1$ ist die Ungleichung trivial. Wir betrachten also nur für den Fall $\alpha > 1$ und $x > -1$ die Funktion

$$f(x) := (1+x)^\alpha - 1 - \alpha x \ .$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} f'(x) &= \alpha(1+x)^{\alpha-1} - \alpha, \\ f''(x) &= \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2} > 0 \ . \end{aligned}$$

f ist also strikt konvex, und das eindeutige globale Minimum von f ist charakterisiert durch

$$f'(x) = 0 \iff x = 0 \ .$$

Daher ist

$$(1+x)^\alpha - 1 - \alpha x = f(x) \geq f(0) = 0 \ .$$

□

Aufgabe 14.42 *Es sei $n \in \mathbb{N}$. Berechnen Sie für die Funktion*

$$f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}, \ f(x) := x^n \cdot e^{-x}$$

a) alle lokalen und globalen Extrema,

b) alle Wendepunkte.

Lsung von Aufgabe 14.42

a): Es gilt für alle $x > 0$ und für alle $n \in \mathbb{N}$ die Ungleichung

$$f(x) = x^n \cdot e^{-x} > 0 = f(0).$$

Daher nimmt f bei $x_0 = 0$ stets ein striktes globales Minimum an.

Es ist

$$f'(x) = x^{n-1}e^{-x}(n-x),$$

und daher ist $x_0 := n$ der einzige positive stationäre Punkt von f.

Ferner gilt (auch für $n = 1$)

$$f''(x) = e^{-x}x^{n-2}(x^2 - 2nx + n(n-1)),$$

so dass

$$f''(n) = -e^{-n}n^{n-1} < 0$$

ist. Damit besitzt f in $x_0 = n$ ein striktes lokales Maximum.

Da f für $x > n$ streng monoton fallend ist, ist $x_0 = n$ auch striktes globales Maximum, und es existieren keine weiteren Extrema.

b): Es gilt für $n = 1$

$$f''(2) = 0$$

und für $n > 1$

$$f''(n \pm \sqrt{n}) = 0.$$

Ferner erkennt man

$$f''(x) \begin{cases} > 0 & \text{für } \; x \in (0, n-\sqrt{n}), \\ < 0 & \text{für } \; x \in (n-\sqrt{n}, n+\sqrt{n}), \\ > 0 & \text{für } \; x \in (n+\sqrt{n}, \infty). \end{cases}$$

Daher besitzt f für $n \geq 2$ die zwei Wendepunkte $x_1 = n - \sqrt{n}$ und $x_2 = n + \sqrt{n}$ und für $n = 1$ den einzigen Wendepunkt $x_2 = 2$. $\square$

Aufgabe 14.43 *Zeigen Sie, dass kein Polynom ungeraden Grades in ganz $\mathbb{R}$ strikt konvex sein kann.*

Lsung von Aufgabe 14.43

Zunächst sind Polynome vom Grad 1 zwar konvex, aber nicht streng konvex. Wir müssen also nur den Fall $n \geq 3$ zu betrachten.

Polynome $p(x)$ ungeraden Grades mit Grad ≥ 3 besitzen eine zweite Ableitungen $p''(x)$, die wieder Polynome ungeraden Grades sind und mindestens vom Grad 1 sind. Für $p''(x)$ gibt es dann aber stets eine reelle Zahl $R > 0$ (deren Größe vom betreffenden Polynom p abhängt), so dass

$$p''(x) > 0 \quad \text{für alle } x > R \quad \text{und} \quad p''(x) < 0 \quad \text{für alle } x < -R$$

gilt oder aber

$$p''(x) < 0 \quad \text{für alle } x > R \quad \text{und} \quad p''(x) > 0 \quad \text{für alle } x < -R.$$

In jedem dieser Fälle ist das Polynom damit entweder für $x > R$ oder für $x < -R$ strikt konkav. □

Aufgabe 14.44 *Es sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ konvex und streng monoton in $[a,b]$.*

Was kann man dann über die Konvexität oder Konkavität der Umkehrfunktion f^{-1} aussagen?

Lsung von Aufgabe 14.44

Aus der geometrische Konstruktion der Inversen (Spiegelung des Graphen an der Winkelhalbierenden) ist anschaulich klar, dass die Inverse einer streng monoton wachsenden und konvexen Funktion konkav ist. Wir zeigen dies nun analytisch.

Es sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ streng monoton wachsend und konvex. Es seien $y_1, y_2 \in I := f([a,b])$, $y_1 < y_2$, und $x_j := f^{-1}(y_j)$, $j = 1,2$). Wegen der Konvexität von f gilt für alle $\lambda \in (0,1)$

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2) = \lambda y_1 + (1-\lambda)y_2. \tag{14.15}$$

Da die inverse Funktion einer streng monoton wachsenden Funktion streng monoton wachsend ist, folgt

$$\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 = f^{-1}(f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2)) \leq f^{-1}(\lambda y_1 + (1-\lambda)y_2),$$

d.h.

$$\lambda f^{-1}(y_1) + (1-\lambda)f^{-1}(y_2) \leq f^{-1}(\lambda y_1 + (1-\lambda)y_2).$$

f^{-1} ist also konkav.

Ist f streng monoton fallend, so ist auch f^{-1} streng monoton fallend, und aus (14.15) erhält man genauso

$$\lambda f^{-1}(y_1) + (1-\lambda)f^{-1}(y_2) \geq f^{-1}(\lambda y_1 + (1-\lambda)y_2).$$

In diesem Fall ist also auch f^{-1} konvex. □

Aufgabe 14.45 *Führen Sie eine Kurvendiskussion für die Funktion*

$$f(x)\ :\ \frac{3x^2+2}{2x+5}+\ln\Big(4x^2+20x+25\Big)$$

durch.

Lsung von Aufgabe 14.45
Definitionsbereich: Es gilt offensichtlich $D_f = \mathbb{R}\setminus\{-2.5\}$.

Symmetrien: Wegen $D_f = \mathbb{R}\setminus\{-2.5\}$ können Symmetrien nur bzgl. der Geraden $x = 2.5$ auftreten. Es gilt

$$g(\xi) := f(\xi-2.5) = \frac{3}{2}\xi - 7.5 + 10.375\frac{1}{\xi} + \ln(4\xi^2).$$

Da der Anteil $1.5\xi + 10.375\frac{1}{\xi}$ ungerade ist und der Anteil $\ln(4\xi^2) - 7.5$ gerade, treten keine Symmetrien auf.

Grenzwerte, Pole: Wegen

$$g(\xi) = \frac{1}{\xi}\Big(1.5\xi^2 - 7.5\xi + 10.375 + 2\xi\ln(2\xi)\Big) =: \frac{1}{\xi}h(\xi)$$

und $\lim\limits_{\xi\to 0} h(\xi) = 10.375$ besitzt f einen Pol in $x_0 := -2.5$ mit

$$\lim_{x\to -2.5-0} f(x) = -\infty \quad \text{und} \quad \lim_{x\to -2.5+0} f(x) = \infty\ .$$

Asymptoten: Wegen

$$\lim_{\xi\to\pm\infty}\frac{1}{\xi^k}g(\xi) = 0 \quad \text{für alle } k \ge 2$$

und

$$\lim_{\xi\to\pm\infty}\frac{1}{\xi}g(\xi) = 1.5$$

kommt als Asymptote nur

$$\phi(\xi) = 1.5\xi + c, \quad c\in\mathbb{R},$$

in Frage. Es gilt jedoch

$$\lim_{\xi\to\pm\infty}(g(\xi)-\phi(\xi)) = \lim_{\xi\to\pm\infty}\Big(-7.5 + c + 10.375\frac{1}{\xi} + \ln(4\xi^2)\Big) = \infty\ ,$$

und es gibt keine Asymptoten in Form eines Polynoms.

Nullstellen: Da die Gleichung $f(x) = 0$ nicht elementar lösbar ist, stellen wir diesen Punkt zurück.

Monotonieverhalten: Es ist

$$f'(x) = \frac{6x(2x+5) - 2\left(3x^2+2\right)}{(2x+5)^2} + \frac{8x+20}{(2x+5)^2} = \frac{6x^2+38x+16}{(2x+5)^2}$$

mit den Nullstellen

$$x_{1/2} = -\frac{19}{6} \pm \frac{1}{6}\sqrt{265} \approx \begin{cases} -5.88 \\ -0.45 \end{cases}$$

Wegen

$$f'(-6) = \frac{4}{49} > 0,\; f'(-3) = -44 < 0,\; f'(-2) = -36 < 0,\; f'(0) = \frac{16}{25} > 0$$

ist f streng monoton wachsend in $(-\infty, x_1)$, streng monoton fallend in $(x_1, -2.5) \cup (-2.5, x_2)$ und streng monoton wachsend in (x_2, ∞).

Extrema: Die Ergebnisse des letzten Punktes zeigen, dass f ein striktes lokales Maximum in x_1 und ein striktes lokales Minimum in x_2 besitzt. Wegen $\lim\limits_{x\to -2.5-0} f(x) = -\infty$ besitzt f kein globales Minimum und wegen $\lim\limits_{x\to -2.5+0} f(x) = \infty$ kein globales Maximum.

Nullstellen: Wegen $f(x_1) = -11.82 < 0$ besitzt f keine Nullstelle in $(-\infty, -2.5)$ und wegen $f(x_2) = 3.46$ hat f keine Nullstelle in $(-2.5, \infty)$.

Wendepunkte: Es ist

$$f''(x) = \frac{-16x+126}{(2x+5)^3} = 0 \iff x_3 = 7.875$$

f ist wegen $f''(-3) < 0$ konkav in $(-\infty, -2.5)$, wegen $f''(0) > 0$ konvex in $(-2.5, x_3)$ und wegen $f''(-10) < 0$ konkav in (x_3, ∞). Der einzige Wendepunkt ist x_3.

Insgesamt erhält man den Graphen in Abbildung 14.1 $\square$

14.5 Noch einmal Polynominterpolation

Aufgabe 14.46 *Es sei der folgende Abschnitt einer Wertetabelle des natürlichen Logarithmus vorgelegt*

x	$\ln(x)$
1.10	0.095310
1.20	0.182322
1.30	0.262364
1.40	0.336472
1.50	0.405465
1.60	0.470004
1.7	0.530628

Abbildung 14.1: Zu Aufgabe 14.44

Berechnen Sie aus diesen Daten durch Interpolation einen Näherungswert für $\ln 1.31$ *mit einem theoretisch gesicherten Fehler von höchstens* $2 \cdot 10^{-5}$.

Dabei braucht der Tabellenfehler nicht berücksichtigt zu werden, und es müssen nicht alle Daten der Tabelle verwendet werden.

Lsung von Aufgabe 14.46

In der Aufgabe ist als Hinweis vorsichtshalber gleich angegeben, dass nicht alle angegebenen Werte benutzt werden müssen.

Normalerweise hat man bei praktischen Problemen ja eine ganze Tafel mit sehr vielen Funktionswerten vorliegen. Man wird dann auch nicht alle Daten (sagen wir 1000 Stück) der Tafel zur Interpolation heranziehen. Vielmehr wird man zunächst einmal die Seite der Tafel aufsuchen, auf der sich der gesuchte x–Wert befindet. Steht der Wert selbst in der Tafel, so ist man zufrieden. Andernfalls wählt man einige Tafeleinträge aus mit x-Werten in der Nähe des aktuell interessierenden Wertes.

Man wird versuchen, zunächst einmal mit einem oder mit zwei Werten (konstante bzw. lineare Interpolation) auszukommen, da man ja weiß, dass die Anzahl der Stützstellen sich bei der Fehlerabschätzung in der Ordnung der zu bildenden Ableitung der zu interpolierenden Funktion niederschlagen wird.

Bevor man irgendwelche Interpolationswerte bildet, schätzt man zunächst den Fehler ab, um unnötige Arbeit zu vermeiden. (Wenn man erst interpoliert und dann findet, dass die gewonnene Approximation nicht genau genug ist, so ist das natürlich ärgerlich. Man ist daran dann aber selbst schuld!)

Liefern konstante oder lineare Interpolation nicht die gewünschte Genauigkeit, so erhöht man die Anzahl der Interpolationspunkte (sehr vorsichtig und sehr skeptisch). Dieses Verfahren muss allerdings nicht von Erfolg gekrönt sein. Da bei Hinzunehmen von mehr Interpolationsdaten einerseits immer höhere Ableitungen in die Fehlerabschätzungen eingehen und andererseits (bei vernünftiger anfänglicher Wahl der ersten Stützstellen) die im weiteren Verlauf hinzugenommenen Stützstellen immer weiter vom Auswertungspunkt entfernt sein werden, muss der Fehler nicht unbedingt kleiner werden.

Nun zur konkreten Lösung: Wir untersuchen zunächst die Güte der konstanten Interpolation. Es ist naheliegend dafür den Wert am nächstgelegenen Tafelwert $x = 1.30$ zu verwenden. Die Fehlerabschätzung lautet hier

$$|0.262364 - \ln(1.31)| \leq \max_{\zeta \in [1.30, 1.31]} \frac{1}{|\zeta|}(1.31 - 1.30) \leq \frac{1}{1.3} \cdot 0.01 = 0.0076923...$$

Da dieser Wert nicht kleiner oder gleich $5 \cdot 10^{-4}$ ist, können wir nicht mit Sicherheit sagen, dass der Wert 0.262364 eine hinreichend genaue Approximation von $\ln(1.31)$ ist. (Wir betonen allerdings auch, dass wir auch nicht behaupten können, dass die Approximation 0.262364 bestimmt zu schlecht ist, da wir ja nur die Aussage der Abschätzung benutzen können. Dass der tatsächliche Fehler 0.007663137... ist — unsere Abschätzung also ganz realistisch ausfällt — wissen wir in der Praxis ja nicht.)

Für die lineare Interpolation $I_1(x)$ zu den Stützstellen 1.30 und 1.40 erhalten wir

$$\begin{aligned} |I_1(1.31) - \ln(1.31)| &\leq \max_{\zeta \in [1.30, 1.40]} \frac{1}{|\zeta|^2} \cdot \frac{1}{2}(1.31 - 1.30)(1.40 - 1.31) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(1.30)^2} \cdot 0.01 \cdot 0.09 = 0.000266272... \end{aligned}$$

Dieser Wert ist immer noch größer als $2 \cdot 10^{-5}$, und wir müssen den Grad des Interpolationspolynoms auf 2 erhöhen.

Interpoliert man quadratisch mit den Knoten $x_0 = 1.3$, $x_1 = 1.4$, $x_2 = 1.5$, so gilt für den Fehler mit einem $\xi \in (1.3, 1.5)$

$$\begin{aligned} |R_2(1.31)| &= \left|\frac{f'''(\xi)}{3!}(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)\right| = \left|\frac{0.01 \cdot 0.09 \cdot 0.19}{3 \cdot \xi^3}\right| \\ &\leq \left|\frac{0.01 \cdot 0.09 \cdot 0.19}{3 \cdot 1.3^3}\right| = 2.59 \cdot 10^{-5}. \end{aligned}$$

Wählt man die Knoten $x_0 = 1.2$, $x_1 = 1.3$, $x_2 = 1.4$, so gilt für den Fehler mit einem $\xi \in (1.2, 1.4)$

$$\left|R_2(1.31)\right| = \left|\frac{f'''(\xi)}{3!}(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)\right| \leq \frac{0.11 \cdot 0.01 \cdot 0.09}{3 \cdot 1.2^3} = 1.91 \cdot 10^{-5}.$$

Das letzte Interpolationsproblem genügt den Genauigkeitsanforderungen. Nach der Gestalt der Fehlerabschätzung ist auch zu erwarten, dass die Fehlerschranke bei den Knoten 1.2, 1.3, 1.4 kleiner ist als bei den Knoten 1.3, 1.4, 1.5, da die Funktion w aus Satz 14.?? an der Stelle 1.31 im ersten Fall kleiner ist als im zweiten. Dieser Effekt kann natürlich wieder dadurch zunichte gemacht werden, dass die dritte Ableitung der zu interpolierenden Funktion in einem anderen Intervall ausgewertet werden muss. Es ist aber eine gute Faustregel, die Interpolationsknoten möglich nahe bei der Auswertestelle zu wählen.

Mit den Stützstellen 1.2, 1.3, 1.4 erhält man das folgende Schema der dividierten Differenzen:

$$\begin{array}{r|lll}
1.20 & 0.182322 & & \\
 & & 0.800420 & \\
1.30 & 0.262364 & & -0.296700, \\
 & & 0.741080 & \\
1.40 & 0.336472 & &
\end{array}$$

und hiermit aus der Newtonschen Darstellung des Interpolationspolynoms

$$p(1.31) = 0.182322 + 0.800420 \cdot 0.11 - 0.296700 \cdot 0.11 \cdot 0.01 = 0.270042 \ .$$

Tatsächlich ist

$$\ln(1.31) = 0.270027.$$

$\square$

Aufgabe 14.47 *Gegeben sei der folgende Abschnitt einer Wertetabelle der Fehlerfunktion*

$$\Phi(x) := \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\, dt$$

x	$\Phi(x)$
1.2	0.91031398
1.3	0.93400794
1.4	0.95228512
1.5	0.96610515
1.6	0.97634838
1.7	0.98379046

Berechnen Sie aus diesen Daten durch Interpolation einen Näherungswert für $\Phi(1.47)$ *mit einem theoretisch gesicherten relativen Fehler von höchstens* 10^{-4}.

Der Tabellenfehler braucht nicht berücksichtigt zu werden.

Lsung von Aufgabe 14.47

Interpoliert man mit einem Polynom $p_n \in \Pi_n$ vom Grad n mit den Stützstellen x_0, x_1,...,x_n, so ist der absolute Interpolationsfehler

$$\Phi(x) - p_n(x) = \frac{w(x)}{(n+1)!}\Phi^{(n+1)}(\xi),$$

wobei

$$w(x) = \prod_{i=0}^{n}(x - x_i) \quad \text{und} \quad \xi \in I(x, x_0, \ldots, x_n)$$

gilt.

Es ist

$$\Phi'(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \exp(-x^2) \geq 0.$$

Also ist Φ monoton wachsend, und es gilt

$$\Phi(1.47) \geq \Phi(1.4) = 0.95228512.$$

Daher haben wir für den relativen Fehler des Interpolationspolynoms p_n an der Stelle $\bar{x} := 1.47$ die Abschätzung

$$\frac{\Phi(\bar{x}) - p_n(\bar{x})}{\Phi(\bar{x})} = \frac{1}{\Phi(1.4)} \cdot \frac{w(\bar{x})}{(n+1)!}\Phi^{(n+1)}(\xi).$$

Man rechnet schnell nach, dass die Schranken für die Fehler bei konstanter Interpolation mit dem Knoten $x_0 := 1.5$ und bei linearer Interpolation mit den Knoten $x_0 := 1.4$ und $x_1 := 1.5$ noch nicht den Schluss zulassen, dass die Genauigkeitsanforderung erfüllt ist.

Wir betrachten daher die quadratische Interpolation mit den Knoten $x_0 := 1.4$, $x_1 := 1.5$ und $x_2 := 1.6$. Es ist

$$\begin{aligned}
\Phi''(x) &= \frac{-4x}{\sqrt{\pi}} \cdot \exp(-x^2), \\
\Phi'''(x) &= \frac{8x^2 - 4}{\sqrt{\pi}} \cdot \exp(-x^2), \\
\Phi^{(4)}(x) &= \frac{168x(1.5 - x^2)}{\sqrt{\pi}} \cdot \exp(-x^2).
\end{aligned}$$

Wegen

$$\Phi^{(4)}(x) < 0 \quad \text{für alle } x \in I(\bar{x}, x_0, x_1, x_2) = [1.4, 1.6]$$

ist Φ''' monoton fallend in $I(\bar{x}, x_0, x_1, x_2)$. Da Φ''' offensichtlich positiv in $[1.4, 1.6]$ ist, erhält man als Schranke für den relativen Fehler

$$\frac{\Phi(\bar{x}) - p_2(\bar{x})}{\Phi(\bar{x})} \leq \frac{1}{\Phi(1.4)} \cdot \frac{0.07 \cdot 0.03 \cdot 0.13}{3!}\Phi'''(1.4) = 4.44 \cdot 10^{-5}.$$

$p_2(1.47)$ liefert also eine genügend gute Näherung für $\Phi(1.47)$.

Das Newtonsche Interpolationspolynom ergibt sich aus dem Schema der dividierten Differenzen

$$\begin{array}{llll}
1.4 & 0.95228512 & & \\
 & & 0.1382 & \\
1.5 & 0.96610515 & & -0.17884. \\
 & & 0.102432 & \\
1.6 & 0.97634838 & &
\end{array}$$

Damit lautet das Interpolationspolynom

$$p_2(x) = 0.95228512 + 0.1382(x - 1.4) - 0.17884(x - 1.4)(x - 1.5),$$

und man erhält die Näherung

$$p_2(1.47) = 0.9623347.$$

□

Kapitel 15

Numerische Lösung von Gleichungen

15.1 Bisektion

15.2 Fixpunktsatz für kontrahierende Abbildungen

Aufgabe 15.1 *Zeigen Sie mit Hilfe des Fixpunktsatzes über kontrahierende Abbildungen, dass*

$$\lim_{n\to\infty} \underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots\sqrt{2}}}}}_{n \textit{ Wurzeln}} = 2$$

ist.

Lsung von Aufgabe 15.1
Die Folge

$$x_n := \underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots\sqrt{2}}}}}_{n \text{ Wurzeln}}$$

ist rekursiv definiert durch

$$x_{n+1} := \phi(x_n),\ x_0 := 0 \quad \text{mit}\phi\,:\,[-2,\infty) \to \mathbb{R},\ \phi(x) := \sqrt{2+x}.$$

ϕ besitzt offenbar genau die Fixpunkte $x_1 := -1$ und $x_2 := 2$.

Wegen

$$\phi'(x) = \frac{1}{2\sqrt{2+x}} > 0 \quad \text{für alle } x > -2$$

ist ϕ monoton wachsend, wegen $\phi(0) = \sqrt{2} > 0$ bildet ϕ die abgeschlossene Menge $D := [0, \infty)$ in sich ab, und wegen

$$\sup_{x \geq 0} |\phi'(x)| = \phi'(0) = \frac{1}{2\sqrt{2}} < 1$$

ist ϕ kontrahierend auf D. Nach dem Fixpunktsatz für kontrahierende Abbildungen konvergeiert daher die Folge $x_{n+1} := \phi(x_n)$ für jeden Startwert $x_0 \in D$ und insbesondere für $x_0 := 0$. □

Aufgabe 15.2 *Gegeben sei*

$$f \,:\, \mathrm{I\!R} \setminus \{3\} \to \mathrm{I\!R} \;,\; f(x) = 1 - \frac{1}{(x+3)^2}.$$

a) *Zeigen Sie, dass f genau einen positiven und zwei negative Fixpunkte besitzt.*

b) *Zeigen Sie, dass für die Fixpunktiteration*

$$x_{n+1} := f(x_n) \tag{15.1}$$

der positive Fixpunkt anziehend und die negativen Fixpunkte abstoßend sind.

c) *Führen Sie ausgehend von $x_0 = 1$ einen Iterationsschritt der Form (15.1) aus, und schätzen Sie ab, nach wievielen Iterationsschritten sich x_n vom Fixpunkt um weniger als 10^{-3} unterscheidet.*

Lsung von Aufgabe 15.2

a): Es gilt $f(x) = x$ genau dann, wenn

$$p(x) = (1-x)(x+3)^2 - 1 = 0 \;,$$

und da p ein Polynom vom Grade 3 ist, hat p höchstens 3 reelle Nullstellen.

Wegen $f(-4) = 0 > -4$ und $f(-2) = 0 > -2$ und

$$\lim_{x \to -3-0} f(x) = \lim_{x \to -3+0} f(x) = -\infty$$

besitzt f zwei negative Fixpunkte in den Intervallen $(-4, -3)$ und $(-3, -2)$, und wegen $f(0) = 8/9 > 0$ und $f(1) = 15/16 < 1$ besitzt f einen positiven Fixpunkt $x_+ \in (0, 1)$.

b): Es ist

$$f'(x) = \frac{2}{(x+3)^3}$$

monoton fallend in $(-\infty, -3) \cup (-3, \infty)$.

Daher gilt

$$\max_{0 \le x \le 1} |f'(x)| = \max(|f'(0)|, |f'(1)|) = \frac{2}{27} < 1 \ ,$$

d.h. $|f'(x_+)| < 1$, und x_+ ist ein anziehender Fixpunkt, und

$$|f'(x)| > 2 \quad \text{für alle } x \in (-4, -3) \cup (-3, -2) \ ,$$

d.h. die beiden negativen Fixpunkte sind abstoßend.

c): Um den Fixpunktsatz für kontrahierende Abbildungen anwenden zu können, benötigen wir ein Intervall I, das x_+ enthält, das durch f in sich abgebildet wird und auf dem f kontrahierend ist.

Da f auf $\mathbb{R}_+$ monoton wachsend ist und nach oben durch 1 beschränkt ist, gilt

$$f([0,\infty)) = [f(0), 1] = \left[\frac{8}{9}, 1\right] =: I$$

und dann erst recht $f(I) \subset I$.

Da $|f'(x)|$ auf $\mathbb{R}_+$ monoton fällt, gilt

$$\max_{x \in I} |f'(x)| = \left|f'(8/9)\right| = \frac{1458}{42875} \le 0.035 \ .$$

f ist also kontrahierend auf I mit der Kontraktionskonstante $L = 0.035$. Die a priori Abschätzung des Fixpunktsatzes liefert wegen $x_1 = f(x_0) = 15/16$

$$|x_+ - x_n| \le \frac{L^n}{1-L}|x_1 - x_0| = \frac{0.035^n}{0.966} \cdot \frac{1}{16} \ ,$$

und daher ist $|x_+ - x_n| < 10^{-3}$ für $n = 2$ gesichert:

$$\frac{L^2}{1-L}|x_1 - x_0| = 7.9 \cdot 10^{-5} \ .$$

□

Aufgabe 15.3 *a) Wieviele Fixpunkte besitzt die Funktion $f(x) := \tan x$?*

b) Bestimmen Sie numerisch den kleinsten positiven Fixpunkt von $f(x) = \tan x$ und führe eine Fehlerabschätzung durch.

c) Ist der in b) bestimmte Fixpunkt anziehend für die Iteration $x_{n+1} = \tan x_n$?

Lsung von Aufgabe 15.3

a): Die Funktion f ist in jedem der Intervall $I_n := (\frac{2n-1}{2}\pi, \frac{2n+1}{2}\pi)$, $n \in \mathbb{N}$, stetig mit

$$\lim_{x \to 0.5(2n-1)\pi+0} f(x) = -\infty \quad \text{und} \quad \lim_{x \to 0.5(2n+1)\pi-0} f(x) = \infty.$$

Nach dem Zwischenwertsatz besitzt f in jedem der Intervalle I_n (wenigstens) einen Fixpunkt.

Für $\phi(x) := x - \tan x$ gilt $\phi'(x) = 1 - 1/\cos^2 x < 0$ für alle $x \in I_n \setminus \{n\pi\}$. ϕ ist also streng monoton fallend in I_n, und daher besitzt f in jedem der Intervalle I_n genau einen Fixpunkt, insgesamt also abzählbar viele.

b & c): Der eindeutige Fixpunkt von $\tan x$ im Intervall I_0 ist $x = 0$, also nicht positiv. Gesucht ist also der Fixpunkt $\bar{x}$ von f im Intervall $I_2 = (\pi/2, 3\pi/2)$.

Da $f'(x) = 1/\cos^2 x > 1$ für alle $x \in I_2 \setminus \{\pi\}$ gilt und $\bar{x} \neq \pi$, ist $\bar{x}$ sicher abstoßend für die Iteration $x_{n+1} = \tan x_n$. Wir approximieren $\bar{x}$ mit der Iteration

$$x_{n+1} := \arctan_1(x_n) = \arctan_0(x_n) + \pi =: \phi(x_n), \; x_0 := \pi.$$

Man erhält die Näherungen

n	x_n
0	3.141593
1	4.404220
2	4.489119
3	4.493207
4	4.493400
5	4.493409

Die Fehlerabschätzung kann man prinzipiell mit Hilfe des Kontraktionssatzes bestimmen. Einfacher ist es aber, den Zwischenwertsatz zu verwenden. Wir stören die letzte Iterierte x_5 nach unten und oben um $\varepsilon > 0$. Gilt dann

$$\phi(x_5 - \varepsilon) > x_5 - \varepsilon \quad \text{und} \quad \phi(x_5 + \varepsilon) < x_5 + \varepsilon,$$

so besitzt ϕ einen Fixpunkt im Intervall $(x_5 - \varepsilon, x_5 + \varepsilon)$.

Mit $\varepsilon = 10^{-6}$ erhält man

$$\phi(4.493408) = 4.493409389 > 4.493408, \; \phi(4.493410) = 4.493409483 < 4.493410.$$

Daher besitzt ϕ, und damit f, einen Fixpunkt im Intervall

$$[4.493408, 4.493410].$$

□

Aufgabe 15.4 *Bestimmen Sie Näherungen für alle reellen Nullstellen*

$$f(x) = x^{33} + 3x - 1$$

bis auf (theoretisch abgesicherte) absolute Fehler von maximal 10^{-10}.

Lsung von Aufgabe 15.4
Die Ableitung der Funktion

$$f(x) = x^{33} + 3x - 1$$

ist

$$f'(x) = 33 \cdot x^{32} + 3$$

offensichtlich überall positiv. f selbst ist damit streng monoton und besitzt (wenn überhaupt) höchstens eine Nullstelle.

Aus einer schnellen Skizze der Funktion (oder aus der Berechnung einiger Funktionswerte) schließen wir, dass eine Nullstelle $\bar{x}$ irgendwo im Intervall $(0, 1)$ liegen sollte. Wenn diese nicht zu dicht bei 1 liegt, wird der Term x^{33} in der Funktion bei dieser Stelle sehr klein werden. Indem wir ihn einfach einmal vernachlässigen, kommen wir zu der Vermutung, dass die Nullstelle ungefähr gleich der Nullstelle der linearen (Rest-) Funktion

$$g(x) = 3x - 1$$

sein sollte. Dies gibt uns die Approximation

$$\hat{x} = 1/3.$$

Um zu zeigen, dass diese Näherung hinreichend genau ist, kann man nun verschiedene Wege gehen.

Einerseits kann man feststellen, dass bei $\hat{x}$ offenbar

$$|f(\hat{x})| = (\hat{x})^{33} = 3^{-33} \quad (< 10^{-15})$$

ist und $|f'(x)| \geq 3$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Hiermit folgt wie in Aufgabe 14.?? nach dem Mittelwertsatz, dass für die Nullstelle $\bar{x}$

$$f(\hat{x}) = f(\hat{x}) - f(\bar{x}) = f'(\xi)(\hat{x} - \bar{x})$$

mit einem ξ zwischen $\hat{x}$ und $\bar{x}$ gilt, und daher folgt

$$|\hat{x} - \bar{x}| = \frac{f(\hat{x})}{f'(\xi)} \leq 3^{-34} < 10^{-16}.$$

Andererseits kann man wieder $\hat{x}$ nach links und rechts geeignet stören und den Zwischenwertsatz verwenden.

Zum dritten und vierten und ... sind Fixpunktzugänge und vieles andere natürlich auch möglich. □

Aufgabe 15.5 *Untersuchen Sie, ob der Fixpunkt $\bar{x} = 0$ der Abbildungen $\phi_j : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,*

$$\phi_1(x) := x - x^3,\ \ \phi_2(x) := x + x^3,\ \ \phi_3(x) := x + x^2$$

anziehend oder abstoßend für die Iteration $x_{n+1} := \phi_j(x_n)$, $n \in \mathbb{N}$, ist.

Lsung von Aufgabe 15.5

Zunächst ist $\bar{x}$ Fixpunkt jeder der Abbildungen ϕ_j, und es gilt $\phi_j'(\bar{x}) = 1$, $j = 1, 2, 3$. Man kann also mit Hilfe von $\phi_j'(\bar{x})$ nicht entscheiden, von welchem Typ $\bar{x}$ ist.

$\bar{x}$ ist ein anziehender Fixpunkt von ϕ_1, denn für $x_0 \in (-1, 0)$ gilt

$$x_1 = \phi_1(x_0) = x_0 - x_0^3 > x_0, \quad x_1 = x_0(1 - x_0^2) < 0.$$

Durch Induktion erhält man genauso, dass die Folge $\{x_n\}$ monoton wachsend und nach oben beschränkt ist, also konvergent gegen ein $\hat{x} \in (-1, 0]$, und hierfür gilt

$$\hat{x} = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x_n(1 - x_n^2) = \hat{x}(1 - \hat{x}^2),$$

d.h. $\hat{x} = 0$.

Sehr ähnlich sieht man, dass für $x_0 \in (0, 1)$ die Folge $\{x_n\}$ monoton fallend gegen $\bar{x} = 0$ konvergiert.

$\bar{x}$ ist abstoßender Fixpunkt für ϕ_2, denn für $x_0 < 0$ gilt $\phi_2(x_0) = x_0 + x_0^3 < x_0$ und für $x_0 > 0$ gilt $\phi_2(x_0) = x_0 + x_0^3 > x_0$. Die Iteration entfernt sich also in jedem Fall vom Fixpunkt.

Für ϕ_3 ist $\bar{x}$ weder anziehend noch abstoßend, denn für $x_0 \in (-1, 0)$ gilt $x_1 = x_0 + x_0^2 > x_0$ und $x_1 = x_0(1 + x_0) < 0$, und man erhält wie für ϕ_1 monotone Konvergenz gegen $\bar{x}$, und für $x_0 > 0$ ist $x_1 = x_0 + x_0^2 > x_0$ und die Folge $\{x_n\}$ divergiert bestimmt. □

15.3 Newton Verfahren

Aufgabe 15.6 *a) Wie lautet das Newton Verfahren zur Berechnung von* $\sqrt[3]{a}$.

b) Geben Sie für den relativen Fehler

$$\delta_n := \frac{x_n - \sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{a}}$$

eine Rekursionsformel $\delta_{n+1} = g(\delta_n)$ *an. Untersuchen Sie das Konvergenzverhalten der Folge* $\{x_n\}$ *für* $x_0 > 0$.

c) $\sqrt[3]{a}$ *soll auf* 10 *gültige Dezimalstellen genau berechnet werden. Bestimmen Sie für* $10^{-3} \le a < 1$ *und* $x_0 := 1$ *die maximale Anzahl der Newton Iterationen, die benötigt werden, um diese Genauigkeit zu erreichen.*

Lsung von Aufgabe 15.6
a): $\sqrt[3]{a}$ ist die eindeutige Nullstelle von $f(x) := x^3 - a$. Das Newton Verfahren hierfür lautet

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^3 - a}{3x_n^2} = \frac{1}{3}\Big(2x_n + \frac{a}{x_n^2}\Big). \tag{15.2}$$

b): Es gilt $x_n = \sqrt[3]{a}(1 + \delta_n)$. Daher folgt aus (15.2)

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \frac{1}{3}\Big(2\sqrt[3]{a}(1+\delta_n) + \frac{a}{\sqrt[3]{a^2}(1+\delta_n)^2}\Big) \\ &= \frac{1}{3}\sqrt[3]{a}\Big(2(1+\delta_n) + \frac{1}{(1+\delta_n)^2}\Big). \end{aligned}$$

Für den relativen Fehler δ_{n+1} von x_{n+1} erhält man

$$\begin{aligned} \delta_{n+1} &= \frac{x_{n+1} - \sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{a}} = \frac{1}{3}\Big(2(1+\delta_n) + \frac{1}{(1+\delta_n)^2} - 3\Big) \\ &= \frac{1}{3(1+\delta_n)^2}\Big(2(1+\delta_n)^3 + 1 - 3(1+\delta_n)^2\Big) \\ &= \frac{3 + 2\delta_n}{3(1+\delta_n)^2}\delta_n^2. \end{aligned} \tag{15.3}$$

Dies ist die gesuchte Rekursion für den relativen Fehler.

Ist $x_0 > 0$, so gilt

$$\delta_0 = \frac{x_0 - \sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{a}} > -1,$$

und aus (15.3) folgt $\delta_1 > 0$ und dann durch vollständige Induktion

$$\delta_n > 0 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Damit sind wegen $\delta_n = (x_n - \sqrt[3]{a})/\sqrt[3]{a}$ alle x_n obere Schranken für $\sqrt[3]{a}$.

Aus (15.3) folgt

$$0 < \delta_{n+1} < \frac{2}{3}\delta_n \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}, \tag{15.4}$$

denn

$$\begin{aligned} \delta_{n+1} < \frac{2}{3}\delta_n \quad &\Longleftrightarrow \quad 3\delta_n^2 + 2\delta_n^3 < \frac{2}{3}\delta_n \cdot 3(1+\delta_n)^2 \\ &\Longleftrightarrow \quad 3\delta_n + 2\delta_n^2 < 2 + 4\delta_n + 2\delta_n^2 \quad \Longleftrightarrow \quad 0 < 2 + \delta_n, \end{aligned}$$

und die letzte Ungleichung ist offensichtlich richtig. Aus (15.4) folgt die Konvergenz von $\{\delta_n\}$ gegen 0, also die Konvergenz von $\{x_n\}$ gegen $\sqrt[3]{a}$. Aus (15.3) erhält man dann natürlich die quadratische Konvergenz.

c): Aus $10^{-3} \le a < 1$ folgt mit $x_0 = 1$

$$\delta_0 = (1 - \sqrt[3]{a})/\sqrt[3]{a} \in (0, 9].$$

Daher erhält man aus (15.4)

n	$\delta \le$
0	$9.0\ E+0$
1	$5.7\ E+0$
2	$3.5\ E+0$
3	$1.2\ E+0$
4	$1.0\ E+0$
5	$4.3\ E-1$
6	$1.2\ E-1$
7	$1.2\ E-2$
8	$1.4\ E-3$
9	$1.0\ E-7$
10	$3.9\ E-15$

Spätestens nach 10 Schritten ist also der relative Fehler als 10^{-10}. □

Aufgabe 15.7 *Bestimmen Sie alle Nullstellen von*

$$f(x) := x^2 - 1 - \cos(x)$$

approximativ mit einer absoluten Genauigkeit von 10^{-2}.

Lsung von Aufgabe 15.7

Bevor man mit irgendwelchen Iterationen beginnt, überlegt man sich am besten zunächst einmal, wieviele Nullstellen es denn genau gibt, die man berechnen muss.

Abbildung 15.1: ZuAufgabe 15.7

Aus einer einfachen Skizze (Abbildung 15.1) von $x^2 - 1$ und $\cos(x)$ (man sucht ja Schnittpunkte von deren Graphen) vermutet man, dass man genau zwei Nullstellen zu bestimmen hat. Während des Skizzierens fällt einem vielleicht auf, dass die gegebene Funktion gerade ist. Mit $\bar{x}$ ist demnach also auch $-\bar{x}$ eine Nullstelle. Hat man eine Approximation $\hat{x}$ für eine positive Nullstelle $\bar{x}$ mit der erforderlichen Genauigkeit gefunden, so ist dann trivialerweise auch $-\hat{x}$ eine entsprechend genaue Approximation für die negative Nullstelle $-\bar{x}$.

Nach diesen Vorüberlegungen (und der Bemerkung, dass Null selbst offenbar keine Nullstelle ist) reicht jetzt also zur vollständigen Lösung der Aufgabe der Nachweis, dass es genau eine positive Nullstelle gibt, sowie ihre Approximation mit Fehlerabschätzung.

Da $x^2 - 1$ in $\mathbb{R}_+$ offenbar monoton wachsend ist, können wir uns in unseren Untersuchungen auf das Intervall $[0, \pi]$ beschränken, denn bei π ist $x^2 - 1$ offenbar größer als 1 und bleibt danach auch größer als 1. Da der Kosinus andererseits den Wert 1 nie überschreiten kann, können die Graphen von cos und $x^2 - 1$ sich für Werte größer als π sicher nie schneiden.

Wegen $f(0) = -2 < 0$ und $f(\pi) = \pi^2 > 0$ sichert der Zwischenwertsatz für die stetige Funktion f die Existenz einer Nullstelle im noch betrachteten Intervall.

Da $f'(x) = 2x + \sin(x)$ in $(0, \pi)$ größer als Null ist, ist f in diesem Intervall strikt monoton wachsend. Es kann daher auch nur eine einzige Nullstelle geben.

Wir können nun beruhigt zu ihrer Approximation schreiten:

Da von uns eine Fehlerabschätzung erwartet wird, könnten wir auf den (unguten!!) Gedanken verfallen, eine schöne allgemeine Fixpunktiteration zu exekutieren, um mit der a priori oder a posteriori Abschätzung den Fehler in den Griff zu bekommen. Wenn uns unsere Zeit lieb ist, werden wir uns bei einer solch schönen differenzierbaren Funktion darauf nicht einlassen, solange uns dies in der Aufgabe nicht vorgeschrieben wird.

Wir führen einfach ein paar Newton-Schritte (oder Sekanten-Schritte) aus:

$$\begin{aligned}
x_0 &= 1 \qquad \text{(das raten wir ganz brutal, Newton ist ja schnell)}\\
x_1 &= 1.190148803,\\
x_2 &= 1.176568801,\\
x_3 &= 1.176501942,\\
x_4 &= 1.176501940.
\end{aligned}$$

Von nun ab liefert unser Rechner stets denselben Wert. Normalerweise ist dies nun die Nullstelle bis auf Rechnergenauigkeit. Aber bei diesen Mathematikern weiß man ja nie. Eine Aussage darüber, dass dies immer so sein muss, steht nirgends im Skript. Vielleicht kann man ja doch Funktionen konstruieren, bei denen das Verfahren an einer "Nicht-Nullstelle" stehen bleibt (man kann!!). Außerdem ist die gerne benutzte Faustregel, dass die Abstände zweier Iterationswerte eine gute Schätzung des aktuellen Fehlers sind, eben nur eine Faustregel ist.

Wie kommt man dann aber zu einer wirklichen Fehlerabschätzung?

Ganz einfach: Man zieht von der vermuteten Nullstellennäherung $\hat{x} = 1.176501940$ die vorgegeben Fehlertoleranz (oder weniger) ab

$$x_l := 1.176501940 - 10^{-2},$$

addiert sie ebenso

$$x_r := 1.176501940 + 10^{-2},$$

wertet aus

$$f(x_l) = -0.03264..., \quad f(x_r) = 0.03288...,$$

findet einen Vorzeichenwechseln und schließt mit dem Zwischenwertsatz auf die Existenz einer Nullstelle von f in (x_l, x_r). Da $\hat{x}$ in der Mitte des Intervalles liegt und das Intervall sich zu beiden Seiten von $\hat{x}$ nur um die Toleranz von 10^{-2} (oder weniger) erstreckt, kann die Nullstelle auch nur um diese Toleranz von $\hat{x}$ entfernt sein.

Alles in allem sind

$$-1.176501940 \qquad \text{und} \qquad 1.176501940$$

die gewünschten Nullstellenapproximationen. $\square$

Aufgabe 15.8 *Bestimmen Sie näherungsweise alle Nullstellen der Funktion*

$$f(x) = e^x - 3x^2 \ .$$

Führen Sie für die Näherungen eine Fehlerabschätzung durch.

Lsung von Aufgabe 15.8
Wegen $f'(x) = e^x - 6x$, $f''(x) = e^x - 6$, $f'''(x) = e^x > 0$ besitzt f höchstens 3 Nullstellen, denn wenn f 4 Nullstellen hat, so hat f' nach dem Satz von Rolle wenigstens 3 Nullstellen, f'' wenigstens 2 Nullstellen und f''' wenigstens eine Nullstelle.

Wegen

$$\begin{aligned} f(-1) = e^{-1} - 3 < 0 < f(0) = 1 \quad &, \quad f(1) = e - 3 < 0 \ , \\ f(3) = e^3 - 27 \approx -6.9 < 0 \quad &, \quad f(4) = e^4 - 48 \approx 6.6 > 0 \end{aligned}$$

besitzt f nach dem Zwischenwertsatz drei Nullstellen

$$\tilde{x} \in (-1, 0) \ , \ \hat{x} \in (0, 1) \ , \ \bar{x} \in (3, 4)$$

Um diese näherungsweise zu bestimmen, wenden wir das Newton-Verfahren an, wobei wir als Startwerte die Mittelpunkte der oben ermittelten einschließenden Intervalle verwenden. Wir brechen die Iteration ab, wenn der Zuwachs kleiner als 10^{-5} ist. Um eine Fehlerabschätzung zu erhalten stören wir die letzte Iterierte x_n nach oben und unten um $\varepsilon = 10^{-5}$ und prüfen, ob $f(x_n + \varepsilon)$ und $f(x_n - \varepsilon)$ entgegengesetztes Vorzeichen haben. Ist dies der Fall, so existiert nach dem Zwischenwertsatz eine Nullstelle in $[x_n - \varepsilon, x_n + \varepsilon]$.

Mit dem Startwert $x_0 = -0.5000000$ erhält man die Näherungen

n	x_n	$x_n - x_n - 1$
1	-0.4602195700	0.0397804300
2	-0.4589635184	0.0012560517
3	-0.4589622675	0.0000012508

und wegen

$$f(x_3 - 10^{-5}) = -3.39 \cdot 10^{-5} \ , \quad f(x_3 + 10^{-5}) = 3.39 \cdot 10^{-5}$$

besitzt f eine Nullstelle in dem Intervall $(x_3 - 10^{-5}, x_3 + 10^{-5})$.

Mit dem Startwert $x_0 = 0.5000000$ erhält man

n	x_n	$x_n - x_n - 1$
1	1.1650894824	0.6650894824
2	0.9362269376	−0.2288625449
3	0.9103966649	−0.0258302727
4	0.9100076619	−0.0003890030
5	0.9100075725	−0.0000000894

und wegen

$$f(x_5 - 10^{-5}) = 2.98 \cdot 10^{-5}\ , \quad f(x_5 + 10^{-5}) = -2.98 \cdot 10^{-5}$$

besitzt f eine Nullstelle in dem Intervall $(x_5 - 10^{-5}, x_5 + 10^{-5})$.

Mit dem Startwert $x_0 = 3.5000000$ erhält man

n	x_n	$x_n - x_n - 1$
1	3.7999927740	0.2999927740
2	3.7369348206	−0.0630579534
3	3.7330926865	−0.0038421341
4	3.7330790288	−0.0000136577
5	3.7330790286	−0.0000000002

und wegen

$$f(x_5 - 10^{-5}) = -1.94 \cdot 10^{-4}\ , \quad f(x_5 + 10^{-5}) = 1.94 \cdot 10^{-4}$$

besitzt f eine Nullstelle in dem Intervall $(x_5 - 10^{-5}, x_5 + 10^{-5})$. □

Aufgabe 15.9 *Für $f \in C^2[x_0 - r, x_0 + r]$ gelte $f'(x) \neq 0$ für alle $x \in I := [x_0 - r, x_0 + r]$, und es existiere $q \in (0, 1]$ mit*

$$\Big|\frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2}\Big| \leq q \quad \textit{für alle } x \in I \tag{15.5}$$

und

$$\Big|\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}\Big| \leq (1 - q)r. \tag{15.6}$$

Zeigen Sie, dass dann f in I eine eindeutige Nullstelle $\bar{x}$ besitzt und dass das Newton Verfahren quadratisch gegen $\bar{x}$ konvergiert.

Lsung von Aufgabe 15.9
Mit
$$\phi(x) := x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$
kann man das Newton Verfahren schreiben als $x_{n+1} := \phi(x_n)$.

Wegen $f \in C^2(I)$ und $f'(x) \neq 0$ in I ist ϕ stetig differenzierbar in I und
$$\phi'(x) = 1 - \frac{(f'(x))^2 - f(x)f''(x)}{(f'(x))^2} = \frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2}.$$
Wegen (15.5) ist ϕ nach Bemerkung 16.4 kontrahierend auf I mit der Kontraktionskonstante q, und wegen (15.6) besitzt nach Satz 16.2 ϕ genau einen Fixpunkt $\bar{x}$ in I (also f genau eine Nullstelle in I), und das Verfahren $x_{n+1} := \phi(x_n)$, also das Newton Verfahren, konvergiert gegen den $\bar{x}$. Wegen $f'(\bar{x}) \neq 0$ ist die Konvergenz wie in ??.?? quadratisch. □

Aufgabe 15.10 *a) Es sei $f : I \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und konvex in dem Intervall I mit $f'(x) > 0$ für alle $x \in I$.*

Zeigen Sie: Besitzt f eine Nullstelle $\bar{x} \in I$, so konvergiert das Newton Verfahren für jeden Startwert $x_0 \in I$ mit $x_0 > \bar{x}$ monoton fallend gegen $\bar{x}$.

b) Formulieren Sie weitere Bedingungen, unter denen das Newton Verfahren monoton konvergiert.

Lsung von Aufgabe 15.10
a): Wegen $f'(x) > 0$ ist f streng monoton wachsend in I, und es gilt für $f(x_0) > 0$. Da f konvex in I ist, gilt für die Tangente an f in x_0
$$t(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \le f(x) \quad \text{für alle } x \in I.$$
Wegen $t'(x) = f'(x_0) > 0$ und $t(x_0) = f(x_0) > 0$ gilt für die Nullstelle x_1 von t (die erste Newton Iterierte) $x_1 < x_0$,und wegen $0 = t(x_1) \le f(x_1)$ gilt $x_1 \ge \bar{x}$ (vgl. Abbildung 15.2, links).

Mit einem trivialen Induktionsbeweis sieht man, dass durch das Newton Verfahren eine monotone Folge $\{x_n\}$ erzeugt wird, die nach unten durch $\bar{x}$ beschränkt ist, also gegen ein $\hat{x} \ge \bar{x}$ konvergiert.

Wegen der Stetigkeit von $\phi(x) := x - f(x)/f'(x)$ auf I folgt
$$\hat{x} = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \phi(x_n) = \hat{x} - \frac{f(\hat{x})}{f'(\hat{x})},$$

Abbildung 15.2: Zu Aufgabe 15.10

d.h. $f(\hat{x}) = 0$, und da f in I streng monoton wachsend ist, also höchstens eine Nullstelle besitzt, folgt $\hat{x} = \bar{x}$. Die quadratische Konvergenz ist nicht gesichert, da wir f nur als einmal stetig differenzierbar vorausgesetzt haben.

b): Mit ähnlichen Überlegungen wie in Teil a) erhält man, dass das Newton Verfahren monoton fallend konvergiert, wenn f konkav und streng monoton fallend ist (vgl. Abbildung 15.2, rechts) und dass das Newton Verfahren monoton wachsend konvergiert, wenn $x_0 < \bar{x}$ gilt und wenn f streng monoton wachsend und konkav ist oder wenn f streng monoton fallend und konvex ist. □

Aufgabe 15.11 *a) Es sei* $\boldsymbol{A}_n \in \mathbb{R}^{(n,n)}$, $n \geq 3$, *eine symmetrische Tridiagonalmatrix mit* $a_i i =: \alpha_i$, $i = 1, \ldots, n$, *und* $a_{i,i+1} = a_{i+1,i} = \beta_i$, $i = 1, \ldots, n-1$, *und* $a_{ij} = 0$ *für* $|i - j| \geq 2$.

Zeigen Sie, dass das charakteristische Polynom

$$\chi_n(\lambda) := \det(\boldsymbol{A}_n - \lambda_{\boldsymbol{E}_n})$$

die Rekursion

$$\chi_n(\lambda) = (\alpha_n - \lambda)\chi_{n-1}(\lambda) - \beta_{n-1}^2\chi_{n-2}(\lambda), \tag{15.7}$$

$$chi_1(\lambda) = \alpha_1 - \lambda,\ \chi_2(\lambda) = (\alpha_1 - \lambda)(\alpha_2 - \lambda) - \beta_1^2 \tag{15.8}$$

erfüllt.

b) *Wie kann man die Rekursion in dem Newton Verfahren zur Bestimmung einer Nullstelle von χ_n nutzen.*

c) *Zeigen Sie, dass das Newton Verfahren für χ_n für jeden Startwert λ_0, der größer als jeder Eigenwert von $\boldsymbol{A}_n$ ist, monoton fallend gegen den maximalen Eigenwert von $\boldsymbol{A}_n$ konvergiert, und dass es für jeden Startwert, der kleiner als jeder Eigenwert von $\boldsymbol{A}_n$ ist, gegen den minimalen Eigenwert monoton fallend konvergiert.*

d) *Ist die Eigenschaft aus Teil c) eine Besonderheit des charakteristischen Polynoms χ_n, oder konvergiert das Newton Verfahren stets monoton gegen die maximale Nullstelle eines Polynoms, wenn man nur mit einer oberen Schranke startet.*

e) *Bestimmen Sie den minimalen und den maximalen Eigenwert der tridiagonalen Matrix $\boldsymbol{A}{\in}\mathbb{R}^{(10,10)}$ mit den Elementen $\alpha_i = i$ und $\beta_i := -1$.*

Lsung von Aufgabe 15.11

a): Die Anfangsbedingungen in (15.8) sind unmittelbar klar. Die Rekursion in (15.7) erhält man durch zweimalige Entwicklung der Determinante $\det(\boldsymbol{A}_n - \lambda\boldsymbol{E}_n)$ nach der letzten Zeile. Wir haben dies in Aufgabe 5.6 für Determinanten von Tridiagonalmatrizen schon durchgeführt.

b): Durch Differenzieren der Rekursion (15.7) erhält man

$$\chi_n'(\lambda) = -\chi_n(\lambda) + (\alpha_n - \lambda)\chi_{n-1}'(\lambda) - \beta_{n-1}^2\chi_{n-2}'(\lambda),$$

und aus (15.8) folgen die Anfangsbedingungen

$$\chi_1'(\lambda) = -1,\ \chi_2'(\lambda) = 2\lambda - \alpha_1 - \alpha_2.$$

Das Newton Verfahren kann man daher bei gegebener Anfangsnäherung λ auf die folgende Weise durchführen:

repeat

$a_0 := \alpha_1 - \lambda;\ a_1 := a_0 * (\alpha_2 - \lambda);$

$b_0 := -1;\ b_1 := 2 * \lambda - \alpha_1 - \alpha_2;$

for $k := 2$ to n do

$a_2 := (\alpha_k - \lambda) * a_1 - \beta_{k-1}^2 * a_0;$

$b_2 := -a_1 + (\alpha_k - \lambda) * b_1 - \beta_{k-1}^2 * b_0;$

$a_0 := a_1;\ a_1 := a_2;\ b_0 := b_1;\ b_1 := b_2;$

$h := a2/b2;$

$\lambda := \lambda - h;$

until $|h|$ <tol

c): Ist der Grad n von χ_n gerade, so hat χ_n die Gestalt

$$\chi_n(\lambda) = \lambda^n + \sum_{k=0}^{n-1} \gamma_k \lambda^k.$$

Bezeichnet λ_n den maximalen Eigenwert von $\boldsymbol{A}_n$, so gilt also

$$\chi_n(\lambda) > 0 \quad \text{für alle } \lambda > \lambda_n.$$

Da $\boldsymbol{A}_n$ reell und symmetrisch ist, sind alle Eigenwerte von $\boldsymbol{A}_n$ reell. χ_n hat also n reelle Nullstellen. Nach dem Satz von Rolle hat χ_n' $n-1$ reelle Nullstellen, die kleiner oder gleich λ_n sind, und χ_n'' hat $n-2$ reelle Nullstellen, die ebenfalls kleiner oder gleich λ_n sind. Damit gilt

$$\chi_n'(\lambda) > 0 \quad \text{und} \quad \chi_n''(\lambda) > 0 \quad \text{für alle } \lambda > \lambda_n.$$

Es ist also χ streng monoton und strikt konvex für $\lambda > \lambda_n$, und nach Aufgabe 15.10 konvergiert das Newton Verfahren monoton fallend gegen λ_n.

Ist der Grad von χ_n ungerade, so erhält man genauso

$$\chi_n'(\lambda) < 0 \quad \text{und} \quad \chi_n''(\lambda) < 0 \quad \text{für alle } \lambda > \lambda_n,$$

und das Newton Verfahren konvergiert nach Aufgabe 15.10, b), monoton fallend gegen λ_n. Entsprechend sieht man ein, dass für Startwerte, die kleiner als der minimale Eigenwert λ_1 sind, das Newton Verfahren monoton wachsend gegen λ_1 konvergiert.

d): Wir haben eben benötigt, dass das charakteristische Polynom χ_n n reelle Nullstellen besitzt, um die Konvexität und Monotonie von χ_n für $\lambda > \lambda_n$ zu erhalten.

Für Polynome, die diese Eigenschaft nicht haben gilt die Monotonieaussage nicht. Das Polynom

$$p(x) := x^3 + x^2 + x + 1$$

Abbildung 15.3: ZuAufgabe 15.12

hat als einzige reelle Nullstelle $\hat{x} = -1$. Mit der oberen Schranke $x_0 := -0.9$ der maximalen Nullstelle von p erhält man im ersten Schritt des Newton Verfahrens $x_1 = -1.0110$ und danach monotone Konvergenz von unten gegen $\hat{x}$.

e): Nach dem Satz von Gerschgorin ist klar, dass alle Eigenwerte von $\boldsymbol{A}$ in dem Intervall $[0, 11]$ liegen. Mit den Startwerten $\lambda_0 := 0$ und $\lambda_0 := 11$ liefert das Newton Verfahren die folgenden Schranken für die beiden extremalen Eigenwerte.

0.00000000	11.00000000
0.10528264	10.83433516
0.14212249	10.74664581
0.14630983	10.74619465
0.14636045	10.74619418.

□

Aufgabe 15.12 *Zeigen Sie, dass in Abbildung 15.3 der Punkt P der Mittelpunkt der Strecke $\overline{0Q}$ ist.*

Welche Aussage der Vorlesung über das Newton-Verfahren wird hiermit durch ein Beispiel belegt?

Lsung von Aufgabe 15.12

Seien p und q die x-Koordinaten der entsprechende Punkte. Dann ergibt sich p aus q durch einen Newton-Schritt zur Bestimmung der Nullstelle von $y = ax^2$:

$$p = q - \frac{aq^2}{2 \cdot a \cdot q} = \frac{q}{2}.$$

Das Ergebnis bedeutet: Der Abstand eine Newton-Iterationswertes von der doppelten Nullstelle wird bei jedem Schritt des Newton-Verfahrens halbiert. Dies zeigt, dass die Konvergenz des Newton-Verfahrens gegen die doppelte Nullstelle $x = 0$ tatsächlich nur linear ist. □

Aufgabe 15.13 *Es sei $\phi \in C^p[a,b]$ für ein $p > 1$, es sei $\bar{x} \in (a,b)$ ein Fixpunkt von ϕ, und es gelte*

$$\phi^{(j)}(\bar{x}) = 0 \quad \textit{für } j = 1, \dots, p-1.$$

Zeigen Sie, dass es dann eine Umgebung $U(\bar{x}) := (\bar{x} - \varepsilon, \bar{x} + \varepsilon)$ von $\bar{x}$, so dass für alle Startwerte $x_0 \in U(\bar{x})$ die Folge $\{x_n\}$, die definiert ist durch $x_{n+1} := \phi(x_n)$ von mindestens der Ordnung p gegen $\bar{x}$ konvergiert.

Lsung von Aufgabe 15.13

Für alle $x \in (a,b)$ erhält man durch Taylorentwicklung von ϕ an der Stelle $\bar{x}$ mit einem $\xi = \xi(x) \in (a,b)$

$$\phi(x) = \sum_{j=0}^{p-1} \frac{\phi^{(j)}(\bar{x})}{j!}(x - \bar{x})^j + \frac{\phi^{(p)}(\xi)}{p!}(x - \bar{x})^p = \phi(\bar{x}) + \frac{\phi^{(p)}(\xi)}{p!}(x - \bar{x})^p.$$

Daher folgt für $x_n \in (a,b)$

$$|x_{n+1} - \bar{x}| = |\phi(x_n) - \phi(\bar{})| = |\frac{\phi^{(p)}(\xi(x_n))}{p!}(x - \bar{x})^p|.$$

Mit

$$C := \max\{\frac{1}{p!}|\phi^{(p)}(\xi)| \; : \; a \leq \xi \leq b\}$$

folgt also

$$|x_{n+1} - \bar{x}| \leq C \cdot |x_n - \bar{x}|^p. \tag{15.9}$$

Wir wählen $U(\bar{x})$ nun so klein, dass

$$|x - \bar{x}| \leq \frac{1}{2} C^{-1/(p-1)} \quad \text{für alle } x \in U(\bar{x})$$

gilt. Dann folgt für $x_0 \in U(\bar{x})$

$$|x_1 - \bar{x}| \leq C|x_0 - \bar{x}|^p = (C|x_0 - \bar{x}|^{p-1}) \cdot |x_0 - \bar{x}| \leq \frac{1}{2^{p-1}}|x_0 - \bar{x}|.$$

Es gilt also $x_1 \in U(\bar{x})$, und durch Induktion erhält man $x_n \in U(\bar{x})$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und

$$|x_n - \bar{x}| \leq \frac{1}{2^{(p-1)n}}|x_0 - \bar{x}| \to 0 \quad \text{für } n \to \infty.$$

Dass $\{x_n\}$ sogar von mindestens der Ordnung p gegen $\bar{x}$ konvergiert, folgt aus (15.9).

□

Aufgabe 15.14 *In einem Buch finden Sie das Verfahren*

$$x_{n+1} := x_n + \frac{(f(x_n))^2}{f(x_n) - f(x_n + f(x_n))}$$

zur iterativen Bestimmung einer Nullstelle der reellen Funktion f. Schätzen Sie die Konvergenzordnung des Verfahrens aus den Näherungen $x_0, x_1, x_2, \ldots,$ die Sie für die Funktion $f(x) := e^x - 1$ mit dem Startwert $x_0 = 1$ erhalten.

Lsung von Aufgabe 15.14

Wir bezeichnen mit $\delta_n := |\bar{x} - x_n|$ den Fehler des Verfahrens im $n-$ten Schritt.

Nach Definition der Ordnung p eines Verfahrens gilt

$$\delta_{n+1} \approx C \cdot \delta_n^p \ , \quad \text{d.h. } C = \frac{\delta_{n+1}}{\delta_n^p}$$

und

$$\delta_{n+2} \approx C \cdot \delta_{n+1}^p \ , \quad \text{d.h. } \delta_{n+2} \approx \frac{\delta_{n+1}}{\delta_n^p} \cdot \delta_{n+1}^p.$$

Daher gilt

$$\frac{\delta_{n+1}}{\delta_{n+2}} \approx \left(\frac{\delta_n}{\delta_{n+1}} \right)^p \ ,$$

und durch Logarithmieren folgt

$$p \approx \frac{\log \frac{\delta_{n+1}}{\delta_{n+2}}}{\log \frac{\delta_n}{\delta_{n+1}}} \ .$$

Für das Testproblem $f(x) := e^x - 1$ erhält man $\bar{x} = 0$ und daher $\delta_n = |x_n|$. Damit folgt

$$\delta_0 = x_0 = 1, \ \delta_1 = x_1 \approx 0.7626,$$

und daher

$$\begin{aligned}
\delta_2 = x_2 = 0.4772, \qquad &\Rightarrow \ p \ \approx \frac{\log(\delta_1/\delta_2)}{\log(\delta_0/\delta_1)} \approx 1.7297 \\
\delta_3 = x_3 = 0.2020 \qquad &\Rightarrow \ p \ \approx \frac{\log(\delta_2/\delta_3)}{\log(\delta_1/\delta_2)} \approx 1.8338 \\
\delta_4 = x_4 = 0.03382 \qquad &\Rightarrow \ p \ \approx \frac{\log(\delta_3/\delta_4)}{\log(\delta_2/\delta_3)} \approx 1.9186
\end{aligned}$$

Dies legt die Vermutung nahe, dass die Konvergenzordnung 2 ist. □

Aufgabe 15.15 *Es sei p ein Polynom, und es seien (etwa mit dem Newton Verfahren) Näherungen $\xi_1, \ldots, \xi_m$ für Nullstellen von p bestimmt. Dann liegt es nahe, die gefundenen Nullstellen unschädlich zu machen, d.h. p durch die Linearfaktoren*

$x - \xi_j$, $j = 1, \ldots, m$ zu dividieren und als weitere Nullstellen von p mit dem Newton Verfahren Nullstellen der Funktion

$$f(x) := \frac{p(x)}{(x-\xi_1)\cdot \ldots \cdot (x-\xi_m)}$$

zu bestimmen.

a) *Zeigen Sie, dass das Newton Verfahren für f die Gestalt*

$$x_{n+1} = x_n - \frac{p(x_n)}{p'(x_n) - p(x_n)\sum_{j=1}^m \frac{1}{x_n-\xi_j}} \tag{15.10}$$

besitzt. Diese Methode heißt das **Verfahren von Newton-Maehly**.

b) *Bestimmen Sie die Nullstellen von*

$$p(x) := 5x^4 - 40x^3 + 70x^2 + 40x - 74$$

nacheinander mit dem Verfahren von Newton bzw. Newton-Maehly. Verwenden Sie als Startnäherungen $x_0 = 6$, $x_0 = 4$, $x_0 = 2$ bzw. $x_0 = 0$ und brechen Sie die Iteration ab, wenn $|p(x_n)| < 10^{-5}$ gilt.

Lsung von Aufgabe 15.15

a): Es gilt mit $w(x) = (x-\xi_1)\cdot \ldots \cdot (x-\xi_m)$

$$f'(x) = \frac{p'(x)}{w(x)} - \frac{p(x)}{w(x)}\sum_{j=1}^m \frac{1}{(x-\xi_j)},$$

und hiermit folgt die Iterationsvorschrift (15.10) für das Newton Verfahren für f.

b): Mit dem Newton Verfahren für p erhält man mit der Startnäherung $x_0 := 6$

n	x_n	$p(x_n)$
1	5.40227273	$1.37\ E+02$
2	5.09566968	$2.60\ E+01$
3	5.00394677	$1.95\ E+00$
4	4.99581732	$1.43\ E-02$
5	4.99581732	$7.95\ E-07$
6	4.99581731	

Das Newton-Maehly Verfahren mit $m = 1$ und $\xi = x_6$ der letzten Iteration liefert mit dem Startwert $x_0 = 4$

n	x_n	$p(x_n)$
1	3.35264220	$-2.87\ E+01$
2	3.07427648	$-5.04\ E+00$
3	3.01511280	$-2.13\ E-01$
4	3.01246687	$-4.19\ E-04$
5	3.01246166	$-1.62\ E-09$

Mit $m = 2$ und $\xi_2 = x_5$ der letzten Tabelle erhält man mit dem Startwert $x_0 = 2$

n	x_n	$p(x_n)$
1	1.24327868	$1.90\ E+01$
2	1.01375373	$2.10\ E+00$
3	0.98787592	$2.72\ E-02$
4	0.98753840	$4.62\ E-06$
5	0.98753834	

Bemerkenswert ist, dass $p'(2) = 0$ gilt, das Newton Verfahren für p mit diesem Startwert also gar nicht ausgeführt werden könnte.

Schließlich erhält man mit $m = 3$ und $\xi_3 = x_5$ der letzten Tabelle

n	x_n	$p(x_n)$
1	-0.99581731	$4.54\ E-13$

$\square$

15.4 Iterative Methoden für lineare Systeme

Aufgabe 15.16 *Es sei*

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 0 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

a) Konvergiert das Gesamtschrittverfahren für $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$?

b) Man ersetze $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ *durch ein Gleichungssystem, für das das Gesamtschrittverfahren konvergiert.*

Lsung von Aufgabe 15.16

a): Das Gesamtschrittverfahren ist nicht durchführbar, da ein Diagonalelement verschwindet.

b): Vertauscht man die 1. mit der 5. und die 2. mit der 4. Zeile, so geht das Gleichungssystem über in

$$\tilde{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{x} := \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Das Gesamtschrittverfahren hierfür lautet

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}^{n+1} &= -\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0.25 & 0.25 & 0 \\ 0.25 & 0 & 0 & 0.25 & 0.25 \\ 0.25 & 0.25 & 0 & 0 & 0.25 \\ 0.25 & 0.25 & 0.25 & 0 & 0 \\ 0.25 & 0.25 & 0.25 & 0.25 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{x}^n + \begin{pmatrix} 1.25 \\ 1 \\ 0.75 \\ 0.5 \\ 0.25 \end{pmatrix} \\ &=: \boldsymbol{M}\boldsymbol{x}^n + \boldsymbol{g} . \end{aligned}$$

$\tilde{\boldsymbol{A}}$ erfüllt zwar weder das starke Zeilensummen- noch Spaltensummenkriterium, aber wegen $\|\boldsymbol{M}\|_s = \frac{\sqrt{15}}{4} < 1$, also erst recht $\|\boldsymbol{M}\|_2 < 1$, ist das Gesamtschrittverfahren konvergent. □

Aufgabe 15.17 *Bestimmen Sie eine Approximation* $\tilde{\boldsymbol{x}} \in \mathbb{R}^{1000}$ *des Lösungsvektors* $\boldsymbol{x}$ *des linearen* (1000×1000)*-System*

$$\begin{pmatrix} 100 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 100 & 1 & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 1 & 100 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \\ 100 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 100 \\ 100 \end{pmatrix} ,$$

welche

$$\|\boldsymbol{x} - \tilde{\boldsymbol{x}}\|_\infty \leq 10^{-1}$$

erfüllt.

Lsung von Aufgabe 15.17

Das Gesamtschritt-Verfahren zur Lösung des Systems lautet

$$\boldsymbol{x}^{n+1} = -\frac{1}{100}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 1 & 0 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Die ∞-Norm der Iterationsmatrix

$$\boldsymbol{M} := -\frac{1}{100}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 1 & 0 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ist

$$\|\boldsymbol{M}\|_\infty = \frac{1}{50}.$$

Starten wir das Gesamtschrittverfahren mit dem Nullvektor $\boldsymbol{x}^0 := \boldsymbol{0}$, so ergibt sich als erster Iterationsvektor $\boldsymbol{x}^1$ der Vektor, dessen sämtliche Komponenten gleich eins sind

$$x_j^1 = 1, \; j = 1, \dots, 100.$$

Wegen $\|\boldsymbol{x}^0 - \boldsymbol{x}^1\|_\infty = 1$ können wir den Fehler von $\boldsymbol{x}^1$ abschätzen gemäß

$$\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}1\| \leq \frac{\|\boldsymbol{M}\|_\infty}{1 - \|\boldsymbol{M}\|_\infty} \cdot \|\boldsymbol{x}^1 - \boldsymbol{x}^0\|_\infty \leq \frac{1}{49}.$$

Der Vektor $\boldsymbol{x}^1$ erfüllt damit schon die geforderte Genauigkeitsbedingung. $\square$

Kapitel 16

Das bestimmte Riemannsche Integral

16.1 Definition des Riemann Integrals

Aufgabe 16.1 *Es sei $k > 0$ und $a < c < b$. Zeigen Sie, dass die Funktion*

$$f\ :\ [a,b] \to \mathbb{R},\ f(x) := \begin{cases} k, & \textit{falls} \quad x \in (a,c) \cup (c,b) \\ 0, & \textit{falls} \quad x = c \end{cases}$$

integrierbar über $[a,b]$ ist.

Lsung von Aufgabe 16.1
Es sei $Z\ :\ a = x_0 < x_1 < \dots x_n = b$ eine Zerlegung von $[a,b]$. Dann gilt für jedes Teilintervall $[x_{j-1}, x_j]$ mit $c \notin [x_{j-1}, x_j]$

$$M_j := \sup_{x_{j-1} \le x \le x_j} f(x) = k = \inf_{x_{j-1} \le x \le x_j} f(x) =: m_j,$$

und für jedes Intervall $[x_{j-1}, x_j]$ mit $c \in [x_{j-1}, x_j]$

$$M_j := \sup_{x_{j-1} \le x \le x_j} f(x) = k,\ m_j := \inf_{x_{j-1} \le x \le x_j} f(x) = 0.$$

Da es höchstens zwei Intervalle $[x_{j-1}, x_j]$ gibt, die c enthalten, folgt

$$O_Z(f) - U_Z(f) = \sum_{j=1}^{n} (M_j - m_j)(x_j - x_{j-1}) \le 2k \cdot \max_{j=1,\dots,n} (x_j - x_{j-1}) = 2k|Z|.$$

Ist also $\{Z_n\}$ eine Zerlegungsfolge mit $\lim_{n\to\infty} |Z_n| = 0$, so folgt

$$0 \le \lim_{n\to\infty} (O_{Z_n} - U_{Z_n}) \le 2k \lim_{n\to\infty} |Z_n| = 0,$$

und f ist integrierbar. Das Integral ist natürlich

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} O_{Z_n}(f) = k(b-a).$$

$\square$

Aufgabe 16.2 *Zeigen Sie, dass die Funktion*

$$f\,:\,[a,b]\to\mathbb{R},\;\; f(x) := x^3$$

integrierbar ist, und berechnen Sie

$$\int_a^b x^3\,dx.$$

Lsung von Aufgabe 16.2
Wegen der Monotonie von f gilt für jede Zerlegung

$$Z\,:\,a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$$

des Intervalls $[a,b]$

$$U_Z(f) = \sum_{j=1}^n x_{j-1}^3(x_j - x_{j-1})\;, \quad O_Z(f) = \sum_{j=1}^n x_j^3(x_j - x_{j-1}).$$

Daher folgt mit $m := \max(|a|,|b|)$

$$\begin{aligned}
O_Z(f) - U_Z(f) &= \sum_{j=1}^n (x_j^3 - x_{j-1}^3)(x_j - x_{j-1}) \;=\; \sum_{j=1}^n (x_j^2 + x_j x_{j-1} x_{j-1}^2)(x_j - x_{j-1})^2 \\
&\le 3m^2 \sum_{j=1}^n (x_j - x_{j-1})^2 \;\le\; 3m^2 |Z| \sum_{j=1}^n (x_j - x_{j-1}) \\
&= 3m^2(b-a)|Z|.
\end{aligned}$$

Ist also $\{Z_n\}$ eine Zerlegungsfolge von $[a,b]$ mit $|Z_n|\to 0$ für $n\to\infty$, folgt

$$0 \le \lim_{n\to\infty}\Big(O_{Z_n}(f) - U_{Z_n}(f)\Big) \le 3m^2(b-a)\lim_{n\to\infty}|Z_n| = 0.$$

Damit ist die Existenz des Integrals nachgewiesen.

Um das Integral zu berechnen, wählen wir eine spezielle Zerlegungsfolge $\{Z_n\}$ und berechnen $\lim_{n\to\infty} O_{Z_n}$.

Es sei

$$Z_n\,:\,x_j := a + \frac{j}{n}(b-a), \quad j = 0,1,\ldots,n.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}
O_{Z_n} &= \sum_{j=1}^{n} x_j^3(x_j - x_{j-1}) = \sum_{j=1}^{n} \Big(a + \frac{j}{n}(b-a)\Big)^3 \frac{b-a}{n} \\
&= \frac{b-a}{n^4} \sum_{j=1}^{n} \Big(na + j(b-a)\Big)^3 \\
&= \frac{b-a}{n^4} \sum_{j=1}^{n} \Big(n^3a^3 + 3n^2ja^2(b-a) + 3nj^2a(b-a)^2 + j^3(b-a)^3\Big) \\
&= \frac{b-a}{n^4} \Big(n^4a^3 + \frac{3}{2}n^3(n-1)a^2(b-a) + \frac{1}{2}n^2(n+1)(2n+1)a(b-a)^2 \\
&\qquad + \frac{1}{4}n^2(n+1)^2(b-a)^3\Big),
\end{aligned}$$

und daher

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} O_{Z_n}(f) &= \Big(b-a\Big) \cdot \Big(a^3 + \frac{3}{2}a^2(b-a) + a(b-a)^2 + \frac{1}{4}(b-a)^3\Big) \\
&= \frac{1}{4}(b^4 - a^4).
\end{aligned}$$

□

16.2 Integrierbarkeitskriterien

Aufgabe 16.3 *Diskutieren Sie die Integrierbarkeit der Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$,*

$$f(x) := \begin{cases} 0 & \textit{falls} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ \frac{1}{q} & \textit{falls} \quad x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \cap [0,1], \ p \textit{ und } q \textit{ teilerfremd} \end{cases}$$

Lsung von Aufgabe 16.3

Die Funktion f ist zwar unstetig in jedem rationalen Punkt x, dennoch ist sie integrierbar über $[0,1]$.

Der Unterschied zur Dirichletschen Sprungfunktion in Beispiel 17.?? besteht darin, dass zu jeder Schranke $c > 0$ nur endlich viele Punkte x existieren, für die $f(x) > c$ gilt (vgl. fig1). Unter Ausnutzung dieser Eigenschaft kann man zeigen, dass die Differenz zwischen der Ober- und Untersumme für eine geeignete Zerlegung beliebig klein gemacht werden kann.

Es sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Es ei

$$N := \lfloor 2/\varepsilon \rfloor.$$

Abbildung 16.1: Zu Aufgabe 16.3

Wir bezeichnen mit k die Anzahl der rationalen Zahlen $p/q \in [0,1]$, p und q teilerfremd, für die $q < N$ gilt, und mit ξ_j, $j = 1,\dots,k$ diese Zahlen. Wir wählen eine Zerlegung Z von $[0,1]$, für die $|Z| < \varepsilon/(4k)$ gilt und für die die Intervalle, die die ξ_j enthalten eine Gesamtlänge haben, die kleiner als $\varepsilon/2$ ist.

Da $0 \leq f(x) \leq 1$ gilt, ist der Gesamtbeitrag der Intervalle, die die ξ_j enthalten, an $O_Z(f) - U_Z(f)$ kleiner als $\varepsilon/2$.

Für die übrigen Intervalle gilt $m_i = 0$ und $M_i \leq 1/N < \varepsilon/2$. Als ist auch der Gesamtbeitrag dieser Intervalle an $O_(f) - U_Z(f)$ kleiner als $\varepsilon/2$, und wir erhalten insgesamt

$$O_Z(f) - U_Z(f) < \varepsilon.$$

Nach dem Riemannschen Integrabilitätskriterium ist f daher integrierbar über $[0,1]$.

□

Aufgabe 16.4 *Es sei* $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ *und für* $n \in \mathbb{N}$

$$a_n := \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} f(\frac{j}{n}).$$

a) *Zeigen Sie, dass für integrables f gilt*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \int_0^1 f(x)\,dx.$$

b) *Geben Sie für nicht integrables f je ein Beispiel dafür an, dass die Folge $\{a_n\}$ konvergiert und divergiert.*

c) *Zeigen Sie, dass*

$$\Big|\int_0^1 f(x)\,dx - a_n\Big| \leq \frac{L}{2n}$$

gilt, fall f eine Lipschitz Bedingung mit der Lipschitz Konstante L erfüllt.

Lsung von Aufgabe 16.4

a): Dieser Teil folgt unmittelbar aus Satz 17.??, denn a_n ist die Riemann Summe zur äquidistanten Zerlegung

$$\big[x_{j-1}^{(n)}, x_j^{(n)}\big] = \big[\frac{j-1}{n}, \frac{j}{n}\big] \quad \text{und} \quad \xi_j^{(n)} := x_j^{(n)}.$$

b): Wählt man f als die Dirichletsche Sprungfunktion

$$f(x) := \begin{cases} 0 & \text{für} \quad x \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \\ 1 & \text{für} \quad x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}, \end{cases}$$

so ist f nicht integrierbar über $[0,1]$, aber es gilt $a_n = 0$ für alle n. Damit ist die Folge konvergent.

Für

$$f(x) := \begin{cases} 0 & \text{für} \quad x = \frac{p}{q},\ q \text{ teilbar durch } 10 \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

gilt $a_n = 0$ für alle n, die durch 10 teilbar sind, und $a_n = 1$ für jede Primzahl n. Die Falge $\{a_n\}$ ist also nicht teilbar, und nach Teil a) ist die Funktion f nicht integrierbar über $[0,1]$.

c): Es gilt

$$\begin{aligned} \Big|\int_0^1 - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n f(\frac{j}{n})\Big| &= \Big|\sum_{j=1} n \int_{(j-1)/n}^{j/n} (f(x) - f(\frac{j}{n}))\,dx\Big| \\ &\leq \sum_{j=1} n \int_{(j-1)/n}^{j/n} \Big|f(x) - f(\frac{j}{n})\Big|\,dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \sum_{j=1} n \int\limits_{(j-1)/n}^{j/n} L\Big|x - \frac{j}{n}\Big|\,dx \\ &= L\sum_{j=1} n \int\limits_{(j-1)/n}^{j/n} \Big(\frac{j}{n} - x\Big)\,dx \\ &= L\sum_{j=1} n\frac{1}{n^2} = \frac{L}{2n}. \end{aligned}$$

□

Aufgabe 16.5 *Es seien die Funktionen* $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, *integrierbar, und es sei die Funktionenfolge* $\{f_n\}$ *gleichmäßig auf* $[a,b]$ *konvergent gegen* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$.

Zeigen Sie, dass f *integrierbar über* $[a,b]$ *ist und dass*

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int\limits_a^b f_n(x)\,dx$$

gilt

Lsung von Aufgabe 16.5
Wir zeigen, dass f das Riemannsche Integrabilitätskriterium erfüllt.

Es sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Wegen der gleichmäßigen Konvergenz der Folge $\{f_n\}$ gibt es dann ein $N \in \mathbb{N}$, so dass

$$|f_n(x) - f(x)| < k\cdot\varepsilon \quad \text{für alle } x \in [a,b] \text{ und alle } n \geq N \tag{16.1}$$

gilt. Die Zahl $k > 0$ werden wir dabei noch geeignet festlegen.

Da f_N integrierbar über $[a,b]$ ist, gibt es eine Zerlegung Z des Intervalls $[a,b]$, so dass gilt

$$O_Z(f_N) - U_Z(f_N) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Für das j-te Teilintervall $[x_{j-1}, x_j]$ von Z gilt

$$\sup_{x_{j-1}\leq x\leq x_j} f(x) = \sup_{x_{j-1}\leq x\leq x_j} \Big(f(x) - f_N(x) + f_N(x)\Big) \leq \sup_{x_{j-1}\leq x\leq x_j} f_N(x) + k\cdot\varepsilon$$

und

$$\inf_{x_{j-1}\leq x\leq x_j} f(x) = \inf_{x_{j-1}\leq x\leq x_j} \Big(f(x) - f_N(x) + f_N(x)\Big) \geq \inf_{x_{j-1}\leq x\leq x_j} f_N(x) - k\cdot\varepsilon.$$

Daher folgt

$$\begin{aligned}
O_Z(f) - U_Z(f) &= \sum_j \Big(\sup_{x_{j-1} \le x \le x_j} f(x) - \inf_{x_{j-1} \le x \le x_j} f(x) \Big)(x_j - x_{j-1}) \\
&\le \sum_j \Big(\sup_{x_{j-1} \le x \le x_j} f_N(x) - \inf_{x_{j-1} \le x \le x_j} f_N(x) \Big)(x_j - x_{j-1}) + 2k\varepsilon \sum_j (x_j - x_{j-1}) \\
&= O_Z(f_N) - U_Z(f_N) + 2k\varepsilon(b-a) < \frac{\varepsilon}{2} + 2k\varepsilon(b-a).
\end{aligned}$$

An dieser Ungleichung lesen wir ab, wie wir k zu wählen haben: Für $k := 1/(4(b-a))$ erhalten wir

$$O_Z(f) - U_Z(f) < \varepsilon,$$

und nach dem Riemannschen Kriterium folgt die Integrierbarkeit von f.

Die Aussage

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx$$

erhalten wir, denn wegen (16.1) gilt für jede Zerlegung Z von $[a,b]$ und jede zugehörige Riemann Summe

$$|R_Z(f) - R_Z(f_n)| < k\varepsilon(b-a) \quad \text{für alle } n \ge N$$

gilt. □

16.3 Klassen integrierbarer Funktionen

Aufgabe 16.6 *Prüfen Sie, welche der folgenden Funktionen Riemann-integrierbar sind. Bestimmen Sie gegebenenfalls ihr Integral durch Approximation mit Unter- und Obersummen:*

$$\begin{aligned}
f_1 &: [0,1] \to \mathbb{R} \quad , \quad f_1(x) := \begin{cases} \frac{1}{x} & \textit{für} \quad x \neq 0 \\ 0 & \textit{für} \quad x = 0 \end{cases}, \\
f_2 &: [1,2] \to \mathbb{R} \quad , \quad f_2(x) := \frac{1}{x} \\
f_3 &: [0,1] \to \mathbb{R} \quad , \quad f_4(x) := \cos x.
\end{aligned}$$

Hinweis: *Für die Behandlung von f_4 ist die folgende Formel nützlich:*

$$\sum_{k=1}^n \cos(ka) = \frac{\cos\left(\frac{n+1}{2}a\right)\sin\left(\frac{na}{2}\right)}{\sin(0.5a)}$$

Lsung von Aufgabe 16.6

f_1 ist nicht integrierbar, da f_1 nicht beschränkt ist.

f_2 ist integrierbar, da f_2 stetig auf dem kompakten Intervall $[1, 2]$ ist.

Zur Bestimmung von

$$\int_1^2 \frac{dx}{x}$$

betrachten wir die Zerlegungen $Z_n : 1 = x_0 < x_1, < \ldots x_n = 2$ mit

$$x_i := 2^{i/n} \ , \ i = 0, \ldots, n \ .$$

Dann gilt

$$\Delta_i = x_i - x_{i-1} \ = \ 2^{i/n} - 2^{(i-1)/n} = 2^{(i-1)/n}\left(2^{1/n} - 1\right) \ .$$

Wegen der Monotonie von f_2 gilt

$$\begin{aligned} m_i &= \inf\left\{f_2(x) \ : \ x \in [x_{i-1}, x_i]\right\} = \frac{1}{x_i} = 2^{-i/n} \\ M_i &= \sup\left\{f_2(x) \ : \ x \in [x_{i-1}, x_i]\right\} = \frac{1}{x_{i-1}} = 2^{-(i-1)/n} \end{aligned}$$

Daher gilt

$$\begin{aligned} U_{Z_n}(f_2) &= \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta_i = \sum_{i=1}^{n} 2^{-i/n} 2^{(i-1)/n}\left(2^{1/n} - 1\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} 2^{-1/n}\left(2^{1/n} - 1\right) = n\left(1 - 2^{-1/n}\right) \to \ln 2 \ , \end{aligned}$$

denn nach der de l'Hospitalschen Regel ist

$$\lim_{t \downarrow 0} \frac{1 - 2^{-t}}{t} = \lim_{t \downarrow 0} \frac{\ln 2 e^{-t \ln 2}}{1} = \ln 2 \ ,$$

und genauso

$$\begin{aligned} O_{Z_n}(f) &= \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta_i = \sum_{i=1}^{n} 2^{-(i-1)/n} 2^{(i-1)/n}\left(2^{1/n} - 1\right) \\ &= n\left(2^{1/n} - 1\right) \quad \to \quad \ln 2 \ . \end{aligned}$$

f_3 ist als stetige Funktion über $[0, 1]$ integrierbar. Da f_3 monoton fallend auf $[0, 1]$ ist, gilt mit der äquidistanten Zerlegung Z_n

$$O_{Z_n}(f_3) = \sum_{i=1}^{n} \cos\left(\frac{i-1}{n}\right) \cdot \frac{1}{n} \ , \ U_{Z_n}(f_3) = \sum_{i=1}^{n} \cos\left(\frac{i}{n}\right) \cdot \frac{1}{n} \ .$$

Es ist wegen $\lim\limits_{t\to 0}\frac{t}{\sin t}=1$

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\cos\left(\frac{i}{n}\right) &= \frac{1}{n}\left(\frac{\cos\left(\left(\frac{n+1}{2}\right)\frac{1}{n}\right)\sin\left(\frac{n}{2n}\right)}{\sin\left(\frac{1}{2n}\right)}\right)\\ &= 2\frac{1/2n}{\sin\left(\frac{1}{2n}\right)}\cos\left(\frac{1+\frac{1}{n}}{2}\right)\sin\left(\frac{1}{2}\right) \;\to\; 2\cos\left(\frac{1}{2}\right)\sin\left(\frac{1}{2}\right)=\sin(1)\end{aligned}$$

und wegen der Integrierbarkeit von f_3 dann auch

$$\lim_{n\to\infty} O_{Z_n}(f_3)=\lim_{n\to\infty} U_{Z_n}(f)=\sin(1)\ .$$

$\square$

16.4 Rechenregeln

Aufgabe 16.7 *a) Es sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ integrierbar. Zeigen Sie, dass dann auch f^2 integrierbar über $[a,b]$ ist.*

b) Geben Sie ein Beispiel einer Funktion $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ an, die nicht integrierbar ist, während f^2 integrierbar ist.

c) Es seien $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ integrierbar. Zeigen Sie, dass dann auch $f\cdot g$ integrierbar über $[a,b]$ ist.

d) Kann $f\cdot g$ integrierbar über $[a,b]$ sein, während weder f noch g integrierbar über $[a,b]$ ist?

Lsung von Aufgabe 16.7
a): Da f integrierbar über $[a,b]$ ist, ist f beschränkt. Es existiert also ein $M>0$ mit $|f(x)|\le M$ für alle $x\in[a,b]$.

Wir wenden das Riemannsche Integrabilitätskriterium an. Sei $\varepsilon>0$ vorgegeben. Da f integrierbar ist, gibt es zu $\tilde{\varepsilon}:=0.5\varepsilon/M$ eine Zerlegung Z, so dass $O_Z(f)-U_Z(f)<\tilde{\varepsilon}$ gilt.

Wir zeigen zunächst, dass der Beitrag des j-ten Teilintervalls $I_j:=[x_{j-1},x_j]$ in $O_Z(f^2)-U_Z(f^2)$ höchstens

$$2M(M_j-m_j)\cdot(x_j-x_{j-1})$$

ist, wobei M_j bzw. m_j das Supremum bzw. Infimum von f in I_j bezeichnet. Sind nämlich M_j und m_j von einem Vorzeichen, so gilt

$$\sup_{x\in I_j} f(x)^2 = \max(M_j^2, m_j^2) \quad \text{und} \quad \inf_{x\in I_j} f(x)^2 = \min(M_j^2, m_j^2),$$

und der Beitrag von I_j zu $O_Z(f^2) - U_Z(f^2)$ erfüllt

$$|M_j^2 - m_j^2| \cdot (x_j - x_{j-1}) = |M_j + m_j|(M_j - m_j) \cdot (x_j - x_{j-1} \leq 2M(M_j - m_j) \cdot (x_j - x_{j-1}).$$

Gilt $m_j < 0 < M_j$, so ist

$$\sup_{x\in I_j} f(x)^2 = \max(M_j^2, m_j^2) \quad \text{und} \quad \inf_{x\in I_j} f(x)^2 \geq 0,$$

und der Beitrag von I_j zu $O_Z(f^2) - U_Z(f^2)$ ist höchstens

$$\begin{aligned} & \max(m_j^2, M_j^2) \cdot (x_j - x_{j-1}) \leq \max(-m_j, M_j)(M_j - m_j) \cdot (x_j - x_{j-1}) \\ \leq \quad & M(M_j - m_j)(x_j - x_{j-1}) \leq 2M(M_j - m_j)(x_j - x_{j-1}). \end{aligned}$$

Damit erhalten wir

$$O_Z(f^2) - U_Z(f^2) \leq 2M(O_Z(f) - U_Z(f)) < 2M\tilde{\varepsilon} = \varepsilon,$$

und f^2 ist nach dem Riemannschen Kriterium integrierbar.

b): Es sei

$$f \, : \, [0,1] \to \mathbb{R}, \; f(x) := \begin{cases} -1 & \text{für} \quad x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ 1 & \text{für} \quad x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Dann ist f nicht integrierbar, aber $f^2(x) \equiv 1$ ist integrierbar.

c): Dass $f \cdot g$ integrierbar über $[a,b]$ ist, folgt wegen

$$f \cdot g = \frac{1}{4}\Big((f+g)^2 - (f-g)^2\Big)$$

aus Satz 17.?? und Teil a).

d): Ja, denn für f wie in Teil b) und $g = -f$ ist $f \cdot g = f^2 \equiv 1$ integrierbar, während f und g beide nicht integrierbar sind. □

Aufgabe 16.8 *Es sei $f \, : \, [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und nichtnegativ mit*

$$\int_a^b f(x)\, dx = 0.$$

Zeigen Sie, dass dann $f(x) \equiv 0$ gilt. Bleibt die Aussage auch richtig, wenn man die Voraussetzung 'f stetig' durch 'f integrierbar' ersetzt?

Lsung von Aufgabe 16.8

Wir führen den Beweis indirekt. Existiert ein $x_0 \in [a,b]$ mit $f(x_0) > 0$, so gibt es wegen der Stetigkeit von f eine Umgebung $U(x_0) := [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$ von x_0 mit

$$f(x) \geq 0.5 f(x_0) \quad \text{für alle } x \in U(x_0) \cap [a,b] := I(x_0).$$

Daher erhalten wir mit $J(x_0) := [a,b] \setminus I(x_0)$ den Widerspruch

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)\,dx &= \int_{I(x_0)} f(x)\,dx + \int_{J(x_0)} f(x)\,dx \\ &\geq \int_{I(x_0)} f(x)\,dx \;\geq\; 0.5 f(x_0)\cdot\varepsilon > 0. \end{aligned}$$

Setzt man nur voraus, dass f integrierbar aber nicht notwendig stetig ist, so wird die Aussage falsch. Die Funktion

$$f\,:\,[0,1] \to \mathbb{R},\;\; f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad x \neq 0.5 \\ 1 & \text{für} \quad x = 0.5 \end{cases}$$

ist z.B. nichtnegativ und integrierbar mit

$$\int_0^1 f(x)\,dx = 0,$$

und es gilt $f \not\equiv 0$. □

Aufgabe 16.9 *a) Es sei $f\,:\,[a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt und stetig auf (a,b). Zeigen Sie, dass f integrierbar über $[a,b]$ ist.*

b) Die beschränkte Funktion $f\,:\,[a,b] \to \mathbb{R}$ sei mit Ausnahme der abzählbar vielen Punkte $\{\xi_n\}$ stetig in $[a,b]$ und es existiere $\lim_{n\to\infty} \xi_n =: \xi$. Zeigen Sie, dass dann f integrierbar über $[a,b]$ ist.

Lsung von Aufgabe 16.9

a): Wir zeigen, dass das Riemannsche Kriterium erfüllt ist. Sei $\varepsilon > 0$ gegeben, und sei M eine Schranke von f in $[a,b]$.

Wir wählen $\tilde{\varepsilon} := \varepsilon/(6M)$. Da f stetig auf dem abgeschlossenen Intervall $[a+\tilde{\varepsilon}, b-\tilde{\varepsilon}]$ ist, ist f integrierbar über dieses Intervall, und daher gibt es eine Zerlegung

$$\tilde{Z}\,:\,a + \tilde{\varepsilon} = x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-2} < x_{n-1} = b - \tilde{\varepsilon}$$

von $[a+\tilde{\varepsilon}, b-\tilde{\varepsilon}]$, so dass

$$\sum_{n=2}^{n-1} \Big(\sup_{x_{j-1} \le x \le x_j} f(x) - \inf_{x_{j-1} \le x \le x_j} f(x) \Big)(x_j - x_{j-1}) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Ferner gilt mit $x_0 := a$ und $x_n := b$

$$\Big(\sup_{x_0 \le x \le x_1} f(x) - \inf_{x_0 \le x \le x_1} f(x) \Big)(x_1 - x_0) \le 2K\tilde{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{3}$$

und mit $x_n := b$

$$\Big(\sup_{x_{n-1} \le x \le x_n} f(x) - \inf_{x_{n-1} \le x \le x_n} f(x) \Big)(x_n - x_{n-1}) \le 2K\tilde{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{3}.$$

Daher folgt $O_Z(f) - U_Z(f) < \varepsilon$, und nach dem Riemannschen Integrabilitätskriterium ist f integrierbar über $[a, b]$.

b): Wir konstruieren zu gegebenem $\varepsilon > 0$ wieder eine Zerlegung Z mit der das Riemannsche Kriterium erfüllt ist. Es sei $|f(x)| \le M$ für alle $x \in [a, b]$ und $\delta := \varepsilon/(8M)$. Da die Folge der Unstetigkeitsstellen $\{\xi_n\}$ gegen ξ konvergiert, gibt es nur endlich viele $\xi_j \notin [\xi - \delta, \xi + \delta]$. Wir ordnen diese der Größe nach an und bezeichnen sie mit $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_m$. Dann ist (für ein k) die Funktion f auf den Intervallen

$$[a, \eta_1], [\eta_1, \eta_2], \ldots, [\eta_k, \xi - \delta], [\xi + \delta, \eta_k + 1], \ldots, [\eta_{m-1}, \eta_m], [\eta_m, b]$$

stetig und damit über jedes der Intervalle integrierbar. Daher gibt es es zu $\tilde{\varepsilon} := \varepsilon/(2(m+1)) > 0$ für jedes dieser $m+1$ Intervalle eine Zerlegung Z_j, so dass sich die Ober- und Untersumme um weniger als $\tilde{\varepsilon}$ unterscheiden. Setzt man diese Zerlegungen und das Intervall $[\xi - \delta, \xi + \delta]$ zu einer Zerlegung Z von $[a, b]$ zusammen, so gilt für diese

$$O_Z(f) - U_Z(f) < (2M)(2\delta) + (m+1)\tilde{\varepsilon} = \varepsilon.$$

□

Aufgabe 16.10 *Diskutieren Sie die Integrierbarkeit der folgenden Funktionen:*

$$f_1 : [0, 1] \to \mathbb{R} \quad , \quad f_1(x) := \begin{cases} \sin \frac{1}{x} & \textit{für} \quad x \in (0, 1] \\ \quad 0 & \textit{für} \quad x = 0. \end{cases}$$

$$f_2 : [-a, a] \to \mathbb{R} \quad , \quad f_2(x) := \begin{cases} x & \textit{für} \quad x \in \mathbb{Z} \cap [-a, a] \\ \pi & \textit{sonst.} \end{cases}$$

$$f_3 : [0, 1] \to \mathbb{R} \quad , \quad f_3(x) := \begin{cases} \frac{1}{n} & \textit{für} \quad x \in (\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}], \; n \in \mathbb{N} \\ 0 & \textit{für} \quad x = 0. \end{cases}$$

$$f_4 : [0,1] \to \mathbb{R} \quad , \quad f_4(x) := \begin{cases} (-1)^n & \textit{für} \quad x \in (\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}],\ n \in \mathbb{N} \\ 0 & \textit{für} \quad x = 0. \end{cases}$$

$$f_5 : [0,1] \to \mathbb{R} \quad , \quad f_5(x) := \begin{cases} nx & \textit{für} \quad x \in (\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}],\ n \in \mathbb{N} \\ 0 & \textit{für} \quad x = 0. \end{cases}$$

$$f_6 : [0,1] \to \mathbb{R} \quad , \quad f_6(x) := \begin{cases} n^2x & \textit{für} \quad x \in (\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}],\ n \in \mathbb{N} \\ 0 & \textit{für} \quad x = 0. \end{cases}$$

$$f_7 : [0,1] \to \mathbb{R} \quad , \quad f_7(x) := \begin{cases} x & \textit{für} \quad x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ 1-x & \textit{für} \quad x = [0,1] \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Lsung von Aufgabe 16.10

$$f_1 : [0,1] \to \mathbb{R},\ f_1(x) := \begin{cases} \sin\frac{1}{x} & \text{für} \quad x \in (0,1] \\ 0 & \text{für} \quad x = 0 \end{cases}$$

ist beschränkt auf dem Intervall $[0,1]$ und stetig auf dem offenen Intervall $(0,1)$. Nach Aufgabe 16.9 ist f_1 daher integrierbar über $[0,1]$.

$$f_2 : [-a,a] \to \mathbb{R},\ f_2(x) := \begin{cases} x & \text{für} \quad x \in \mathbb{Z} \cap [-a,a] \\ \pi & \text{sonst} \end{cases}$$

ist beschränkt in $[-a,a]$ und in jedem der endlich vielen offenen Intervalle

$$(-a, -\lfloor a \rfloor),\ (-\lfloor a \rfloor, -\lfloor a \rfloor + 1),\ (-\lfloor a \rfloor + 1, -\lfloor a \rfloor + 2),\ \ldots, (\lfloor a \rfloor - 1, \lfloor a \rfloor),\ (\lfloor a \rfloor, a)$$

konstant, also stetig. Nach Aufgabe 16.9 ist f integrierbar über jedes der abgeschlossenen Intervalle

$$[-a, -\lfloor a \rfloor],\ [-\lfloor a \rfloor, -\lfloor a \rfloor + 1],\ [-\lfloor a \rfloor + 1, -\lfloor a \rfloor + 2],\ \ldots, [\lfloor a \rfloor - 1, \lfloor a \rfloor],\ [\lfloor a \rfloor, a]$$

und damit nach Satz 17.?? auch über die Vereinigung $[-a,a]$.

Man kann natürlich f_2 als Summe der konstanten Funktion auf $[-a,a]$ mit dem Wert π und der endlich vielen Funktionen schreiben, die identisch 0 sind mit Ausnahme eines ganzzahligen Argument x, in dem der Wert $x - \pi$ angenommen wird. Dann ist jeder dieser Summanden integrierbar (vgl. Aufgabe 16.6) und damit auch die Summe.

$$f_3 : [0,1] \to \mathbb{R},\ f_3(x) := \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{für} \quad x \in (\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}],\ n \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{für} \quad x = 0 \end{cases}$$

ist monoton nicht fallend auf $[0,1]$ und beschränkt, und daher ist f_3 integrierbar über $[0,1]$.

$$f_4 : [0,1] \to \mathbb{R},\ f_4(x) := \begin{cases} (-1)^n & \text{für} \quad x \in (\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}],\ n \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{für} \quad x = 0 \end{cases}$$

ist nach Aufgabe 16.9 integrierbar, denn f_4 ist beschränkt und bis auf die abzählbar vielen Stellen $\xi_n := 1/n$ stetig, und die Folge $\{\xi_n\}$ ist konvergent.

$$f_5 \,:\, [0,1] \to \mathbb{R},\ f_5(x) := \begin{cases} nx & \text{für} \quad x \in (\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}],\ n \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{für} \quad x = 0 \end{cases}$$

ist mit derselben Begründung wie f_4 integrierbar.

$$f_6 \,:\, [0,1] \to \mathbb{R},\ f_6(x) := \begin{cases} n^2x & \text{für} \quad x \in (\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}],\ n \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{für} \quad x = 0 \end{cases}$$

ist nicht integrierbar, denn f_6 ist nicht beschränkt.

$$f_7 \,:\, [0,1] \to \mathbb{R},\ f_7(x) := \begin{cases} x & \text{für} \quad x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ 1-x & \text{für} \quad x = [0,1] \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

ist nicht integrierbar über $[0,1]$. Wir zeigen, dass f_7 nicht integrierbar über das Intervall $[0,0.25]$ ist. Ist nämlich Z eine Zerlegung der Intervall $[0.25]$ so liegen in jedem Teilintervall sowohl rationale als auch irrationale Punkte, und daher gilt

$$\inf_{x_{j-1} \le x \le x} f_7(x) \le 0.25 \quad \text{und} \quad \sup_{x_{j-1} \le x \le x} f_7(x) \le 0.75.$$

Es folgt damit

$$O_Z(f_7) - U_Z(f_7) \ge 0.5 \cdot 0.25 > 0.$$

□

Aufgabe 16.11 *Es seien* $f, g \,:\, [a,b] \to \mathbb{R}$ *integrierbar. Zeigen Sie, dass die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung*

$$\Big(\int_a^b f(x)g(x)\,dx\Big)^2 \le \Big(\int_a^b f(x)^2\,dx\Big) \cdot \Big(\int_a^b g(x)^2\,dx\Big) \tag{16.2}$$

gilt.

Lsung von Aufgabe 16.11

Naheliegend ist es, (16.2) auf die allgemeine Cauchy-Schwarzsche Ungleichung in Satz 2.50 zurückzuführen. Dazu müssen wir uns überlegen, dass die Menge aller über $[a,b]$ integrierbaren Funktionen bzgl. der üblichen Addition und Multiplikation mit Skalaren ein Vektorraum V ist (dies folgt aus Satz 17.??) und dass

$$\langle f, g\rangle := \int_a^b f(x)g(x)\,dx$$

ein inneres Produkt auf V definiert. Dies ist jedoch falsch, denn dieser Ausdruck ist zwar additiv, homogen und symmetrisch, aber leider nicht definit, denn es gibt Funktionen f, für die

$$\int_a^b f(x)^2\,dx = 0 \quad \text{und} \quad f \not\equiv 0$$

gilt. Diese Eigenschaft wird aber im Beweis von Satz 2.50 benötigt.

Wir modifizieren daher den Beweis von Satz 2.50 ein wenig. Es seien $\xi, \eta \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_a^b \Big(\xi \cdot f(x) + \eta \cdot g(x)\Big)\,dx \\ &= \xi^2 \int_a^b f(x)^2\,dx + 2\xi\eta \int_a^b f(x)g(x)\,dx + \eta^2 \int_a^b g(x)^2\,dx. \end{aligned}$$

Es gilt also mit

$$c_{11} := \int_a^b f(x)^2\,dx,\; c_{12} := c_{21} := \int_a^b f(x)g(x)\,dx,\; c_{22} := \int_a^b g(x)^2\,dx$$

für alle $\xi, \eta \in \mathbb{R}$

$$(\xi,\eta)\boldsymbol{C}\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix} := (\xi,\eta)\begin{pmatrix}c_{11} & c_{12}\\ c_{21} & c_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix} \geq 0.$$

Damit ist die symmetrische Matrix $\boldsymbol{C}$ positiv semidefinit, und daher folgt

$$\det \boldsymbol{C} = c_{11}c_{22} - c_{12}^2 \geq 0,$$

d.h.

$$\Big(\int_a^b f(x)g(x)\,dx\Big)^2 \leq \Big(\int_a^b f(x)^2\,dx\Big) \cdot \Big(\int_a^b g(x)^2\,dx\Big).$$

□

Kapitel 17

Das unbestimmte Integral

17.1 Der Fundamentalsatz der Infinitesimalrechnung

Aufgabe 17.1 *Berechnen Sie den Flächeninhalt der durch*

$$F := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; x - 1 \leq y \leq 1 - x^2\}$$

gegebenen Teilmenge des $\mathbb{R}^2$ *.*

Lsung von Aufgabe 17.1
Es sei

$$f(x) := x - 1 \;,\; g(x) := 1 - x^2$$

Dann sind $x_0 := -2$ und $x_1 := 1$ die einzigen Schnittpunkte von f und g.

F ist die von den Graphen von f und g (über dem Intervall $[-2, 1]$) eingeschlossene Fläche. Daher gilt

$$F = \int_{-2}^{1} g(x)\,dx - \int_{-2}^{1} f(x)\,dx = \int_{-2}^{1} \left(2 - x - x^2\right)\,dx = \left[2x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3\right]_{-2}^{1} = \frac{9}{2}.$$

□

Aufgabe 17.2 *Man zeige, dass man jede Stammfunktion von* $f(x) := x^2$ *schreiben kann als* $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ *für ein geeignetes* $a \in \mathbb{R}$.

Ist dies auch für $f(x) := \sin x$ *richtig?*

Aufgabe 17.3 *a) Es sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, und es seien $\phi, \psi : I \to [a,b]$ differenzierbar auf dem offenen Intervall I. Zeigen Sie, dass die Funktion*

$$g : I \to \mathbb{R},\ g(x) := \int\limits_{\phi(x)}^{\psi(x)} f(t)\,dt$$

differenzierbar in I ist und dass für alle $x \in I$

$$g'(x) = f(\psi(x))\psi'(x) - f(\phi(x))\phi'(x)$$

gilt.

b) Bestätigen Sie die Formel aus Teil a) für die Funktion

$$g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R},\ g(x) := \int\limits_{x^2}^{\sqrt{x}} (1+3t^2)\,dt.$$

Lsung von Aufgabe 17.3

a): Zunächst gilt für jedes fest $c \in [a,b]$

$$\begin{aligned} g(x) &= \int\limits_{\phi(x)}^{\psi(x)} f(t)\,dt = \int\limits_{\phi(x)}^{c} f(t)\,dt + \int\limits_{c}^{\psi(x)} f(t)\,dt \\ &= \int\limits_{c}^{\psi(x)} f(t)\,dt - \int\limits_{c}^{\phi(x)} f(t)\,dt. \end{aligned}$$

Diez zeigt, dass wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit die untere Grenze Integration als konstant annehmen können. Es sei also

$$g(x) := \int\limits_{c}^{\psi(x)} f(t)\,dt.$$

Dann gilt für $x \in I$

$$\frac{1}{h}(g(x+h) - g(x)) = \frac{1}{h}\Big(\int\limits_{c}^{\psi(x+h)} f(t)\,dt - \int\limits_{c}^{\psi(x)} f(t)\,dt\Big) = \frac{1}{h}\int\limits_{\psi(x)}^{\psi(x+h)} f(t)\,dt\Big).$$

Aus dem Mittelwertsatz der Integralrechnung folgt

$$\begin{aligned} \frac{1}{h}(g(x+h) - g(x)) &= \frac{1}{h} f(\psi(x) + \theta(\psi(x+h) - \psi(x))) \cdot \int\limits_{\psi(x)}^{\psi(x+h)} dt \\ &= f(\psi(x) + \theta(\psi(x+h) - \psi(x))) \cdot \frac{\psi(x+h) - \psi(x)}{h} \end{aligned}$$

mit einem $\theta = \theta(h) \in (0, 1)$.

Für $h \to 0$ konvergiert $\psi(x) + \theta(\psi(x+h) - \psi(x))$ gegen $\psi(x)$. Wegen der Stetigkeit von f und der Differenzierbarkeit von ψ existiert der Grenzwert

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}(g(x+h) - g(x))$$

und es gilt

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}(g(x+h) - g(x)) = f(\psi(x) \cdot \psi'(x).$$

b): Es gilt

$$g(x) = \int\limits_{x^2}^{\sqrt{x}} (1 + 3t^2)\, dt = \Big[t + t^3\Big]_{x^2}^{\sqrt{x}} = \sqrt{x} + (\sqrt{x})^3 - x^2 - x^6.$$

Daher folgt

$$g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{3\sqrt{x}}{2} - 2x - 6x^5,$$

und mit dem Ergebnis aus Teil a) erhält man

$$g'(x) = (1+3x) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} - (1+3x^4) \cdot (2x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{3\sqrt{x}}{2} - 2x - 6x^5.$$

$\square$

Aufgabe 17.4 *Diskutieren Sie die Aussage*

Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar, so gilt für alle $c, d \in (a, b)$

$$\int\limits_c^d f'(x)\, dx = f(d) - f(c)$$

mit Hilfe des Beispiels

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) := \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x^2} & \textit{für} \quad x \neq 0 \\ 0 & \textit{für} \quad x = 0. \end{cases}$$

Lsung von Aufgabe 17.4

Nach der Prduktregel und der Kettenregel ist f für alle $x \neq 0$ differenzierbar mit der Ableitung

$$f'(x) = 2x \sin\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x}\cos\frac{1}{x^2},$$

und es gilt

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}(f(h) - f(0)) = \lim_{h\to 0} \Big(h \sin\frac{1}{h^2}\Big) = 0.$$

Daher ist f differenzierbar in $\mathbb{R}$ mit der Ableitung

$$f'(x) := \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} \cos \frac{1}{x^2} & \text{für} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{für} \quad x = 0. \end{cases}$$

Für $c < 0 < d$ gilt nicht

$$\int_c^d f'(x)\, dx = f(d) - f(c),$$

denn die Funktion f' ist in jeder Umgebung von 0 unbeschränkt, also nicht integrierbar über das Intervall $[c, d]$.

Die Aussage wird richtig, wenn die Integrierbarkeit von f' zusätzlich voraussetzt, d.h.

> Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar und f' inegrierbar über $[a, b]$, so gilt für alle $c, d \in (a, b)$
>
> $$\int_c^d f'(x)\, dx = f(d) - f(c)$$

□

Aufgabe 17.5 *Es sei*

$$f(x) := \int_0^x \frac{\ln(1+t)}{t}\, dt$$

a) Bestimmen Sie den Definitionsbereich von f.

b) Bestimmen Sie eine Potenzreihenentwicklung, und begründen Sie, dass die Potenzreihenentwicklung in ihrem Konvergenzintervall die Funktion f darstellt.

c) Berechnen Sie näherungsweise $f(0.25)$ mit einem absoluten Fehler, der kleiner als 10^{-3} ist.

Lsung von Aufgabe 17.5

a): Der Integrand

$$g(t) := \frac{\ln(1+t)}{t}$$

ist stetig auf $(-1, 0) \cup (0, \infty)$ und besitzt wegen

$$\lim_{t \to 0} \frac{\ln(1+t)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{1/(1+t)}{1} = 1$$

eine stetige Fortsetzung für $t_0 := 0$. Daher existiert das Integral für alle $x > -1$ und der Definitionsbereich von f ist $D_f = (-1, \infty)$.

b) Wir wissen bereits, dass die Funktion $x \mapsto \ln(1+x)$ die Potenzreihenentwicklung

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$$

besitzt und dass diese in ihrem Konvergenzintervall $(-1, 1)$ gegen $\ln(1+x)$ konvergiert (sogar in $(-1, 1]$). Daher folgt

$$g(t) = \frac{\ln(1+t)}{t} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{t^{n-1}}{n},$$

für alle $t \in (-1, 1)$, und da man nach Satz 17.?? Potenzreihen in ihrem Konvergenzintervall gliedweise integrieren kann, erhält man

$$f(x) = \int_0^x g(t)\, dt = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \int_0^x \frac{t^{n-1}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n^2} \tag{17.1}$$

für alle $x \in (-1, 1)$.

c) Für $x = 0.25$ ist die Reihe (17.1) alternierend und die Folge der Beträge der Glieder ist offensichtlich moton fallend. Man erhält also mit dem Leibnitz Kriterium eine Fehlerabschätzung. Die Forderung

$$\Big| f(0.25) - \sum_{n=1}^{m} (-1)^{n-1} \frac{0.25^n}{n^2} \Big| < 10^{-3}$$

ist also sicher dann erfüllt, wenn

$$\frac{0.25^{m+1}}{(m+1)^2} < 10^{-3}$$

gilt. Man rechnet leicht nach, dass dies für $m \geq 3$ erfüllt ist. Daher erfüllt die Näherung

$$f(0.25) \approx 0.25 - \frac{0.25^2}{4} + \frac{0.25^3}{9} \frac{17}{72}$$

die Genauigkeitsanforderungen. □

17.2 Partielle Integration

Aufgabe 17.6 *Bestimmen Sie die folgenden Integrale:*

a) : $\int x^2 \sqrt{1+x}\, dx$ b) : $\int \sin(\ln x)\, dx$

c) : $\int x^4 e^{3x}\, dx$ d) : $\int e^{5x}(4\sin(3x) - 5\cos(3x))\, dx.$

Lsung von Aufgabe 17.6

a): Wir wählen in der Formel (17.??) der partiellen Integration $f'(x) := \sqrt{1+x}$ und $g(x) := x^2$. Dann erhält man

$$\int x^2\sqrt{1+x}\,dx = \frac{2}{3}x^2(1+x)^{3/2} - \frac{4}{3}\int x(1+x)^{3/2}\,dx.$$

Im nächsten Schritt wählen wir $f'(x) = (1+x)^{3/2}$ und $g(x) := x$. Damit folgt

$$\int x^2\sqrt{1+x}\,dx = \frac{2}{3}x^2(1+x)^{3/2} - \frac{4}{3}\Big(\frac{2}{5}x(1+x)^{5/2} - \frac{2}{5}\int (1+x)^{5/2}\,dx\Big).$$

Das letzte Integral ist bekannt. Man erhält schließlich

$$\begin{aligned}\int x^2\sqrt{1+x}\,dx &= \frac{2}{3}x^2(1+x)^{3/2} - \frac{4}{3}\Big(\frac{2}{5}x(1+x)^{5/2} - \frac{2}{5}\cdot\frac{2}{7}(1+x)^{7/2}\Big)\\ &= \frac{2}{105}(1+x)^{3/2}\cdot(15x^2-12x+8).\end{aligned}$$

b): Ähnlich wie bei der Integration von $\ln x$ multiplizieren wir den Integranden mit 1 und wählen in Satz 17.?? $f'(x) = 1$ und $g(x) = \sin(\ln x)$. Hiermit erhält man

$$\begin{aligned}\int 1\cdot\sin(\ln x)\,dx &= x\sin(\ln x) - \int x\cdot\cos(\ln x)\cdot\frac{1}{x}\,dx\\ &= x\sin(\ln x) - \int \cos(\ln x)\,dx.\end{aligned}$$

Erneute partielle Integration mit $f'(x) = 1$ und $g(x) = \cos(\ln x)$ liefert

$$\int 1\cdot\sin(\ln x)\,dx = x\sin(\ln x) - \Big(x\cos(\ln x) + \int x\sin(\ln x)\,dx\Big),$$

und hieraus erhält man

$$\int 1\cdot\sin(\ln x)\,dx = \frac{x}{2}\Big(\sin(\ln x) - \cos(\ln x)\Big) + C.$$

c): Durch mehrfache partielle Integration erhält man

$$\begin{aligned}\int x^4e^{3x}\,dx &= \frac{1}{3}x^4e^{3x} - \frac{4}{3}\int x^3e^{3x}\,dx\\ &= \frac{1}{3}x^4e^{3x} - \frac{4}{3}\Big(\frac{1}{3}x^3e^{3x} - \int x^2e^{3x}\,dx\Big)\\ &= \frac{1}{3}x^4e^{3x} - \frac{4}{3}\Big(\frac{1}{3}x^3e^{3x} - \Big(\frac{1}{3}x^2e^{3x} - \frac{2}{3}\int xe^{3x}\,dx\Big)\Big)\\ &= \frac{1}{3}x^4e^{3x} - \frac{4}{3}\Big(\frac{1}{3}x^3e^{3x} - \Big(\frac{1}{3}x^2e^{3x} - \frac{2}{3}\Big(\frac{1}{3}xe^{3x} - \frac{1}{3}\int e^{3x}\,dx\Big)\Big)\Big)\\ &= \frac{1}{3}x^4e^{3x} - \frac{4}{3}\Big(\frac{1}{3}x^3e^{3x} - \Big(\frac{1}{3}x^2e^{3x} - \frac{2}{3}\Big(\frac{1}{3}xe^{3x} - \frac{1}{9}e^{3x}\,dx\Big)\Big)\Big) + C\\ &= \Big(\frac{1}{4}x^4 - \frac{4}{9}x^3 + \frac{4}{9}x^2 - \frac{8}{27}x + \frac{8}{81}\Big)\cdot e^{3x} + C.\end{aligned}$$

Dieses Ergebnis kann man auch schneller erhalten. Integriert man $x^k e^{mx}$ partiell, so erhält man
$$\int x^k e^{mx}\,dx = \frac{1}{m}x^k e^{mx} - \frac{k}{m}\int x^{k-1}e^{mx}\,dx.$$
Wiederholt man die partielle Integration mehrfach, so erzeugt man offenbar eine Lösung der Gestalt $p(x)e^{mx}$ mit einem Polynom p vom Grade k. Es liegt also nahe, in unserem Fall das unbestimmte Integral anzusetzen als

$$p(x)e^{3x} = (a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0)e^{3x} + C$$

und die a_j, $j = 0, 1, \ldots, 4$, aus der Bedingung

$$\begin{aligned} x^4e^{3x} &= \frac{d}{dx}\Big(p(x)e^{3x}\Big) \\ &= \Big(3a_4x^4 + (4a_4 + 3a_3)x^3 + (3a_3 + 3a_2)x^2 + (2a_2 + 3a_1)x + a_1 + 3a_0\Big) \cdot e^{3x} \end{aligned}$$

zu bestimmen. Durch Koeffizientenvergleich erhält man

$$a_4 = \frac{1}{3},\ a_3 = -\frac{4}{3}a_4 = -\frac{4}{9},\ a_2 = -a_3 = \frac{4}{9},\ a_1 = -\frac{2}{3}a_2 = -\frac{8}{27},\ a_0 = -\frac{1}{3}a_1 = \frac{8}{81},$$

d.h.
$$\int x^4e^{3x}\,dx = \Big(\frac{1}{4}x^4 - \frac{4}{9}x^3 + \frac{4}{9}x^2 - \frac{8}{27}x + \frac{8}{81}\Big) \cdot e^{3x} + C.$$

d): Das Integral
$$\int e^{5x}(4\sin(3x) - 5\cos(3x))\,dx$$
kann man durch zweimalige partielle Integration berechnen. Man macht sich schnell klar, dass man dabei sowohl

$$\int e^{5x}\sin(3x)\,dx = (\alpha\sin(3x) + \beta\cos(3x))e^{5x}$$

als auch
$$\int e^{5x}\cos(3x)\,dx = (\tilde\alpha\sin(3x) + \tilde\beta\cos(3x))e^{5x}$$
mit irgendwelchen Konstanten α, β, $\tilde\alpha$ und $\tilde\beta$ erhalten wird. Wir machen daher den Ansatz

$$u(x) := (a\sin(3x) + b\cos(3x))e^{5x}$$

und bestimmen die Konstanten a und b aus der Bedingung

$$\begin{aligned} u'(x) &= \Big(5(a\sin(3x) + b\cos(3x)) + 3(a\cos(3x) - b\sin(3x))\Big)e^{5x} \\ &= \Big((5a - 3b)\sin(3x) + (3a + 5b)\cos x\Big)e^{5x} = (4\sin(3x) - 5\cos(3x))e^{5x}. \end{aligned}$$

Durch Koeffizientenvergleich erhält man das lineare Gleichungssystem

$$5a - 3b = 4,\ 3a + 5b = -5 \quad \text{mit der Lösung } a = \frac{5}{34},\ b = -\frac{37}{34},$$

und damit

$$\int e^{5x}(4\sin(3x) - 5\cos(3x))\,dx = \frac{1}{34}\Big(5\sin(3x) - 37\cos(3x)\Big)e^{5x}.$$

□

Aufgabe 17.7 *Bestimmen Sie Rekusionsformeln für*

$$\begin{aligned} I_n(x) &:= \int (x^2 - a^2)\,dx,\ n \in \mathbb{N}, \\ J_n(x) &:= \int \frac{dx}{(x^2 - a^2)^n},\ n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Lsung von Aufgabe 17.7

Durch partielle Integration erhält man für $n \geq 2$

$$\begin{aligned} I_n(x) &= \int (x^2 - a^2)^n\,dx = \int x \cdot x(x^2 - a^2)^{n-1}\,dx - a^2 \int (x^2 - a^2)^{n-1}\,dx \\ &= \int x \cdot \frac{d}{dx}\Big(\frac{(x^2 - a^2)^n}{2n}\Big)\,dx - a^2 I_{n-1}(x) \\ &= \frac{x}{2n}(x^2 - a^2)^n - \frac{1}{2n}\int (x^2 - a^2)^n\,dx - a^2 I_{n-1}(x). \end{aligned}$$

Es folgt

$$\frac{2n+1}{2n} I_n(x) = \frac{x(x^2 - a^2)^n}{2n} - a^2 I_{n-1}(x) + C,$$

und daher

$$I_n(x) = \frac{x(x^2 - a^2)^n}{2n+1} - a^2 \frac{2n}{2n+1} I_{n-1}(x) + C.$$

Der Rekursionsformel sieht man an, dass man eine Anfangsbedingung benötigt. Es gilt

$$I_1(x) = \int (x^2 - a^2)\,dx = \frac{1}{3}x^3 - a^2 x + C.$$

Für das zweite Integral erhält man für $n \geq 2$ durch partielle Integration

$$\begin{aligned} J_{n-1}(x) &= \int \frac{dx}{(x^2 - a^2)^{n-1}}\,dx = \int x \cdot \frac{x}{(x^2 - a^2)^n}\,dx - a^2 \int \frac{dx}{(x^2 - a^2)^n} \\ &= -\int x \cdot \frac{d}{dx}\Big(-\frac{1}{2(n-1)}(x^2 - a^2)^{1-n}\Big)\,dx - a^2 J_n(x) \\ &= -\frac{x}{2(m-1)(x^2 - a^2)^n} + \frac{1}{2(n-1)}\int \frac{dx}{(x^2 - a^2)^m - 1} - a^2 J_n(x). \end{aligned}$$

Löst man diese Gleichung nach $J_n(x)$ auf, so erhält man schließlich

$$J_n(x) = -\frac{1}{a^2}\Big(\frac{x}{2(n-1)(x^2 - a^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2} J_{n-1}(x)\Big) + C.$$

Die Anfangsbedingung ist

$$J_1(x) = \int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\int \Big(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a}\Big)\,dx = \frac{1}{2a}\ln\Big|\frac{x-a}{x+a}\Big| + C.$$

□

Aufgabe 17.8 *a) Bestimmen Sie durch partielle Integration eine Rekursionsformel für*

$$I_n(x) := \int \sin^n x \, dx, \quad n \in \mathbb{N}.$$

b) Berechnen Sie

$$\int_0^\pi \sin^5 x \, dx, \quad \int_0^\pi \sin^6 x \, dx.$$

Lsung von Aufgabe 17.8

a): Durch partielle Integration erhält man für $n \geq 3$

$$\begin{aligned} I_n(x) &= \int \sin^n x \, dx = \int (1 - \cos^2 x) \sin^{n-2} x \, dx \\ &= \int \sin^{n-2} x \, dx - \int \cos x \cdot \frac{d}{dx}\Big(\frac{1}{n-1} \sin^{n-1} x\Big) \, dx \\ &= I_{n-2}(x) - \frac{1}{n-1} \cos x \sin^{n-1} x - \frac{1}{n-1} \int \sin^n x \, dx. \end{aligned}$$

Es folgt

$$\frac{n}{n-1} I_n(x) = I_{n-2}(x) - \frac{1}{n-1} \cos x \sin^{n-1} x + C,$$

und daher

$$I_n(x) = \frac{n-1}{n} I_{n-2}(x) - \frac{1}{n-1} \cos x \sin^{n-1} x + C.$$

Die Rekursion greift also auf zwei vorhergende Terme zurück. Wir benötigen daher als Anfangsbedingungen I_1 und I_2. Diese sind aber bereits bekannt. Es gilt

$$\begin{aligned} I_1(x) &= \int \sin x \, dx = -\cos x + C, \\ I_2(x) &= \int \sin^2 x \, dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \sin x \cos x + C. \end{aligned}$$

b): Mit der Rekursionsformel aus Teil a) gilt

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \sin^5 x \, dx &= \frac{4}{5} \int_0^\pi \sin^3 x \, dx - \frac{1}{4} \Big[\cos x \sin^4 x\Big]_0^\pi \\ &= \frac{4}{5} \Big(\frac{2}{3} \int_0^\pi \sin x \, dx - \frac{1}{2} \Big[\cos x \sin^2 x\Big]_0^\pi\Big) \\ &= \frac{8}{15} \Big[-\cos x\Big]_0^\pi = -\frac{16}{15} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \sin^6 x \, dx &= \frac{5}{6} \int_0^\pi \sin^4 x \, dx - \frac{1}{5} \Big[\cos x \sin^5 x\Big]_0^\pi \\ &= \frac{5}{6} \Big(\frac{3}{4} \int_0^\pi \sin^2 x \, dx - \frac{1}{3} \Big[\cos x \sin^3 x\Big]_0^\pi\Big) \\ &= \frac{5}{8} \Big[\frac{x}{2} - \frac{1}{2} \sin x \cos x\Big]_0^\pi = \frac{5\pi}{16}. \end{aligned}$$

□

Aufgabe 17.9 *Es sei für* $n \in \mathbb{N}$

$$p_n(x) := \frac{d^n}{dx^n}\Big\{(x^2-1)^n\Big\}.$$

Zeigen Sie, dass gilt

$$\int_{-1}^{1} p_n(x)p_m(x)\,dx = 0 \quad \textit{für alle } n \neq m$$

gilt, dass die p_n *also ein System orthogonaler Polynome im Raum* $C[-1,1]$ *mit dem inneren Produkt*

$$\langle f, g\rangle := \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,dx$$

bilden. Die p_n *sind (bis auf die Normierung) die* **Legendre Polynome**.

Lsung von Aufgabe 17.9

p_n ist als n-te Ableitung eines Polynoms vom Grad $2n$ ein Polynom vom Grad n. Für $k < n$ ist die k-te Ableitung von p_n ein Polynom vom Grad $n-k$, das offensichtlich durch $(x^2-1)^{n-k}$ teilbar ist. Es gilt also

$$\frac{d^k}{dx^k}p_n(x)\Big|_{x=\pm 1} = 0 \quad \text{für } k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Mit der Bezeichnung

$$q_n(x) := (x^2-1)^n$$

erhält man daher für alle $m < n$ durch partielle Integration

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} p_n(x)p_m(x)\,dx &= \int_{-1}^{1} \frac{d^n}{dx^n}q_n(x)\cdot\frac{d^m}{dx^m}q_m(x)\,dx \\ &= \Big[\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}q_n(x)\frac{d^m}{dx^m}q_m(x)\Big]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}q_n(x)\cdot\frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}}q_m(x)\,dx \\ &= -\int_{-1}^{1}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}q_n(x)\cdot\frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}}q_m(x)\,dx.\end{aligned}$$

Wiederholt man diesen Schritt, so sind auch in den folgenden partiellen Ableitungen die Randterme gleich Null. Nach m partiellen Integrationen erhält man

$$\int_{-1}^{1} p_n(x)p_m(x)\,dx = (-1)^m\int_{-1}^{1}\frac{d^{n-m}}{dx^{n-m}}q_n(x)\cdot\frac{d^{2m}}{dx^{2m}}q_m(x)\,dx,$$

und der $(m+1)$-te Schritt liefert

$$\int_{-1}^{1} p_n(x)p_m(x)\,dx = (-1)^m\Big[\frac{d^{n-m-1}}{dx^{n-m-1}}q_n(x)\frac{d^{2m}}{dx^{2m}}q_m(x)\Big]_{-1}^{1}$$
$$+(-1)^{m+1}\int_{-1}^{1}\frac{d^{n-m-1}}{dx^{n-m-1}}q_n(x)\cdot\frac{d^{2m+1}}{dx^{2m+1}}q_m(x)\,dx = 0,$$

da q_m ein Polynom vom Grad $2m$ ist und daher die $(2m+1)$-te Ableitung von q_m verschwindet. □

Aufgabe 17.10 *a) Es sei $f \in C^2[a,b]$. Zeigen Sie, dass es ein $\xi \in (a,b)$ gibt mit*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{2}\big(f(a)+f(b)\big) - f''(\xi)\frac{(b-a)^3}{12}\ .$$

b) Warum heißt die Näherungsformel

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{2}\big(f(a)+f(b)\big)$$

Trapezregel?

c) Man zeige, dass für jede konvexe Funktion $f\ :\ [a,b]\to\mathbb{R}$. die Trapezregel eine obere Schranke für das Integral von f über $[a,b]$ liefert.

Hinweis: *Man zeige in Teil a) zunächst durch partielle Integration, dass*

$$\frac{1}{2}\int_a^b f''(x)(x-a)(b-x)\,dx = \frac{b-a}{2}\big(f(a)+f(b)\big) - \int_a^b f(x)\,dx$$

gilt, und wende dann den Mittelwertsatz der Integralrechnung an.

Lsung von Aufgabe 17.10

a): Durch partielle Integration erhält man

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\int_a^b (b-x)(x-a)f''(x)\,dx\\
&= \frac{1}{2}\Big\{\ [f'(x)(b-x)(x-a)]_a^b - \int_a^b f'(x)(a+b-2x)\,dx\Big\}\\
&= -\frac{1}{2}\int_a^b f'(x)(a+b-2x)\,dx\\
&= -\frac{1}{2}\Big\{\ [f(x)(a+b-2x)]_a^b + 2\int_a^b f(x)\,dx\Big\}\\
&= \frac{b-a}{2}\big(f(b)+f(a)\big) - \int_a^b f(x)\,dx\ .
\end{aligned}$$

Andererseits gibt es wegen $(b-x)(x-a) \geq 0$ für alle $x \in [a,b]$ nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung ein $\xi \in (a,b)$ mit

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_a^b (b-x)(x-a)f''(x)\,dx &= \frac{1}{2}f''(\xi)\int_a^b (b-x)(x-a)\,dx \\ &= \frac{1}{12}f''(\xi)(b-a)^3\ .\end{aligned}$$

Zusammen erhält man

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{2}\big(f(a)+f(b)\big) - \frac{1}{12}f''(\xi)(b-a)^3\ .$$

b):

$$\frac{b-a}{2}\big(f(a)+f(b)\big)$$

ist die Fläche des Trapezes mit den Eckpunkten $(a,0)$, $(b,0)$, $(b,f(b))$, $(a,f(a))$. Die Fläche unter dem Graphen von f wird also durch ein Trapez approximiert.

c): Ist f konvex, so ist f nach Satz 15.16 stetig, und daher existiert das Integral

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

Es gilt für die Sekante

$$s(x) = f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) \geq f(x) \quad \text{für alle } x \in [a,b]\ ,$$

und daher

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b s(x)\,dx = \frac{b-a}{2}\big(f(a)+f(b)\big)\ .$$

Für $f \in C^2[a,b]$ erhält man die Aussage aus Teil a) , da dann $f''(x) \geq 0$ für alle $x \in [a,b]$ gilt. □

17.3 Substitutionsregel

Aufgabe 17.11 *Berechnen Sie die folgenden bestimmten Integrale*

$$\text{a)}:\ \int_0^1 e^{3x}\cos\left(e^x\right)dx, \qquad \text{b)}:\ \int_0^2 \frac{x^3}{1+x^4}\,dx,$$

$$\text{c)}:\ \int_0^{\pi^2} \sin\left(\sqrt{x}\right)dx, \qquad \text{d)}:\ \int_{-1}^0 \frac{dx}{\arccos x}.$$

Lsung von Aufgabe 17.11

a): Mit der Substitution $\psi(x) = e^x =: t$ gilt wegen $\psi'(x) = e^x = t$

$$\int_0^1 e^{3x} \cos(e^x)\, dx = \int_{\psi(0)}^{\psi(1)} t^3 \cos t \cdot \frac{1}{t}\, dt = \int_1^e t^2 \cos t\, dt,$$

und durch partielle Integration folgt

$$\begin{aligned}
\int_1^e t^2 \cos t\, dt &= \Big[t^2 \sin t\Big]_1^e - \int_1^e 2t \sin t\, dt \\
&= \Big[t^2 \sin t\Big]_1^e - \Big[-2t\cos t\Big]_1^e - \int_1^e 2\cos t\, dt \\
&= \Big[t^2 \sin t\Big]_1^e + \Big[2t\cos t\Big]_1^e - \Big[2\sin t\Big]_1^e \\
&= \Big(e^2 - 2\Big) \sin e + \sin 1 + 2(e\cos e - \cos 1)\ .
\end{aligned}$$

b): Mit der Substitution $\phi(x) = 1 + x^4$ gilt wegen $\phi'(x) = 4x^3$

$$\int_0^2 \frac{x^3}{1+x^4}\, dx = \frac{1}{4}\int_0^2 \frac{\phi'(x)}{\phi(x)}\, dx = \frac{1}{4}\Big[\ln(1+x^4)\Big]_0^2 = \frac{1}{4}\ln 17\ .$$

c): Mit $\psi(x) = \sqrt{x} := t$ gilt wegen $\psi'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{1}{2t}$

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi^2} \sin(\sqrt{x})\, dx &= \int_0^{\pi} (\sin t)\cdot 2t\, dt = -\Big[2t\cos t\Big]_0^{\pi} + 2\int_0^{\pi} \cos t\, dt \\
&= 2\pi + 2\Big[\sin t\Big]_0^{\pi} = 2\pi
\end{aligned}$$

d): Mit $\psi(x) = \arccos x =: t$ gilt wegen $\psi'(x) = -\dfrac{1}{\sin\psi(x)} = -\dfrac{1}{\sin t}$

$$\int_{-1}^0 \frac{dx}{\arccos x} = -\int_{\pi}^{\pi/2} \frac{\sin t}{t}\, dt = \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{\sin t}{t}\, dt = Si(\pi) - Si(\frac{\pi}{2})\ .$$

□

17.4 Partialbruchzerlegung

Aufgabe 17.12 *Bestimmen Sie die folgenden unbestimmten Integrale:*

a) : $\displaystyle\int \frac{4x^3 - 12x^2 + 1}{x^4 - 4x^3 + x + 1}\, dx,$ b) : $\displaystyle\int \frac{x^4 + 2x - 3}{x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 6x + 3}\, dx,$

c) : $\displaystyle\int \frac{(x+1)^2}{(x-2)^2(x^2 - x + 1)}\, dx,$ d) : $\displaystyle\int \frac{8x+7}{(x^2 - 4x + 8)^3}\, dx.$

Lsung von Aufgabe 17.12

a): Es ist

$$\frac{d}{dx}\left(x^4-4x^3+x+1\right)=4x^3-12x^2+1\ ,$$

und daher gilt

$$\int\frac{4x^3-12x^2+1}{x^4-4x^3+x+1}\,dx=\ln\left|x^4-4x^3+x+1\right|+c.$$

b): Mit

$$p(x):=x^4+2x-3\ ,\quad q(x):=x^4+2x^3+4x^2+6x+3$$

gilt

$$\begin{aligned}\frac{p(x)}{q(x)}&=1-\frac{2x^3+4x^2+4x+6}{q(x)}=1-\frac{1}{2}\frac{q'(x)}{q(x)}-\frac{x^2+3}{q(x)}\\&=1-\frac{1}{2}\frac{q'(x)}{q(x)}-\frac{1}{(x+1)^2}\end{aligned}$$

und daher

$$\int\frac{x^4+2x-3}{x^4+2x^3+4x^2+6x+3}\,dx=x-\frac{1}{2}\ln\left|x^4+2x^3+4x^2+6x+3\right|+\frac{1}{x+1}+c.$$

Daßman auf diese Weise das Integral so vereinfachen kann, ist ein seltener Glücksfall. Mit Partialbruchzerlegung bekommt die Bearbeitung der Aufgabe die folgende Gestalt:

Es ist

$$\frac{p(x)}{q(x)}=1-\frac{2x^3+4x^2+4x+6}{x^4+2x^3+4x^2+6x+3}\ .$$

Den Nenner kann man zerlegen in $q(x)=(x+1)^2(x^2+3)$. Wir machen daher den Ansatz

$$\frac{2x^3+4x^2+4x+6}{q(x)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{(x+1)^2}+\frac{Cx+D}{x^2+3}\ ,$$

der auf die Bestimmungsgleichung

$$2x^3+4x^2+4x+6=(A(x+1)+B)(x^2+3)+(Cx+D)(x+1)^2 \tag{17.2}$$

für A,B,C,D führt.

Für $x=-1$ erhält man

$$4=4B\ ,\ \text{d.h. } B=1\ ,$$

und die differenzierte Gleichung

$$6x^2+8x+4=A(x^2+3)+2Bx+(x+1)(\ldots)$$

liefert an der Stelle $x = -1$

$$2 = 4A - 2B \ , \ \text{d.h. } A = 1 \ .$$

Für $x = 0$ besagt (17.2)

$$6 = 3(A + B) + D \ , \ \text{d.h. } D = 0 \ ,$$

und für $x = 1$

$$16 = (2A + B) \cdot 4 + 4(C + D) = 12 + 4C \ , \ \text{d.h. } C = 1 \ .$$

Damit erhält man

$$\begin{aligned}
\int \frac{p(x)}{q(x)}\,dx &= \int \left(1 - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{2}\frac{2x}{x^2+3}\right) dx \\
&= x - \ln|x+1| + \frac{1}{x+1} - \frac{1}{2}\ln(x^2+3) + c \ . \\
&= x - \frac{1}{2}\ln|q(x)| + \frac{1}{x+1} + c \ .
\end{aligned}$$

c): Aus dem Ansatz

$$\frac{(x+1)^2}{(x-2)^2(x^2-x+1)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{(x-2)^2} + \frac{Cx+D}{x^2-x+1}$$

erhält man

$$x^2 + 2x + 1 = (A(x-2) + B)(x^2 - x + 1) + (Cx + D)(x-2)^2 \ . \tag{17.3}$$

Einsetzen von $x = 2$ liefert

$$9 = B \cdot 3 \ , \ \text{d.h } B = 3 \ ,$$

und für die differenzierte Gleichung

$$2x + 2 = A(x^2 - x + 1) + B(2x - 1) + (x - 2)(\ldots)$$

an der Stelle $x = 2$

$$6 = 3A + 3B \ , \ \text{d.h. } A = -1 \ .$$

Setzt man in (17.3) $x = 0$ ein, so erhält man

$$1 = -2A + B + 4D = 5 + 4D \ , \ \text{d.h } D = -1 \ ,$$

und für $x = 1$

$$4 = -A + B + C + D = 3 + C \ , \ \text{d.h. } C = 1 \ .$$

Damit lautet die Partialbruchzerlegung

$$\frac{(x+1)^2}{(x-2)^2(x^2-x+1)} = -\frac{1}{x-2} + \frac{3}{(x-2)^2} + \frac{x-1}{x^2-x+1}\ ,$$

und es folgt

$$\begin{aligned}
&\int \frac{(x+1)^2}{(x-2)^2(x^2-x+1)}\,dx \\
&= \quad -\ln|x-2| - \frac{3}{x-2} + \frac{1}{2}\int \frac{2(x-0.5)}{((x-0.5)^2+0.75)}\,dx - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2-x+1} \\
&= \quad -\ln|x-2| - \frac{3}{x-2} + \frac{1}{2}\ln(x^2-x+1) - \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan(\frac{2}{\sqrt{3}}(x-\frac{1}{2})) + C \\
&= \quad -\ln|x-2| - \frac{3}{x-2} + \frac{1}{2}\ln(x^2-x+1) - \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}) + C\ .
\end{aligned}$$

d): Für diesen Integranden liegt bereits die Partialbruchzerlegung vor. Es gilt

$$\int \frac{8x+7}{(x^2-4x+8)^3}\,dx = 4\int \frac{2(x-2)}{((x-2)^2+2^2)^3}\,dx + 23\int \frac{1}{((x-2)^2+2^2)^3}\,dx.$$

Hieraus erhält man mit der Variablensubstitution $\psi(x) := 0.5(x-2) =: t$ für das zweite Integral der rechten Seite

$$\int \frac{8x+7}{(x^2-4x+8)^3}\,dx = -\frac{2}{(x^2-4x+8)^2} + \frac{23}{2^5}\int \frac{dt}{(1+t^2)^3}.$$

Für das letzte Integral erhalten wir mit der Rekursion aus Satz.??

$$\begin{aligned}
\int \frac{dt}{(1+t^2)^3} &= \frac{1}{4}\Big(\frac{t}{(1+t^2)^2} + 3\int \frac{dt}{(1+t^2)^2}\Big) \\
&= \frac{1}{4}\Big(\frac{t}{(1+t^2)^2} + \frac{3}{2}\cdot\frac{t}{1+t^2} + \frac{3}{2}\int \frac{dt}{1+t^2}\Big) \\
&= \frac{1}{4}\Big(\frac{t}{(1+t^2)^2} + \frac{3}{2}\cdot\frac{t}{1+t^2} + \frac{3}{2}\arctan t\Big) + C.
\end{aligned}$$

Damit erhalten wir insgesamt

$$\begin{aligned}
&\int \frac{8x+7}{(x^2-4x+8)^3}\,dx = -\frac{2}{(x^2-4x+8)^2} \\
&\quad + \frac{23}{32}\cdot\frac{1}{4}\Big(\frac{8(x-2)}{(x^2-4x+8)^2} + \frac{3}{2}\cdot\frac{2(x-2)}{x^2-4x+8} + \frac{3}{2}\cdot\arctan\Big(\frac{1}{2}(x-2)\Big) + C\Big).
\end{aligned}$$

□

17.5 Transformation in rationale Funktionen

Aufgabe 17.13 *Bestimmen Sie die folgenden unbestimmten Integrale:*

a) :	$\int (2x+4)^3\,dx$	b) :	$\int \cos(3x-4)\,dx$
c) :	$\int \frac{dx}{2x+5}$	d) :	$\int \frac{2x+3}{x^2+3x+4}\,dx$
e) :	$\int \sinh x \cosh x\,dx$	f) :	$\int e^x \sin(3x+4)\,dx$
g) :	$\int x^2(3x-5)^4\,dx$	h) :	$\int x^2 e^{-x}\,dx$
i) :	$\int x^n \ln x\,dx\ ,\ n \in \mathbb{N}$	j) :	$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+3}}\,dx$
k) :	$\int \frac{x\ln(1+x^2)}{1+x^2}\,dx$	l) :	$\int \frac{x\ln x}{(x^2-1)^{3/2}}\,dx$
m) :	$\int \frac{x+1}{x^2-3x+2}\,dx$	n) :	$\int \frac{x^2+1}{(x+2)^3}\,dx$
o) :	$\int e^{\cos x}\sin x\,dx$	p) :	$\int \frac{x^2-2x}{(2x+1)(x^2+1)}$
q) :	$\int \frac{1-\sin t}{\cos^2 t}\,dt$	r) :	$\int \frac{2x^3+7x^2+7x+7}{(1+x)^2(x^2+2x+2)}\,dx$
s) :	$\int \cos^4 t\,dt$	t) :	$\int \frac{x^2+x}{(x^2+1)^2}\,dx$

Lsung von Aufgabe 17.13

Wir geben nur die Lösungen ohne den Lösungsweg an.

a):

$$\int (2x+4)^3\,dx = \frac{1}{8}(2x+4)^4,$$

b):

$$\int \cos(3x-4)\,dx = \frac{1}{3}\sin(3x-4),$$

c):

$$\int \frac{dx}{2x+5} = \frac{1}{2}\ln(2x+5),$$

d):

$$\int \frac{2x+3}{x^2+3x+4}\,dx = \ln\left(x^2+3x+4\right),$$

e):

$$\int \sinh x \cosh x\,dx = \frac{1}{2}\sinh^2 x,$$

f):

$$\int e^x \sin(3x+4)\,dx = \frac{e^x}{10}\Big(\sin(3x+4) - 3\cos(3x+4)\Big),$$

g):
$$\int x^2(3x-5)^4\,dx = \frac{81}{7}x^7 - 90x^6 + 270x^5 - 375x^4 + \frac{625}{3}x^3,$$

h):
$$\int x^2 e^{-x}\,dx = -e^{-x}(x^2+2x+2),$$

i):
$$\int x^n \ln x\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\ln x - \frac{1}{(n+1)^2}x^{n+1},$$

j):
$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+3}}\,dx = \sqrt{x^2+3},$$

k):
$$\int \frac{x\ln(1+x^2)}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{4}\cdot\Big(\ln(1+x^2)\Big)^2,$$

l):
$$\int \frac{x\ln x}{(x^2-1)^{3/2}}\,dx = \arctan(\sqrt{x^2-1}) - \frac{\ln x}{\sqrt{x^2-1}},$$

m):
$$\int \frac{x+1}{x^2-3x+2}\,dx = 3\ln(x-2) - 2\ln(x-1),$$

n):
$$\int \frac{x^2+1}{(x+2)^3}\,dx = \ln(x+2) - \frac{5}{2(2+x)^2} + \frac{4}{2+x},$$

o):
$$\int e^{\cos x}\sin x\,dx = -e^{\cos x},$$

p):
$$\int \frac{x^2-2x}{(2x+1)(x^2+1)}\,dx = -\arctan\,x + \frac{1}{2}\ln(1+2x),$$

q):
$$\int \frac{1-\sin t}{\cos^2 t}\,dt = \frac{-2}{tan\frac{t}{2}+1},$$

r):
$$\begin{aligned}\int \frac{2x^3+7x^2+7x+7}{(1+x)^2(x^2+2x+2)}\,dx &= -4\arctan(1+x) - \ln(1+x)\\ &\quad +\frac{3}{2}\ln\Big(x^2+2x+2\Big) - \frac{5}{1+x},\end{aligned}$$

s):
$$\int \cos^4 t\,dt = \frac{3}{8}t + \frac{\sin(2t)}{4} + \frac{\sin(4t)}{32},$$

t):
$$\int \frac{x^2+x}{(x^2+1)^2}\,dx = \frac{1}{2}\arctan x - \frac{1}{2}\cdot\frac{x+1}{x^2+1}.$$

□

Kapitel 18

Uneigentliche Integrale

18.1 Unbeschränkte Integrationsintervalle

Aufgabe 18.1 *Berechnen Sie die folgenden uneigentlichen Integrale, sofern sie existieren:*

$$\text{a)}\quad \int_2^\infty \frac{4x-8}{x(x^2-4)}\,dx, \qquad \text{b)}\quad \int_0^\infty \frac{\sin \alpha x}{x}\,dx, \quad \alpha > 0,$$

$$\text{c)}\quad \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\cosh x}\,dx, \qquad \text{d)}\quad \int_2^\infty \frac{dx}{x\cdot(\ln x)^\mu}, \quad \mu \in \mathbb{R}.$$

Lsung von Aufgabe 18.1
a): Es gilt für alle $x \geq 2$

$$\frac{4x-8}{x(x^2-4)} = \frac{4}{x(x+2)} = \frac{2}{x} - \frac{2}{x+2}.$$

Daher folgt

$$\begin{aligned}
\int_2^\infty \frac{4x-8}{x(x^2-4)}\,dx &= \int_2^\infty \frac{4}{x(x+2)}\,dx = 2\int_2^\infty \Big(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+2}\Big)\,dx \\
&= 2\lim_{b\to\infty}\Big(\int_2^b \frac{dx}{x} - \int_2^b \frac{dx}{x+2}\Big) = 2\lim_{b\to\infty}\Big([\ln x]_2^b - [\ln(2+x)]_2^b\Big) \\
&= 2\lim_{b\to\infty}\Big(\ln b - \ln 2 - \ln(2+b) + \ln 4\Big) \\
&= 2\lim_{b\to\infty}\Big(\ln 2 - \ln\frac{b+2}{b}\Big) = 2\ln 2.
\end{aligned}$$

Das uneigentliche Integral existiert also und hat den Wert $2\ln 2$.

b): Wir wissen, dass nach Beispiel 19.4 das uneigentliche Integral

$$\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\,dt$$

konvergiert. Für $\alpha > 0$ erhalten wir mit der Variablentransformation $t = \alpha \cdot x$

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\,dt &= \lim_{b\to\infty}\int_0^b \frac{\sin t}{t}\,dt \\ &= \lim_{b\to\infty}\int_0^{b/\alpha} \frac{\sin(\alpha x)}{x}\,dx \\ &= \int_0^\infty \frac{\sin(\alpha x)}{x}\,dx.\end{aligned}$$

Das Integral existiert also für alle $\alpha > 0$. Der Wert des Integrals ist $\pi/2$ unabhängig von α.

c): Es gilt

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\cosh x}\,dx &= 2\Big(\lim_{a\to-\infty}\int_a^0 \frac{1}{e^x+e^{-x}}\,dx + \lim_{b\to\infty}\int_0^b \frac{1}{e^x+e^{-x}}\,dx\Big) \\ &= 2\Big(\lim_{a\to-\infty}\int_a^0 \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx + \lim_{b\to\infty}\int_0^b \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx\Big) \\ &= 2\Big(\lim_{a\to-\infty}\Big[\arctan e^x\Big]_a^0 + \lim_{b\to\infty}\Big[\arctan e^x\Big]_0^b\Big) \\ &= \lim_{a\to-\infty}\Big(\frac{\pi}{4} - \arctan e^a\Big) + \lim_{b\to\infty}\Big(\arctan e^b - \frac{\pi}{4}\Big) \\ &= \frac{\pi}{4} - 0 + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

Das uneigentliche Integral existiert also und hat den Wert 0.5π.

d): Es ist

$$\int_2^\alpha \frac{1}{x(\ln x)^\mu}\,dx = \begin{cases} \Big[\frac{1}{1-\mu}(\ln x)^{1-\mu}\Big]_2^\alpha & \text{für } \mu \neq 1 \\ [\ln(\ln x)]_2^\alpha & \text{für } \mu = 1\ . \end{cases}$$

Hieraus liest man ab, dass das uneigentliche Integral

$$\int_2^\infty \frac{dx}{x(\ln x)^\mu}$$

genau dann existiert, wenn $\mu > 1$ gilt, und dass

$$\int_2^\infty \frac{dx}{x\cdot(\ln x)^\mu} = \frac{1}{\mu-1}(\ln 2)^{1-\mu} \quad \text{für } \mu > 1$$

gilt. □

Aufgabe 18.2 *Untersuchen Sie die Konvergenz der folgenden uneigentlichen Integrale:*

a)	$\int\limits_0^\infty \frac{\lvert\sin x\rvert}{x^2+4x+3}\,dx$	b)	$\int\limits_1^\infty \frac{\ln x}{x^\mu}\,dx, \quad \mu > 0,$
c)	$\int\limits_{-\infty}^\infty \frac{\lvert\sin x\rvert + \lvert\cos x\rvert}{\lvert x\rvert+1}\,dx,$	d)	$\int\limits_{-\infty}^\infty e^{-x}\,dx,$
e)	$\int\limits_{-\infty}^\infty e^{-\lvert x\rvert},dx,$	f)	$\int\limits_0^\infty \frac{x}{\sqrt{1+x^4}}\,dx.$

Lsung von Aufgabe 18.2

a): Das Integral konvergiert nach dem Majorantenkriterium, denn es gilt

$$\left|\frac{\sin x}{x^2+4x+3}\right| \le \frac{1}{x^2} \quad \text{für alle } x \ge 0.$$

b): Für $\mu \le 1$ gilt

$$\frac{\ln x}{x^\mu} \ge \frac{\ln 2}{x} \quad \text{für alle } x \ge 2.$$

Nach dem Minorantenkriterium divergiert das Integral

$$\int\limits_2^\infty \frac{\ln x}{x^\mu}\,dx \quad \text{und damit auch} \quad \int\limits_1^\infty \frac{\ln x}{x^\mu}\,dx.$$

Es sei nun $\mu > 1$. Für alle $\alpha > 0$ gilt

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0,$$

und daher ist die stetige Funktion $x \mapsto \ln x/x^\alpha$ beschränkt auf dem Intervall $[1,\infty)$. Es existiert also ein $C = C(\alpha)$ mit

$$\left|\frac{\ln x}{x^\alpha}\right| = \frac{\ln x}{x^\alpha} \le C \quad \text{für alle } x \ge 1.$$

Für $\alpha = 0.5(\mu-1)$ gilt daher

$$\left|\frac{\ln x}{x^\mu}\right| = \frac{\ln x}{x^\alpha x^{\mu-\alpha}} \le \frac{C}{x^{\mu-\alpha}} \quad \text{für alle } x \ge 1.$$

Wegen $\mu - \alpha = 0.5(\mu+1) > 1$ ist die rechte Seite uneigentlich integrierbar über $[1,\infty)$, und nach dem Majorantenkriterium existiert das gegebene Integral.

c): Es ist $\|\boldsymbol{y}\|_2 \le \|\boldsymbol{y}\|_1$ für alle $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ und daher

$$\lvert\sin x\rvert + \lvert\cos x\rvert \ge \sin^2 x + \cos^2 x = 1 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Damit folgt

$$\frac{\lvert\sin x\rvert + \lvert\cos x\rvert}{\lvert x\rvert+1} \ge \frac{1}{\lvert x\rvert+1} \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R},$$

und da die Funktion $x \mapsto 1/(1+|x|)$ nicht uneigentlich integrierbar über $\mathbb{R}$ ist, divergiert nach dem Minorantenkriterium das gegebene Integral.

d): Das Integral

$$\int_{-\infty}^{0} e^{-x}\,dx = \lim_{a\to-\infty}\left[-e^{-x}\right]_a^0 = \lim_{a\to-\infty}(e^{-a}-1)$$

existiert nicht, und daher auch nicht das gegebene Integral.

e): Es gilt

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|}\,dx &= \lim_{a\to-\infty}\int_{-\infty}^{0} e^{x}\,dx + \lim_{b\to\infty}\int_{0}^{\infty} e^{-x}\,dx\\ &= \lim_{a\to-\infty}(1-e^{a}) + \lim_{b\to\infty}(1-e^{-b}) \;=\; 2.\end{aligned}$$

f): Es gilt für alle $x \geq 1$

$$\frac{x}{\sqrt{1+x^4}} \geq \frac{x}{\sqrt{1+2x^2+x^4}} \geq \frac{x}{1+x^2} \geq \frac{x}{x+x^2} = \frac{1}{1+x},$$

und da die Funktion $x \mapsto 1/(1+x)$ nicht über das Intervall $[1,\infty)$ uneigentlich integrierbar ist, ist nach dem Monotoniekriterium auch $x \mapsto x/\sqrt{1+x^4}$ nicht über $[1,\infty)$ und dann auch nicht über $[0,\infty)$ integrierbar. □

Aufgabe 18.3 *Man begründe, dass das uneigentliche Integral*

$$\int_0^{\infty} e^{-x}|\sin x|\,dx$$

existiert, und berechne es.

Lsung von Aufgabe 18.3

Die Existenz des Integrals folgt unmittelbar aus dem Majorantenkriterium, denn es gilt

$$\left|e^{-x}\sin x|\right| \leq e^{-x},$$

und das Integral $\int_0^{\infty} e^{-x}\,dx$ konvergiert.

Es gilt

$$\int_0^{\infty} e^{-x}|\sin x|\,dx = \sum_{n=0}^{\infty}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-x}|\sin x|\,dx = \sum_{n=0}^{\infty}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}(-1)^n e^{-x}\sin x\,dx$$

Durch zweimalige partielle Integration erhält man

$$\int e^{-x} \sin x \, dx = -\frac{1}{2} e^{-x} (\sin x + \cos x) + C,$$

d.h.

$$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-x} \sin x \, dx = (-1)^n \frac{1}{2} \Big(e^{-n\pi} + e^{-n\pi} \Big).$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-x} |\sin x| \, dx &= \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{2} \Big(e^{-n\pi} + e^{-n\pi} \Big) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^\infty e^{-n\pi} \\ &= \frac{1}{2} + e^{-\pi} \frac{1}{1 - e^{-\pi}} = \frac{1 + e^{-\pi}}{2(1 - e^{-\pi})}. \end{aligned}$$

□

Aufgabe 18.4 *Weisen Sie ohne Benutzung des Cauchy Kriteriums nach, dass das uneigentliche Integral*

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} \, dx$$

existiert.

Hinweis: Untersuchen zunächst die Reihe

$$\sum_{n=0}^\infty \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin x}{x} \, dx.$$

Lsung von Aufgabe 18.4

$x \mapsto \sin x / x$ durch ist stetig fortsetzbar auf $[0, \infty)$ und daher lokal integrierbar.

Wie im Hinweis empfohlen untersuchen wir zunächst die Reihe

$$\sum_{n=0}^\infty a_n := \sum_{n=0}^\infty \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin x}{x} \, dx. \tag{18.1}$$

Wegen

$$\sin x \begin{cases} > 0 \quad , \quad x \in (2k\pi, \ (2k+1)\pi) \\ < 0 \quad , \quad x \in ((2k-1)\pi, \ 2k\pi) \end{cases}$$

gilt $a_n > 0$ für gerades n und $a_n < 0$ für ungerades n. Die Reihe ist also alternierend.

Ferner ist die Folge $\{|a_n|\}$ wegen

$$\begin{aligned}
|a_{n+1}| &= \Big|\int_{(n+1)\pi}^{(n+2)\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx\Big| = \int_{(n+1)\pi}^{(n+2)\pi} \frac{|\sin x|}{x}\,dx \\
&\le \frac{1}{(n+1)\pi}\int_{(n+1)\pi}^{(n+2)\pi} |\sin x|\,dx = \frac{1}{(n+1)\pi}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin x|\,dx \\
&\le \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x}\,dx = |a_n|
\end{aligned}$$

monoton fallend und wegen

$$|a_n| = \frac{1}{n\pi}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin x|\,dx \to 0$$

eine Nullfolge. Nach dem Leibnitz Kriterium konvergiert also die Reihe (18.1) gegen ein s.

Es konvergiert auch

$$\lim_{A\to\infty}\int_0^A \frac{\sin x}{x}\,dx,$$

denn mit der Bezeichnung $\tilde{A} := \lfloor A/\pi \rfloor$ gilt

$$\begin{aligned}
\Big|\int_0^A \frac{\sin x}{x}\,dx - s\Big| &\le \Big|\int_0^{\tilde{A}\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx - s\Big| + \Big|\int_{\tilde{A}\pi}^{A} \frac{\sin x}{x}\,dx\Big| \\
&\le \Big|\int_0^{\tilde{A}} \frac{\sin x}{x}\,dx - s\Big| + \underbrace{(A-\tilde{A}\pi)}_{\le 1}\cdot \underbrace{\frac{1}{\tilde{A}\pi}}_{\le 1/(A-\pi)} \\
&\le \Big|\int_0^{\tilde{A}\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx - s\Big| + \frac{1}{A-\pi}.
\end{aligned}$$

□

Aufgabe 18.5 *Zeigen Sie, dass das Integral*

$$\int_0^\infty \frac{\cos x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$$

existiert und dass $\cos x/\sqrt{x^2+1}$ *nicht absolut integrierbar über* $(0,\infty)$ *ist.*

Lsung von Aufgabe 18.5

Da (nach Aufgabenstellung) $\cos x/\sqrt{x^2+1}$ nicht absolut integrierbar ist, werden wir die Integrierbarkeit nicht mit dem Majorantenkriterium nachweisen können. Wir wenden das Cauchy Kriterium an. Es gilt für $0 < \xi < \eta$

$$\begin{aligned}\Big|\int_\xi^\eta \frac{\cos x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx\Big| &= \Big|\Big[\frac{\sin x}{\sqrt{x^2+1}}\Big]_\xi^\eta + \int_\xi^\eta \frac{x\cdot\sin x}{(x^2+1)^{3/2}}\,dx\Big| \\ &\le \frac{|\sin\eta|}{\sqrt{\eta^2+1}} + \frac{|\sin\xi|}{\sqrt{\xi^2+1}} + \int_\xi^\eta \frac{x}{(x^2+1)^{3/2}}\,dx \\ &\le \frac{1}{\sqrt{\eta^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{\xi^2+1}} + \Big[-\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\Big]_\xi^\eta = \frac{2}{\sqrt{\xi^2+1}}.\end{aligned}$$

Hieraus liest man ab, dass bei vorgegebenem $\varepsilon > 0$ mit

$$c := \begin{cases} 0, & \text{falls} \quad \varepsilon \ge 2 \\ \frac{1}{\varepsilon}\sqrt{4-\varepsilon^2}, & \text{falls} \quad \varepsilon < 2 \end{cases}$$

das Cauchy Kriterium

$$\Big|\int_\xi^\eta \frac{\cos x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx\Big| \le \varepsilon \quad \text{für alle } \xi,\eta \ge c$$

erfüllt ist.

Dass $x \mapsto \cos x/\sqrt{x^2+1}$ nicht absolut integrierbar ist, folgt so:

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \Big|\frac{\cos x}{\sqrt{x^2+1}}\Big|\,dx &= \sum_{n=0}^\infty \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\cos x|}{\sqrt{x^2+1}}\,dx \ge \sum_{n=0}^\infty \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\cos x|}{x+\pi}\,dx \\ &\ge \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{(n+2)\pi} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\cos x|\,dx = \frac{2}{\pi}\sum_{n=2}^\infty \frac{1}{n}.\end{aligned}$$

□

Aufgabe 18.6 *Es seien $f, g : [a,\infty) \to \mathbb{R}$ lokal integrierbare, positive Funktionen, und es existiere*

$$I := \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Zeigen Sie, dass im Fall $I > 0$ die Integrale

$$\int_a^\infty f(x)\,dx \quad \mathit{und} \quad \int_a^\infty g(x)\,dx$$

dasselbe Konvergenzverhalten haben und dass für $I = 0$ aus der Konvergenz des zweiten Integrals die Existenz des ersten Integrals folgt.

Lsung von Aufgabe 18.6

Es sei zunächst $I > 0$. Dann existiert zu $I/2 > 0$ ein $M_1 \geq a$ mit $f(x)/g(x) \geq I/2$ für alle $x \geq M_1$, d.h. $g(x) \leq 2 \cdot f(x)/I$.

Existiert das Integral $\int_a^\infty f(x)\,dx$, so konvergiert auch das Integral $\int_a^\infty 2 \cdot f(x)/I\,dx$, und aus dem Majorantenkriterium erhält man die Existenz von $\int_a^\infty g(x)\,dx$. Divergiert das Integral $\int_a^\infty g(x)\,dx$, so divergiert nach dem Minorantenkriterium auch $\int_a^\infty 2 \cdot f(x)/I\,dx$, und damit auch $\int_a^\infty f(x)\,dx$.

Ferner existiert zu $I > 0$ ein $M_2 \geq a$ mit $f(x)/g(x) \leq 2I$ für alle $x \geq M_2$, d.h. $f(x) \leq 2 \cdot I \cdot g(x)$. nach dem Majorantenkriterium folgt aus der Konvergenz von $\int_a^\infty g(x)\,dx$ nach dem Majorantenkriterium auch die Existenz von $\int_a^\infty f(x)\,dx$, und aus der Divergenz von $\int_a^\infty f(x)\,dx$ auch die Divergenz $\int_a^\infty g(x)\,dx$.

Im Falle $I = 0$ gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $M > 0$ mit $f(x)/g(x) < \varepsilon$ für alle $x > M$, und wie oben erhält man aus der Konvergenz des zweiten Integrals diejenige des ersten. □

Aufgabe 18.7 *Zeigen Sie, dass*

$$\int_1^\infty \frac{\ln x}{(1+x^2)^\lambda}\,dx$$

genau dann konvergiert, wenn $\lambda > 0.5$ *ist.*

Lsung von Aufgabe 18.7

Für $\lambda \leq 0.5$ existiert das Integral nach dem Minorantenkriterium nicht, denn es gilt für $x \geq e$

$$\frac{\ln x}{(1+x^2)^\lambda} \geq \frac{1}{(1+x^2)^\lambda} \geq \frac{1}{(1+x)^{2\lambda}} \geq \frac{1}{1+x},$$

und $x \mapsto 1/(1+x)$ ist nicht uneigentlich integrierbar über $[e, \infty)$.

Für $\lambda > 0.5$ wählen wir $\mu \in (1, 2\lambda)$ und hiermit $g(x) := 1/x^\mu$. Dann gilt

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{g(x)} \cdot \frac{\ln x}{(1+x^2)^\lambda} = \lim_{x\to\infty} \left(\ln x \cdot \frac{x^\mu}{(1+x^2)^\lambda}\right) \leq \lim_{x\to\infty} \left(\ln x \cdot x^{\mu-2\lambda}\right) = 0,$$

und nach Aufgabe 18.6 ist mit g auch $\ln x/(1+x^2)^\lambda$ über $[1, \infty)$ uneigentlich integrierbar. □

Aufgabe 18.8 *Nach Beispiel 19.5 folgt aus der Existenz des uneigentlichen Integrals*

$$\int_a^\infty f(x)\,dx$$

nicht, dass $f(x)$ für $x \to \infty$ gegen 0 konvergiert. Zeigen Sie, dass nicht einmal die Beschränktheit von f auf dem Intervall $[a, \infty)$ folgt.

Lsung von Aufgabe 18.8
Es sei

$$f : [0, \infty) \to \mathbb{R}, \; f(x) := \begin{cases} n & \text{falls} \quad n < x \leq n + \frac{1}{n^3}, \; n \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} .$$

Dann ist f sicher lokal integrierbar und unbeschränkt, und es existiert

$$\int_0^\infty f(x)\, dx = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2}.$$

□

Aufgabe 18.9 *a) Es sei $q \in \mathbb{Z}$ und $f : [q, \infty) \to \mathbb{R}$ positiv und monoton fallend. Zeigen Sie, dass die Folge $\{c_n\}$,*

$$c_n := \sum_{k=q}^n f(k) - \int_q^n f(x)\, dx$$

konvergiert und dass für den Grenzwert

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} c_n \leq f(q)$$

gilt.

b) Zeigen Sie, dass die Folge

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n$$

konvergiert. Der Grenzwert C heißt die **Eulersche Konstante** *oder* **Mascheronische Konstante**.

c) Zeigen Sie, dass die Folge

$$a_n := \sum_{k=0}^n \frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2}\ln(2n+1)$$

konvergiert. Drücken Sie den Grenzwert durch die Eulersche Konstante C aus.

d) Untersuchen Sie die Reihen

$$\sum_{m=2}^\infty \frac{1}{m\sqrt{\ln m}} \quad \textit{und} \quad \sum_{m=2}^\infty \frac{1}{m(\ln m)^2}$$

auf Konvergenz.

Lsung von Aufgabe 18.9

a): Für alle $x \in [k, k+1]$ gilt $0 \leq f(k) - f(x) \leq f(k) - f(k+1)$, und durch Integration von k bis $k+1$ erhält man

$$0 \leq f(k) - \int\limits_{k}^{k+1} f(x)\,dx \leq f(k) - f(k+1).$$

Summation über k von q bis $n-1$ liefert

$$0 \leq \sum_{k=q}^{n-1} f(k) - \int\limits_{q}^{n} f(x)\,dx \leq f(q) - f(n),$$

und hieraus folgt unter Beachtung von $f(n) \geq 0$

$$0 \leq \sum_{k=q}^{n} f(k) - \int\limits_{q}^{n} f(x)\,dx =: c_n \leq f(q). \tag{18.2}$$

Wegen

$$c_{n+1} - c_n = f(n) - \int\limits_{n}^{n+1} f(x)\,dx \leq 0$$

ist die Folge $\{c_n\}$ monoton fallend, und aus (18.2) erhält man die Konvergenz und die Schranken für den Grenzwert.

b): Mit $f(x) := x^{-1}$ und $q = 1$ erhält man die Behauptung sofort aus Teil a).

c): Mit $f(x) := 1/(2x+1)$ und $q = 0$ erhält man die Behauptung sofort aus Teil a).

Mit der Folge c_n aus Teil b) gilt

$$\begin{aligned}
c_{2n+1} - \frac{1}{2}c_n &= \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{k} - \ln(2n+1) - \frac{1}{2}\Big(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n\Big) \\
&= 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{2n+1} - \ln(2n+1) + \frac{1}{2}\ln n \\
&= a_n + \frac{1}{2}\ln(2n+1) - \ln(2n+1) + \frac{1}{2}\ln n \;=\; a_n + \frac{1}{2}\ln\Big(\frac{n}{2n+1}\Big).
\end{aligned}$$

Mit dem Grenzübergang $n \to \infty$ erhält man hieraus

$$\frac{1}{2}C = \lim_{n\to\infty} a_n + \frac{1}{2}\ln\frac{1}{2},$$

und daher

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{2}(C + \ln 2).$$

d): Erfüllt die Funktion f die Voraussetzungen aus Teil a), so erhält man wie dort

$$\begin{aligned}
\int\limits_q^{n+1} f(x)\,dx &= \sum_{k=q}^{n} \int\limits_k^{k+1} f(x)\,dx \leq \sum_{k=q}^{n} f(k)\ , \\
\int\limits_q^{n+1} f(x)\,dx &\geq \sum_{k=q}^{n} f(k+1) = \sum_{k=q+1}^{n+1} f(k)
\end{aligned}$$

Daher konvergiert die Reihe

$$\sum_{k=q+1}^{\infty} f(k), \quad \text{falls} \quad \int\limits_q^{\infty} f(x)\,dx$$

existiert, und sie divergiert, falls

$$\int\limits_q^{\infty} f(x)\,dx$$

divergiert.

Zusammen mit Aufgabe 18.1 folgen hieraus, dass die Reihe

$$\sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{m\sqrt{\ln m}}$$

divergiert und dass die Reihe

$$\sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{m(\ln m)^2}$$

konvergiert. $\square$

Aufgabe 18.10 *Was ist an der folgenden Rechnung falsch?*

$$\begin{aligned}
\ln 4 &= \ln 1 + \ln 4 = \ln 1 - \ln \frac{1}{4} \\
&= \lim_{b\to\infty} \ln\Big(\frac{b-3}{b}\Big) - \ln\frac{1}{4} = \lim_{b\to\infty} \Big[\ln\Big(\frac{x-3}{x}\Big)\Big]_4^b \\
&= \lim_{b\to\infty} \Big[\ln(x-3) - \ln x\Big]_4^b = \lim_{b\to\infty} \int\limits_4^b \Big(\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x}\Big)\,dx \\
&= \int\limits_4^{\infty} \Big(\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x}\Big)\,dx = \int\limits_4^{\infty} \frac{dx}{x-3} - \int\limits_4^{\infty} \frac{dx}{x} \\
&= \lim_{b\to\infty} \Big[\ln(x-3)\Big]_4^b - \lim_{b\to\infty} \Big[\ln x\Big]_4^b = \infty - \infty.
\end{aligned}$$

Lsung von Aufgabe 18.10
Die Gleichung

$$\int_4^\infty \Big(\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x}\Big)\,dx = \int_4^\infty \frac{dx}{x-3} - \int_4^\infty \frac{dx}{x}$$

gilt nicht. Man hat die Gleichung

$$\int_a^\infty (f_1(x) + f_2(x))\,dx = \int_a^\infty f_1(x)\,dx + \int_a^\infty f_2(x)\,dx \tag{18.3}$$

(wie auch die entsprechende Gleichung für Integrale über endliche Bereiche) richtig zu interpretieren. Wenn die beiden Integrale auf der rechten Seite existieren, so existiert auch das Integral auf der linken Seite, und beide Seiten sind gleich. Man kann aber nicht eine integrierbare Funktion in zwei beliebige Funktionen additiv zerlegen (auch nicht, wenn beide Summanden wie hier lokal integrierbar sind) und (18.3) verwenden. □

Aufgabe 18.11 *Es sei für $n \in \mathbb{N}_0$*

$$\ell_n(x) := e^x \cdot \frac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x}).$$

Zeigen Sie

a) dass ℓ_n ein Polynom vom Grad n ist.

b) $\frac{d^k}{dx^k}(x^n e^{-x})\Big|_{x=0} = 0$ und $\lim_{a\to\infty} \frac{d^k}{dx^k}(x^n e^{-x})\Big|_{x=a} = 0$ für $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

c) $\int_0^\infty e^{-x}\ell_n(x)\ell_m(x)\,dx = 0$ für alle $n \neq m$.

Anmerkung: Teil c) besagt, dass die Funktionen ℓ_n, $n \in \mathbb{N}_0$, ein System orthogonaler Polynome auf $[0,\infty)$ bzgl. der Gewichtsfunktion $w(x) := e^{-x}$ bilden. Die ℓ_n heißen **Laguerre Polynome**.

Lsung von Aufgabe 18.11
a): Ist q ein Polynom vom Grad n, so ist

$$\frac{d}{dx}(e^{-x}q(x))e^{-x}(q'(x) - q(x)) =: e^{-x}Q(x)$$

mit einem Polynom Q vom Grad n. Hiermit ist klar, dass

$$\frac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x}) =: e^{-x}\tilde{q}(x)$$

mit einem Polynom $\tilde{q}$ vom Grad n ist, und daher ist $\ell_n(x)$ ein Polynom vom Grad n.

b): Nach Teil a) ist
$$\frac{d^k}{dx^k}(x^n e^{-x}) = e^{-x} q(x)$$
mit einem Polynom q vom Grad n, und daher folgt
$$\lim_{a\to\infty} \frac{d^k}{dx^k}(x^n e^{-x})\Big|_{x=a} = 0$$
sogar für alle $k \in \mathbb{N}_0$.

Um auch die linke Randbedingung zu erhalten, zeigen wir genauer, dass sogar für $k = 0, \ldots, n$
$$\frac{d^k}{dx^k}(x^n e^{-x}) = x^{n-k} e^{-x} q_k(x)$$
mit einem Polynom q_k vom Grad k gilt. Für $k = 0$ ist diese Aussage offensichtlich richtig, und wenn sie für ein $k < n$, so folgt
$$\begin{aligned}\frac{d^{k+1}}{dx^{k+1}}(x^n e^{-x}) &= \frac{d}{dx}(x^{n-k} e^{-x} q_k(x)) \\ &= (n-k)x^{n-k-1} q_k(x) e^{-x} + x^{n-k} q_k'(x) e^{-x} - x^{n-k} q_(x) e^{-x} \\ &= x^{n-k-1}\Big((n-k)q_k(x) + x q_k'(x) - x q_k(x)\Big) e^{-x} \;=:\; x^{n-k-1} q_{k+1}(x) e^{-x}.\end{aligned}$$

c): Es sei $m < n$. Es gilt
$$\int_0^\infty e^{-x} \ell_m(x) \ell_n(x)\, dx = \int_0^\infty \ell_m(x) \cdot \frac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x})\, dx.$$
Durch partielle Integration erhält man
$$\begin{aligned}&\int_0^\infty e^{-x} \ell_m(x) \ell_n(x)\, dx \\ &\quad = \lim_{a\to\infty} \left[\ell_m(x) \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(x^n e^{-x})\right|_0^a - \int_0^\infty \ell_m'(x) \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(x^n e^{-x})\, dx,\end{aligned}$$
und wegen der Überlegungen in Teil b) folgt
$$\int_0^\infty e^{-x} \ell_m(x) \ell_n(x)\, dx = -\int_0^\infty \ell_m'(x) \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(x^n e^{-x})\, dx.$$
Durch weitere $m-1$ partielle Integrationen erhält man
$$\int_0^\infty e^{-x} \ell_m(x) \ell_n(x)\, dx = (-1)^m \int_0^\infty \frac{d^m}{dx^m} \ell_m(x) \frac{d^{n-m}}{dx^{n-m}}(x^n e^{-x})\, dx,$$

und im nächsten Schritt

$$\begin{aligned}
&\int\limits_0^\infty e^{-x}\ell_m(x)\ell_n(x)\,dx \\
&= (-1)^m \lim_{a\to\infty} \Big[\frac{d^m}{dx^m}\ell_m(x)\frac{d^{n-m-1}}{dx^{n-m-1}}(x^n e^{-x})\Big|_0^a \\
&\quad -(-1)^m \int\limits_0^\infty \frac{d^m}{dx^m}\ell_m(x)\frac{d^{n-m-1}}{dx^{n-m-1}}(x^n e^{-x})\,dx = 0,
\end{aligned}$$

denn wegen $n-m-1\ge 0$ konvergiert der Randterm gegen 0 und, da ℓ_m ein Polynom vom Grad m ist, ist $\ell_m^{(m+1)}\equiv 0$. □

18.2 Unbeschränkte Integranden

Aufgabe 18.12 *Formulieren Sie für das uneigentliche Integral einer unbeschränkten Funktion das Cauchy Kriterium, das Monotonie-, Majoranten- und das Minorantenkriterium, und beweisen Sie das Cauchy Kriterium.*

Lsung von Aufgabe 18.12
Das **Cauchy Kriterium** lautet:
Es sei $f\,:\,[a,b)\to\mathbb{R}$ lokal integrierbar. Das uneigentliche Integral

$$\lim_{\beta\to b-0}\int\limits_a^\beta f(x)\,dx$$

konvergiert genau dann, wenn für alle $\varepsilon>0$ ein $c\in[a,b)$ existiert, so dass gilt

$$\Big|\int\limits_\xi^\eta f(x)\,dx\Big| < \varepsilon \quad \text{für alle } \xi,\eta\in(c,b). \tag{18.4}$$

Wir beweisen das Cauchy Kriterium: Es gelte (18.4), und es sei

$$F(\beta) := \int\limits_a^\beta f(x)\,dx.$$

Dann ist $\{F(\beta_n)\}$ für jede Folge $\{\beta_n\}\subset[a,b)$ mit $\lim_{n\to\infty}\beta_n=b$ eine Cauchy Folge, also konvergent.

Der Grenzwert ist unabhängig von der gewählten Folge $\{\beta_n\}$, denn sind $\{\beta_n'\}$ und $\{\beta_n''\}$ zwei Folgen in $[a,b)]$, die gegen b konvergieren und für die $\lim_{n\to\infty}F(\beta_n')\neq\lim_{n\to\infty}F(\beta_n'')$ gilt, so ist $\{\tilde\beta_n\}$ mit $\tilde\beta_{2n}:=\beta_n'$ und $\tilde\beta_{2n+1}:=\beta_n''$ eine Folge in $[a,b)$, die gegen b konvergiert und für die $\{F(\tilde{\beta}_n)\}$ nicht konvergiert. Damit ist f uneigentlich integrierbar über $[a,b)$.

Existiert umgekehrt

$$\lim_{\beta\to b}\int_a^\beta f(x)\,dx =: I,$$

so gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $c \in [a,b)$ mit $|F(\beta) - I| < 0.5\varepsilon$ für alle $\beta \in (c,b)$, und daher gilt für alle $\xi, \eta \in (c,b)$

$$\Big|\int_\xi^\eta f(x)\,dx\Big| = |F(\eta) - F(\xi)| \le |F(\eta) - I| + |F(\xi) - I| < \varepsilon.$$

Wir formulieren nun die drei weiteren Kriterien:

Monotoniekriterium: Es sei $f : [a,b) \to \mathbb{R}$ lokal integrierbar und nicht negativ. Das uneigentliche Integral $\int_a^b f(x)\,dx$ existiert genau dann, wenn die Funktion

$$F(\beta) := \int_a^\beta f(x)\,dx$$

auf dem Intervall $[a,b)$ beschränkt ist.

Majorantenkriterium: Sind $f, g : [a,b) \to \mathbb{R}$ lokal integrierbar, konvergiert das uneigentliche Integral $\int_a^b g(x)\,dx$ und gilt $|f(x)| \le g(x)$ für alle $x \in [a,b)$, so existiert das uneigentliche Integral $\int_a^b f(x)\,dx$.

Minorantenkriterium: Ist $g : [a,b) \to \mathbb{R}$ lokal integrierbar, divergiert das uneigentliche Integral $\int_a^b g(x)\,dx$ und gilt $0 \le g(x) \le f(x)$ für alle $x \in [a,b)$, so ist f nicht uneigentlich integrierbar über $[a,b)$. $\square$

Aufgabe 18.13 *Überprüfen Sie, ob die folgenden uneigentlichen Integrale existieren:*

a)	$\int_0^1 \frac{1}{1-x^4}\,dx,$	b)	$\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{\sin x}\,dx,$
c)	$\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{\sin(x^2)}\,dx,$	d)	$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx,$
e)	$\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{x^2+8x+15},$	f)	$\int_0^\infty \frac{1}{\lvert x^2-3x+2\rvert^{2/3}}\,dx.$

Lsung von Aufgabe 18.13

a): Es gilt $1 - x^4 = (1-x)(1+x)(1+x^2) \le 4(1-x)$ für alle $x \in [0,1]$, d.h.

$$\frac{1}{1-x^4} \ge \frac{1}{4(1-x)} \quad \text{für alle } x \in [0,1),$$

und da $1/(1-x)$ nicht uneigentlich integrierbar über $[0,1)$ ist, divergiert nach dem Minorantenkriterium das angegebene Integral.

b): Da die Funktion $x \mapsto \sin x$ in $[0,1]$ konkav ist, gilt

$$\sin x \geq (1-x)\sin 0 + x \cdot \sin 1 = x \cdot \sin 1,$$

und man erhält für den Integranden die Abschätzung

$$0 \leq \frac{\sqrt{x}}{\sin x} \leq \frac{\sqrt{x}}{x \cdot \sin 1} = \frac{1}{\sin 1} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} \ .$$

Da

$$\int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$$

existiert, konvergiert nach dem Majorantenkriterium auch

$$\int\limits_0^1 \frac{\sqrt{x}}{\sin x}\,dx \ .$$

c): Es ist $\phi(x) := \sin(x^2) - x^2$ wegen

$$\phi'(x) = 2x\cos\left(x^2\right) - 2x = 2x\left(\cos\left(x^2\right) - 1\right) \leq 0$$

monoton fallend, und aus $\phi(0) = 0$ folgt

$$\phi(x) \leq 0 \ , \quad \text{d.h. } \sin x^2 \leq x^2 \text{ für alle } x \in [0,1] \ .$$

Daher gilt

$$\frac{\sqrt{x}}{\sin(x^2)} \geq \frac{\sqrt{x}}{x^2} = x^{-3/2} \quad \text{für alle } x \in [0,1] \ ,$$

und da das uneigentliche Integral $\int\limits_0^1 x^{-3/2}\,dx$ nicht existiert, divergiert nach dem Minorantenkriterium auch

$$\int\limits_0^1 \frac{\sqrt{x}}{\sin(x^2)}\,dx \ .$$

d): Der Integrand ist an beiden Enden des Integrationsintervalls unbeschränkt. Das uneigentliche Integral existiert also, wenn für ein $c \in (-1,1)$ die uneigentlichen Integrale

$$\int\limits_{-1}^{c} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \quad \text{und} \quad \int\limits_{c}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

existieren. Wir wählen $c = 0$. Dann gilt

$$\lim_{a\to -1}\int\limits_a^0 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \lim_{a\to -1}\left[\arcsin x\right]_a^0 = \frac{\pi}{2}$$

und

$$\lim_{b\to 1}\int\limits_0^b \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \lim_{b\to 1}\,[\,\arcsin x]_0^b = \frac{\pi}{2}.$$

Also existiert das Integral, und es gilt

$$\int\limits_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \pi.$$

e): Auf den ersten Blick scheint das Integral zu existieren, da der Integrand für große $|x|$ durch x^{-2} majorisiert wird und $x \mapsto x^{-2}$ sowohl über $(-\infty,-c)$ als auch über (c,∞) für $c \neq 0$ integrierbar ist.

$x \mapsto 1/(x^2+8x+15)$ ist jedoch in Umgebungen von $x=3$ und $x=5$ unbeschränkt. Das uneigentliche Integral existiert also genau dann, wenn für $c \in (-\infty,3)$, $d \in (3,5)$ und $e \in (5,\infty)$ die uneigentlichen Integrale

$$\int\limits_{-\infty}^{c} \frac{dx}{x^2+8x+15}\,,\ \int\limits_{c}^{3} \frac{dx}{x^2+8x+15}\,,\ \int\limits_{3}^{d} \frac{dx}{x^2+8x+15}\,,\ \int\limits_{d}^{5} \frac{dx}{x^2+8x+15}\,,$$

$$\int\limits_{5}^{e} \frac{dx}{x^2+8x+15} \quad \text{und} \int\limits_{e}^{\infty} \frac{dx}{x^2+8x+15}$$

konvergieren. Es gilt jedoch

$$\frac{1}{x^2+8x+15} = \frac{1}{2(x-5)} - \frac{1}{2(x-3)},$$

und daher

$$\begin{aligned}\int\limits_{c}^{3} \frac{dx}{x^2+8x+15} &= \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{c}^{3}\Big(\frac{1}{2(x-5)} - \frac{1}{2(x-3)}\Big)\,dx \\ &= \frac{1}{2}\lim_{\varepsilon\to 0}\Big(\ln(5-c) - \ln(2+\varepsilon) - \ln\varepsilon + \ln(3-c)\Big).\end{aligned}$$

Da dieser Grenzwert nicht existiert, konvergiert das uneigentliche Integral

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+8x+15}$$

nicht.

f): Der Nenner hat die Nullstellen $x_1 = 1$ und $x_2 = 2$, die nicht zugleich Nullstellen des Zählers sind. Das uneigentliche Integral konvergiert also, wenn die Integrale

$$\int\limits_{0}^{1} \frac{1}{|x^2-3x+2|^{2/3}}\,dx\,,\quad \int\limits_{1}^{1.5} \frac{1}{|x^2-3x+2|^{2/3}}\,dx\,,\quad \int\limits_{1.5}^{2} \frac{1}{|x^2-3x+2|^{2/3}}\,dx,$$

$$\int_2^3 \frac{1}{|x^2-3x+2|^{2/3}}\,dx \quad \text{und} \quad \int_3^\infty \frac{1}{|x^2-3x+2|^{2/3}}\,dx$$

existieren, wobei die Grenze 1.5 im zweiten und dritten Integral durch jede andere Zahl aus dem Intervall $(1,2)$ ersetzt werden kann und die Grenze 3 in den letzten beiden Integralen durch jede andere Zahl > 2.

In einer Umgebung von $x_1 = 1$ gilt

$$\frac{1}{|x^2-3x+2|^{2/3}} = \frac{1}{|x-2|^{2/3}} \cdot \frac{1}{|x-1|^{2/3}} \leq C \cdot \frac{1}{|x-1|^{2/3}}$$

mit einer geeigenten Konstante C, und nach dem Majorantenkriterium konvergieren die ersten beiden Integrale.

In einer Umgebung von $x_2 = 2$ gilt

$$\frac{1}{|x^2-3x+2|^{2/3}} = \frac{1}{|x-1|^{2/3}} \cdot \frac{1}{|x-2|^{2/3}} \leq C \cdot \frac{1}{|x-2|^{2/3}}$$

mit einer geeigenten Konstante C, und nach dem Majorantenkriterium konvergieren das dritte und vierte Integral.

Schließlich gilt für $x \geq 3$

$$\frac{1}{|x^2-3x+2|^{2/3}} \leq \frac{1}{|x-2|^{4/3}}$$

und das Majorantenkriterium liefert auch die Existenz des letzten Integrals. □

Aufgabe 18.14 *Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ konvergiert das uneigentliche Integral*

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{x^\alpha}\,dx \;?$$

Lsung von Aufgabe 18.14

Für alle $\alpha \geq 1$ gilt wegen der Monotonie der Logarithmusfunktion

$$\frac{-\ln x}{x^\alpha} \geq \frac{-\ln(0.5)}{x^\alpha} > 0 \quad \text{für alle } x \in (0, 0.5].$$

Da die Funktion $x \mapsto x^{-\alpha}$ über das Intervall $(0, 0.5]$ nicht uneigentlich integrierbar ist, divergiert nach dem Minorantenkriterium auch

$$-\int_0^{0.5} \frac{-\ln x}{x^\alpha}\,dx$$

und damit auch das gegebene Integral.

Für $\alpha < 1$ wählen wir $\beta \in (\alpha, 1)$. Dann existiert

$$\lim_{x \to 0} x^{\beta} \cdot \frac{\ln x}{x^{\alpha}} = \lim_{x \to 0} x^{\beta - \alpha} \cdot \ln x = 0.$$

Aus der Stetigkeit der Abbildung $x \mapsto x^{\beta-\alpha} \cdot \ln x$ im Intervall $(0, 1]$, folgt daher die Beschränktheit dieser Abbildung. Es gibt also ein $C > 0$ mit

$$|x^{\beta-\alpha} \cdot \ln x| \leq C \quad \text{für alle } x \in (0, 1],$$

d.h.

$$|x^{-\alpha} \cdot \ln x| \leq C \cdot x^{-\beta} \quad \text{für alle } x \in (0, 1].$$

Da das uneigenliche Integral $\int_0^1 x^{-\beta}\, dx$ existiert, konvergiert nach dem Majorantenkriterium das gegebene Integral. Es existiert also genau für $\alpha < 1$. □

Aufgabe 18.15 *Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ konvergiert das uneigentliche Integral*

$$\int_0^{\pi} \frac{\ln \sin x}{x^{\alpha}}\, dx \ ?$$

Lsung von Aufgabe 18.15
Für $\alpha \geq 1$ gilt

$$\left|\frac{\ln \sin x}{x^{\alpha}}\right| \geq \frac{-\ln \sin 0.5}{x^{\alpha}} \quad \text{für alle } x \in (0, 0.5],$$

und nach dem Minorantenkriterium konvergiert das Integral

$$\int_0^{0.5} \frac{\ln \sin x}{x^{\alpha}}\, dx \quad \text{und damit auch} \quad \int_0^{\pi} \frac{\ln \sin x}{x^{\alpha}}\, dx$$

nicht.

Es sei $\alpha < 1$. Da die Sinusfunktion konkav in $[0, \pi]$ ist, gilt

$$\sin x \geq x \cdot \sin 1 \quad \text{für alle } x \in [0, 1],$$

und es folgt

$$\left|\frac{\ln \sin x}{x^{\alpha}}\right| = \frac{-\ln \sin x}{x^{\alpha}} \geq \frac{-\ln(x \cdot \sin 1)}{x^{\alpha}} \quad \text{für alle } x \in (0, 1].$$

Wie in Aufgabe 18.14 konvergiert

$$\int_0^1 \frac{-\ln(x \cdot \sin 1)}{x^{\alpha}}\, dx,$$

und nach dem Majorantenkriterium existiert dann auch

$$\int_0^1 \frac{\ln \sin x}{x^\alpha}\, dx.$$

Mit der Variablentransformation $x = \pi - t$ gilt wegen $\sin x = \sin(\pi - x)$

$$\int_1^\pi \frac{\ln \sin x}{x^\alpha}\, dx = \int_0^{\pi-1} \frac{\ln \sin t}{(\pi - t)^\alpha}\, dt.$$

Wie eben konvergiert dieses Integral, und daher existiert für $\alpha < 1$ das uneigentliche Integral

$$\int_0^\pi \frac{\ln \sin x}{x^\alpha}\, dx.$$

$\square$

Aufgabe 18.16 *a) Zeigen Sie, dass durch*

$$\langle f, g\rangle := \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} f(x)g(x)\, dx \tag{18.5}$$

auf dem Raum $C[-1,1]$ der auf $[-1,1]$ stetigen Funktionen ein Skalarprodukt erklärt ist.

b) Zeigen Sie, dass die Tschebyscheff Polynome

$$t_n(x) := \cos(n \cdot \arccos x),\ \ n \in \mathbb{N}_0,$$

ein System orthogonaler Polynome auf $C[-1,1]$ bzgl. des in Teil a) erklärten inneren Produktes bilden.

c) Charakterisieren Sie die beste Approximation der Funktion $f(x) := x^{n+1}$ in $C[-1,1]$ bzgl. der Norm

$$\|f\| := \int_{-1}^1 \frac{f^2(x)}{\sqrt{1-x^2}}\, dx.$$

d) Berechnen Sie die beste Approximation von x^5 in Π_4 bzgl. der in c) betrachteten Norm.

Lsung von Aufgabe 18.16

a): Zunächst existiert wegen

$$\int_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{a\to -1} \Big[\arcsin x\Big]_a^0 = \frac{\pi}{2}$$

und

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{b\to 1} \Big[\arcsin x \Big]_0^b = \frac{\pi}{2}$$

das uneigentliche Integral

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx.$$

Mit $f, g \in C[-1,1]$ ist auch $f \cdot g$ stetig in $[-1,1]$, und daher gibt es eine Konstante M mit

$$|f(x)g(x)| \le M \quad \text{für alle } x \in [-1,1].$$

Es gilt also

$$\Big|\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} f(x)g(x)\Big| \le \frac{M}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{für alle } x \in [-1,1],$$

und daher ist die rechte Seite von (18.5) für alle stetigen Funktionen f und g definiert.

Dass $\langle \cdot, \cdot \rangle$ die Axiome des inneren Produktes erfüllt, ist leicht nachzurechnen und soll hier nicht ausgeführt werden.

b): Wir betrachten die Variablentransformation $u := \arccos x$. Wegen

$$\frac{du}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

erhält man

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} t_n(x) t_m(x)\, dx = -\int_\pi^0 \cos(nu)\cos(mu)\, du,$$

und wegen der Geradheit des Integranden

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} t_n(x) t_m(x)\, dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nu)\cos(mu)\, du.$$

Da die Funktionen $\cos(kx)$ ein Orthogonalsystem im Raum $C[-\pi,\pi]$ bzgl. des üblichen inneren Produktes bilden, folgt damit

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} t_n(x) t_m(x)\, dx = 0 \quad \text{für } n \ne m.$$

c): Da t_{n+1} ein Polynom vom Grad $n+1$ ist, dessen führender Koeffizient 2^n ist (beachten Sie die Rekursionsformel

$$t_{n+1}(x) = 2x t_n(x) - t_{n-1}(x),\ t_0(x) \equiv 1,\ t_1(x) = x)$$

kann man die Funktion $f(x) := x^{n+1}$ schreiben als

$$f(x) = \sum_{j=0}^{n+1} \alpha_j t_j(x),\ \ \alpha_j \in \mathbb{R},\ \ \alpha_{n+1} = 2^{-n}.$$

Ist

$$\tilde{t}(x) := \sum_{j=0}^{n} \in \Pi_n$$

so gilt

$$\begin{aligned}
\Big\| f(x) - \sum_{j=0}^{n} \beta_j t_j(x) \Big\| &= \Big\| \alpha_{n+1} t_{n+1}(x) + \sum_{j=0}^{n} (\alpha_j - \beta_j) t_j(x) \Big\| \\
&= \langle \alpha_{n+1} t_{n+1}(x) + \sum_{j=0}^{n} (\alpha_j - \beta_j) t_j(x), \alpha_{n+1} t_{n+1}(x) + \sum_{j=0}^{n} (\alpha_j - \beta_j) t_j(x) \rangle.
\end{aligned}$$

Aus der Orthogonalität der t_j folgt

$$\Big\| f(x) - \sum_{j=0}^{n} \beta_j t_j(x) \Big\| = \alpha_{n+1}^2 \| t_{n+1} \| + \sum_{j=0}^{n} (\alpha_j - \beta_j)^2 \| t_j \|,$$

und hieraus liest man unmittelbar ab, dass die Norm genau dann minimal wird, wenn $\beta_j = \alpha_j$ für alle $j = 0, \ldots, n$ gilt. Damit ist die die beste Approximation von f in Π_n

$$\sum_{j=0}^{n} \beta_j t_j(x) = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j t_j(x) = x^{n+1} - 2^{-n} t_{n+1}(x).$$

d): Aus der Rekursionsformel der Tschebyscheff Polynome erhält man

$$\begin{aligned}
t_0(x) &\equiv 0 \\
t_1(x) &= x \\
t_2(x) &= 2x^2 - 1 \\
t_3(x) &= 4x^3 - 3x \\
t_4(x) &= 8x^4 - 8x^2 - 1 \\
t_5(x) &= 16x^5 - 20x^3 + 5x.
\end{aligned}$$

Nach Teil c) ist daher die beste Approximierende von $f(x) := x^5$ in Π_4

$$x^5 - 2^{-4} t_5(x) = x^5 - \Big(x^5 - \frac{5}{4} x^3 + \frac{5}{16} x \Big) = \frac{5}{16} (4x^3 - 1) =: g(x).$$

Abbildung 18.1 enthält die Graphen von f und der besten Approximierenden g. □

Aufgabe 18.17 *Berechnen Sie die Cauchyschen Hauptwerte*

$$\text{a)} \quad \oint_{-1}^{7} \frac{dx}{(x-5)^3}, \qquad \text{b)} \quad \oint_{-2}^{2} \frac{dx}{(x+1)^2},$$

falls diese existieren.

Abbildung 18.1: Zu Aufgabe 18.16

Lsung von Aufgabe 18.17

a): Die einzige Unstetigkeitsstelle des Integranden im Integrationsintervall ist $x_0 = 5$. Daher gilt

$$\begin{aligned}
\oint_{-1}^{7} \frac{dx}{(x-5)^3} &= \lim_{\varepsilon\to 0}\Big(\int_{-1} 5-\varepsilon \frac{dx}{(x-5)^3} + \int_{5-\varepsilon} 7 \frac{dx}{(x-5)^3}\Big) \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\Big(\Big[-\frac{2}{(x-5)^2}\Big]_{-1}^{5-\varepsilon} + \Big[-\frac{2}{(x-5)^2}\Big]_{5+\varepsilon}^{7}\Big) \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\Big(-\frac{2}{(-\varepsilon)^2} + \frac{2}{(-6)^2} - \frac{2}{2^2} + \frac{2}{\varepsilon^2}\Big) = \frac{1}{18} - \frac{1}{2} = -\frac{4}{9}.
\end{aligned}$$

b): Die einzige Unstetigkeitsstelle des Integranden ist $x_0 = -1$. Der Cauchysche Hauptwert (wenn er existiert) ist daher

$$\begin{aligned}
\oint_{-2}^{2} \frac{dx}{(x+1)^2} &= \lim_{\varepsilon\to 0}\Big(\int_{-2}^{-1-\varepsilon} \frac{dx}{(x+1)^2} + \int_{-1+\varepsilon}^{2} \frac{dx}{(x+1)^2}\Big) \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\Big(\Big[-\frac{1}{x+1}\Big]_{-2}^{-1-\varepsilon} + \Big[-\frac{1}{x+1}\Big]_{-1+\varepsilon}^{2}\Big) \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\Big(\frac{1}{\varepsilon} - 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{\varepsilon}\Big).
\end{aligned}$$

Da dieser Grenzwert nicht existiert, existiert der Cauchysche Hauptwert nicht. □

Aufgabe 18.18 *Überprüfen Sie, ob die folgenden uneigentlichen Integral existierten:*

a) $\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x+x^2+x^3}}\, dx,$ b) $\int_0^\infty \frac{\cos x}{\sqrt{x}}\, dx,$

c) $\int_0^\infty \frac{\cos ax - \cos bx}{x}\, dx, \quad a, b > 0.$

Lsung von Aufgabe 18.18

Die Integrale der Teile a) und b) sind in doppelter Hinsicht uneigentlich: Der Integrand ist in einer Umgebung von $x = 0$ unbeschränkt und das Integrationsintervall ist unbeschränkt.

Wir untersuchen daher die Integrale

$$\int_0^1 f(x)\,dx \quad \text{und} \quad \int_1^\infty f(x)\,dx$$

getrennt.

a): Es ist

$$\frac{1}{\sqrt{x+x^2+x^3}} \le \frac{1}{\sqrt{x}} \quad \text{für alle } x \in (0,1],$$

und da $\int_0^1 x^{-1/2}\,dx$ existiert, konvergiert nach dem Majorantenkriterium auch

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x+x^2+x^3}}\,dx.$$

Da

$$\frac{1}{\sqrt{x+x^2+x^3}} \le \frac{1}{\sqrt{x^3}} \quad \text{für alle } x \in [1,\infty)$$

und da $1/x^{3/2}$ uneigentlich über $[1,\infty)$ integrierbar ist, existiert nach dem Majorantenkriterium auch

$$\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x+x^2+x^3}}\,dx.$$

b): Wegen

$$\left|\frac{\cos x}{\sqrt{x}}\right| \le \frac{1}{\sqrt{x}} \quad \text{und} \quad \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2$$

existiert das erste Integral nach dem Majorantenkriterium.

Das zweite existiert nach dem Cauchy Kriterium, denn für $\xi, \eta \in [1,\infty)$, $\xi < \eta$, gilt

$$\begin{aligned}
\left|\int_\xi^\eta \frac{\cos x}{\sqrt{x}}\,dx\right| &= \left|\left[\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\right]_\xi^\eta + \frac{1}{2}\int_\xi^\eta x^{-3/2}\sin x\,dx\right| \\
&\le \frac{|\sin\eta|}{\sqrt{\eta}} + \frac{|\sin\xi|}{\sqrt{\xi}} + \frac{1}{2}\int_\xi^\eta x^{-3/2}|\sin x|\,dx \\
&\le \frac{1}{\sqrt{\eta}} + \frac{1}{\sqrt{\xi}} + \frac{1}{2}\int_\xi^\eta x^{-3/2}\,dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{\eta}} + \frac{1}{\sqrt{\xi}} + \frac{1}{2}\left[-2x^{-1/2}\right]_\xi^\eta = \frac{2}{\sqrt{\xi}},
\end{aligned}$$

und daher gilt bei gegebenem $\varepsilon > 0$

$$\left| \int_{\xi}^{\eta} \frac{\cos x}{\sqrt{x}} \, dx \right| < \varepsilon,$$

falls $\xi > 4/\varepsilon^2 =: C$.

c): Mit der Regel von de l'Hospital sieht man, dass der Integrand in $x = 0$ durch 0 stetig fortgesetzt werden kann. Wir müssen also in diesem Beispiel das Integrationsintervall nicht aufteilen.

Ähnlich wie in Beispiel 19.4 (oder in Teil b)) sieht man leicht mit dem dem Cauchy Kriterium, dass die Integrale

$$\int_{1}^{\infty} \frac{\cos ax}{x} \, dx \quad \text{und} \quad \int_{1}^{\infty} \frac{\cos bx}{x} \, dx$$

existieren, und daher konvergiert auch das Integral

$$\int_{0}^{\infty} \frac{\cos ax - \cos bx}{x} \, dx$$

für alle $a, b > 0$. □

Kapitel 19

Numerische Integration

19.1 Einführende Beispiele

Aufgabe 19.1 *Bestimmen Sie*

$$\int_0^1 e^x \, dx \quad \text{und} \quad \int_0^1 \sqrt{x} \, dx$$

mit der zusammengesetzten Trapezregel, Simpsonformel und Mittelpunktregel mit den Schrittweiten

$$h = \frac{1}{2}, \ \frac{1}{4}, \ \frac{1}{8}, \ \frac{1}{16},$$

und geben Sie die Fehler an.

Aufgabe 19.2 *a) Es sei $f \in C^1[a,b]$ und f' monoton wachsend auf $[a,b]$. Zeigen Sie, dass zu jeder Zerlegung*

$$Z \,:\, a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$$

von $[a,b]$ die mit der Trapezregel gewonnene Approximation

$$T_Z(f) := \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\Big(f(x_j) + f(x_{j-1})\Big)(x_j - x_{j-1})$$

und die mit der Mittelpunktregel gewonnene Näherung

$$R_Z(f) := \sum_{j=1}^{n} f(0.5(x_j + x_{j-1}))(x_j - x_{j-1})$$

für

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx$$

den Wert des Integrals einschließen.

b) Bestimmen Sie mit Hilfe der Aussage aus Teil a) eine obere und eine untere Schranke für

$$\int\limits_1^2 e^{-x^2}\,dx$$

und hiermit eine Näherung für das Integral mit einem relativen Fehler von höchstens 10^{-2}.

Hinweis: *In Teil a) nutze man aus, dass*

$$\int\limits_{x_0}^{x_1} f(0.5(x_0+x_1))\,dx = \int\limits_{x_0}^{x_1}\Big(f(0.5(x_0+x_1)) + f'(0.5(x_1+x_0))(x - 0.5(x_0+x_1))\Big)\,dx$$

gilt.

Lsung von Aufgabe 19.2

a): Wir zeigen, dass für je zwei Punkte $x_0, x_1 \in [a,b]$ mit $x_0 < x_1$ für die Sekante $s(x)$ durch $(x_0, f(x_0))$ und $(x_1, f(x_1))$ gilt

$$s(x) \geq f(x) \quad \text{für alle } x \in [x_0, x_1].$$

Es ist klar, dass hieraus für die Trapezregel

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx \leq T_Z(f)$$

folgt.

Für $x \in (x_0, x_1)$ gilt nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung mit $\xi_0 \in (x_0, x)$ und $\xi_1 \in (x, x_1)$

$$\begin{aligned} f(x) - s(x) &= f(x) - \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} f(x_1) - \frac{x_1 - x}{x_1 - x_0} f(x_0) \\ &= \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} (f(x) - f(x_1)) + \frac{x_1 - x}{x_1 - x_0} (f(x) - f(x_0)) \\ &= \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} f'(\xi_1)(x - x_1) + \frac{x_1 - x}{x_1 - x_0} f'(\xi_0)(x - x_0) \\ &= \frac{(x - x_0)(x_1 - x)}{x_1 - x_0} (f'(\xi_1) - f'(\xi_0)) \ , \end{aligned}$$

und wegen der Monotonie von f' folgt

$$f(x) \le s(x) \ .$$

Um zu zeigen, dass die Mittelpunktregel eine untere Schranke des Integrals liefert, beweisen wir, dass für alle $x_0, x_1 \in [a, b]$, $x_0 < x_1$, gilt

$$(x_1 - x_0) f(0.5(x_1 + x_0)) = \int_{x_0}^{x_1} f(0.5(x_0 + x_1))\, dx \le \int_{x_0}^{x_1} f(x)\, dx \ .$$

Wegen

$$\int_{x_0}^{x_1} \Big(x - \frac{x_0 + x_1}{2}\Big)\, dx = 0$$

gilt

$$\int_{x_0}^{x_1} f(0.5(x_1 + x_0))\, dx = \int_{x_0}^{x_1} \Big(f(0.5(x_1 + x_0)) + f'(0.5(x_1 + x_0))(x - \frac{x_0 + x_1}{2})\Big)\, dx \ ,$$

und wir haben

$$f(x) \ge f(0.5(x_1 + x_0)) + f'(0.5(x_1 + x_0))\Big(x - \frac{x_1 + x_0}{2}\Big) \quad \text{für alle } x \in [x_0, x_1]$$

zu zeigen. Nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung gilt mit einem ξ, das zwischen $0.5(x_1 + x_0)$ und x liegt,

$$\begin{aligned} & f(x) - f(0.5(x_1 + x_0)) - f'(0.5(x_1 + x_0))(x - \frac{x_1 + x_0}{2}) \\ = \ & (f'(\xi) - f'(0.5(x_1 + x_0)))(x - \frac{x_1 + x_0}{2}) \ge 0 \ , \end{aligned}$$

denn für $x \in (x_0, 0.5(x_1 + x_0))$ sind beide Klammern negativ und für $x \in (0.5(x_1 + x_0), x_1)$ sind beide Klammern positiv.

b): Für $f(x) := e^{-x^2}$ gilt $f''(x) = (4x^2 - 2)e^{-x^2} \geq 0$ für alle $x \in [1, 2]$, und daher liefert die Mittelpunktregel eine untere Schranke $Q_R(f)$ und die Trapezregel eine obere Schranke $Q_T(f)$ für das Integral.

Wählt man als Näherung für das Integral den Mittelwert $S := 0.5(Q_R(f) + Q_T(f))$, so gilt für den relativen Fehler

$$\frac{\left|S - \int\limits_1^2 f(x)\,dx\right|}{\int\limits_1^2 f(x)\,dx} \leq \frac{0.5(Q_T(f) - Q_R(f))}{Q_R(f)} \ .$$

Wir haben also die Zerlegung von $[1, 2]$ so fein zu wählen ,dass

$$\frac{Q_T(f) - Q_R(f)}{2Q_R(f)} \leq 10^{-2}$$

gilt.

Für die äquidistanten Zerlegungen

$$1 =: x_0 < \ldots < x_j := 1 + \frac{j}{n} < \ldots < x_n := 2$$

erhält man die Werte der folgenden Tabelle

n	Q_R	Q_T	$0.5(Q_R + Q_T)$	$0.5(Q_T - Q_R)$	$(Q_T - Q_R)/(2Q_R)$
1	0.1054	0.1931	0.1492	0.0438	0.4160
2	0.1282	0.1492	0.1387	0.0105	0.0821
3	0.1322	0.1414	0.1368	0.0046	0.0351
4	0.1335	0.1387	0.1361	0.0026	0.0195
5	0.1341	0.1375	0.1358	0.0017	0.0124
6	0.1345	0.1368	0.1356	0.0012	0.0086
10	0.1350	0.1358	0.1354	0.0004	0.0031
20	0.1352	0.1354	0.1353	0.0001	0.0008

□

19.2 Konstruktion von Quadraturformeln

Aufgabe 19.3 *a) Bestimmen Sie die Gewichte w_{-1}, w_0, w_1 so, dass die Quadraturformel*

$$Q(f) = w_{-1}f'(-1) + w_0 f(0) + w_1 f'(1)$$

zur approximativen Bestimmung von

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$$

möglichst hohe Ordnung besitzt.

b) Was ändert sich, wenn -1 und 1 innere Knoten sind und $Q(f)$ zur approximativen Berechnung von

$$\int_{-2}^{3} f(x)\,dx$$

konstruiert wird?

Lsung von Aufgabe 19.3

a): Es gilt

$$\begin{array}{rclcrcl} Q(1) & = & w_0 & = & \int_{-1}^{1} 1\,dx & = & 2, \\ Q(x) & = & w_{-1} + w_1 & = & \int_{-1}^{1} x\,dx & = & 0, \\ Q(x^2) & = & -2w_{-1} + 2w_1 & = & \int_{-1}^{1} x^2\,dx & = & \frac{2}{3}. \end{array}$$

Aus diesem linearen Gleichungssystem erhält man die Gewichte

$$w_{-1} = -\frac{1}{6},\ w_0 = 2,\ w_1 = \frac{1}{6},$$

und die Quadraturformel lautet

$$Q_a(f) = -\frac{1}{6}f'(-1) + 2f(0) + \frac{1}{6}f'(1).$$

b): Entsprechend dem Vorgehen in Teil a) erhält man

$$\begin{array}{rclcrcl} Q(1) & = & w_0 & = & \int_{-2}^{3} 1\,dx & = & 5, \\ Q(x) & = & w_{-1} + w_1 & = & \int_{-2}^{3} x\,dx & = & \frac{5}{2}, \\ Q(x^2) & = & -2w_{-1} + 2w_1 & = & \int_{-2}^{3} x^2\,dx & = & \frac{35}{3}. \end{array}$$

und hieraus erhält man die Quadraturformel

$$Q_b(f) = -\frac{5}{3}f'(-1) + 5f(0) + \frac{25}{6}f'(1).$$

□

19.3 Fehler von Quadraturformeln

Aufgabe 19.4 *Bestimmen Sie die Fehlerordnungen der Quadraturformeln aus Aufgabe 19.3.*

Lsung von Aufgabe 19.4
Beide Quadraturformeln wurden so bestimmt, dass sie quadratische Polynome exakt integrieren. Sie haben also beide wenigstens die Ordnung 3. Wegen

$$Q_a(x^3) = 3w_{-1} + 3w_1 = 0 = \int_{-1}^{1} x^3\,dx$$

ist die Fehlerodnung der Formel aus Teil a) sogar wenigstens 4, und wegen

$$Q_a(x^4) = -4w_{-1} + 4w_1 = \frac{4}{3} \neq \int_{-1}^{1} x^4\,dx = \frac{2}{5}$$

ist die Fehlerordnung 4.

Für den Teil b) erhalten wir

$$Q_b(x^3) = 3w_{-1} + 3w_1 = \frac{15}{2} \neq \int_{-1}^{1} x^3\,dx = \frac{65}{4}.$$

Die Fehlerordnung der Quadraturformel in Teil b) ist also $m = 3$. □

Aufgabe 19.5 *Es sei $f(x) := x^2 \sin x$. Berechnen Sie*

$$\int_{0}^{\pi/2} f(x)\,dx$$

exakt und mit der zusammengesetzten Simpson-Regel mit der Schrittweite $h = \pi/8$. Um welchen Faktor wird der Fehler durch die Fehlerformel der Simpson-Regel überschätzt?

Hinweis: Zur Berechnung von $\max|f^{(4)}(x)|$ zeige man, dass $f^{(5)}(x)$ genau eine Nullstelle in $[0, \pi/2]$ besitzt und bestimme diese näherungsweise.

Lsung von Aufgabe 19.5
Es ist

$$\begin{aligned}\int x^2 \sin x\,dx &= -x^2\cos x + 2\int x\cos x\,dx \\ &= -x^2\cos x + 2x\sin x - 2\int \sin x\,dx \\ &= -x^2\cos x + 2x\sin x + 2\cos x,\end{aligned}$$

und daher ist der Wert des Integrals

$$\int_0^{\pi/2} x^2 \sin x \, dx = \Big[- x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x \Big]_0^{\pi/2} = \pi - 2.$$

Mit der zusammengesetzten Simpson Regel erhält man

$$\frac{\pi}{24} \left(f(0) + 4f\left(\frac{\pi}{8}\right) + 2f\left(\frac{\pi}{4}\right) + 4f\left(\frac{3\pi}{8}\right) + f\left(\frac{\pi}{2}\right) \right) = 1.13946555.$$

Für die Auswertung der Fehlerabschätzung benötigen wir das Maximum der fünften Ableitung von f. Es ist

$$\begin{aligned}
f'(x) &= 2x \sin x + x^2 \cos x \\
f''(x) &= 2 \sin x + 4x \cos x - x^2 \sin x \\
f'''(x) &= 6 \cos x - 6x \sin x - x^2 \cos x \\
f^{(4)}(x) &= -12 \sin x - 8x \cos x + x^2 \sin x \\
f^{(5)}(x) &= -20 \cos x + 10x \sin x + x^2 \cos x \\
f^{(6)}(x) &= 30 \sin x + 12x \cos x - x^2 \sin x > 0 \quad \text{in} \quad \left(0, \frac{\pi}{2}\right).
\end{aligned}$$

Also ist $f^{(5)}$ streng monoton wachsend, und wegen

$$f^{(5)}(0) = -20 < 0 < f^{(5)}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 10 \cdot \frac{\pi}{2}$$

besitzt $f^{(5)}$ genau eine Nullstelle $\hat{x}$ in $(0, \pi/2)$.

Das Newton Verfahren liefert $\hat{x} = 1.0590067$. Daher folgt

$$\max_{x \in [0,\pi/2]} |f^{(4)}(x)| = 13.6337281,$$

und man erhält die obere Schranke für den Fehler

$$\frac{\pi/2}{180} \cdot \left(\frac{\pi}{8}\right)^4 \cdot \max_{x \in [0,\pi/2]} |f^{(4)}(x)| = 2.8294486 \cdot 10^{-3}.$$

Der Fehler wird also nur um den Faktor 1.330 überschätzt. □

Aufgabe 19.6 *Es sei $f \in C^2[a,b]$ und $f''(x) \geq 0$ auf $[a,b]$. Zeigen Sie mit Hilfe des Peano Kerns, dass zu jeder Zerlegung*

$$Z \, : \, a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$$

von $[a,b]$ die mit der Trapezregel gewonnene Approximation

$$T_Z(f) := \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} \Big(f(x_j) + f(x_{j-1}) \Big)(x_j - x_{j-1})$$

und die mit der Mittelpunktregel gewonnene Näherung

$$R_Z(f) := \sum_{j=1}^{n} f(0.5(x_j + x_{j-1}))(x_j - x_{j-1})$$

für

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

den Wert des Integrals einschließen.

Lsung von Aufgabe 19.6

Da beide betrachteten Formeln die Ordnung 2 besitzen, hat der Fehler der auf das Intervall $[x_0, x_1]$ verschobenen Quadraturformel die Darstellung

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx - Q_{[x_0,x_1]}(f) = \frac{x_1 - x_0}{2} \int_{-1}^{1} K(t) g''(t)\,dt \ ,$$

wobei K den Peano Kern von Q bezeichnet und g definiert ist durch

$$g(t) := f(x_0 + \frac{1}{2}(x_1 - x_0)(1 + t)) \ , \ -1 \le t \le 1 \ .$$

Der Peano Kern der Trapezregel

$$K_T(t) = -\frac{1}{2}(1 - t^2)$$

ist negativ, und wegen

$$g''(t) = \frac{1}{4}(x_1 - x_0)^2 f''(x_0 + 0.5(x_1 - x_0)(1 + t)) \ge 0$$

gilt

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx \le Q_{T,[x_0,x_1]}(f) \ .$$

Der Peano Kern der Mittelpunktregel

$$K_R(t) = \frac{1}{2}(1 - t)^2 - 2(-t)_+ = \begin{cases} \frac{1}{2}(1 + t)^2 & , \quad t \le 0 \\ \frac{1}{2}(1 - t)^2 & , \quad t \ge 0 \end{cases}$$

ist nicht negativ, und daher gilt genauso

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx \ge Q_{R,[x_0,x_1]}(f) \ .$$

□

Aufgabe 19.7 *Man bestimme mit Hilfe der summierten Mittelpunktformel*

$$\int_1^2 \frac{e^x}{x}\,dx$$

mit einem theoretisch abgesicherten relativen Fehler von höchstens 10^{-1}.

Lsung von Aufgabe 19.7

Zur Abschätzung des relativen Fehlers benötigen wir eine positive untere Schranke von

$$\int_1^2 \frac{e^x}{x}\,dx\ .$$

Es ist

$$\int_1^2 \frac{e^x}{x}\,dx \geq \frac{1}{2}\int_1^2 e^x\,dx = \frac{1}{2}(e^2 - e^1) \geq 2\ .$$

Die Fehlerformel der summierten Rechteckregel lautet

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx - R_{[a,b]}(f)\right| \leq h^2\frac{b-a}{24}\max_{x\in[a,b]}|f''(x)|\ .$$

Wegen

$$f''(x) = \frac{e^x}{x^3}((x-1)^2+1)$$

gilt

$$|f''(x)| \leq \frac{e^2}{1}(1+1) = 2e^2\ .$$

Aus der Forderung

$$\frac{\left|\int_a^b f(x)\,dx - R_{[a,b]}(f)\right|}{\left|\int_a^b f(x)\,dx\right|} \leq \frac{1}{2}h^2\frac{b-a}{24}\max_{x\in[a,b]}|f''(x)| \ \leq \frac{h^2}{24}e^2$$

folgt $h \leq 0.569916\ldots$.

Um eine äquidistante Zerlegung zu erhalten, wählen wir $h = 0.5$ und erhalten

$$\int_0^1 \frac{e^x}{x}\,dx \approx \frac{1}{2}\left(\frac{e^{5/4}}{5/4} + \frac{e^{7/4}}{7/4}\right) = 3.040309.$$

Der Wert des Integrals ist 3.0591165, der relative Fehler ist also tatsächlich $6.1 \cdot 10^{-3} \leq 10^{-2}$. □

19.4 Quadraturformeln von Gauß

Aufgabe 19.8 *Gesucht ist eine Quadraturformel der Form*

$$Q(f) := Af\left(\frac{1}{3}\right) + Bf(x_1)$$

zur Approximation von

$$\int_0^1 f(x)\,dx\ .$$

a) Bestimmen Sie die Gewichte A und B und den freien Knoten x_1 so, dass die Ordnung m der Formel möglichst groß wird.

b) Bestimmen Sie für $f \in \mathbb{C}^m[a,b]$ eine Fehlerdarstellung

$$\int_0^1 f(x)\,dx - Q(f) = C \cdot f^{(m)}(\xi)\ , \quad \xi \in [0,1]$$

für die gefundene Formel.

c) Vergleichen Sie für

$$\int_{-1}^{2} e^x$$

die Ergebnisse der auf das Intervall $[-1,2]$ transformierten Formel Q mit den entsprechenden Werten der Trapezregel und der Mittelpunktformel.

Lsung von Aufgabe 19.8

a): Um eine möglichst hohe Konvergenzordnung zu erhalten, versuchen wir, für $f_j(x) := x^j$ die Gleichungen

$$Q(f_j) = \int_0^1 f_j(x)\,dx \quad\Longleftrightarrow\quad \left(\frac{1}{3}\right)^j A + x_1^j B = \frac{1}{j+1}$$

für aufsteigendes, möglichst großes $j = 0,1,2,\ldots$ zu erfüllen.

Die ersten 3 Gleichungen

$$A + B = 1\ ,\ \frac{1}{3}A + x_1 B = \frac{1}{2}\ ,\ \frac{1}{9}A + x_1^2 B = \frac{1}{3}$$

sind eindeutig lösbar mit

$$A = \frac{3}{4}\ ,\ B = \frac{1}{4}\ ,\ x_1 = 1\ .$$

Damit besitzt die Quadraturformel

$$Q(f) = \frac{3}{4} f\left(\frac{1}{3}\right) + \frac{1}{4} f(1)$$

wenigstens die Ordnung 3, und wegen

$$Q(x^3) = \frac{3}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^3 + \frac{1}{4} \neq \frac{1}{4} = \int\limits_0^1 x^3\,dx$$

ist die Ordnung $m = 3$.

b): Wir gehen entsprechend dem Beweis von Satz 20.?? vor.

Für $f \in C^3[a,b]$ gilt nach dem Taylorschen Satz

$$f(x) = \sum_{j=0}^{2} \frac{f^{(j)}(0)}{j!} x^j + \frac{1}{2} \int\limits_0^1 f^{(3)}(t)(x-t)_+^2\,dt\ .$$

Da die Quadraturformel Q Polynome vom Grad 2 exakt integriert , folgt für den Fehler

$$\begin{aligned}
E(f) &:= \int\limits_0^1 f(x)\,dx - Q(f) \\
&= E\left(\frac{1}{2}\int\limits_0^1 f^{(3)}(t)(x-t)_+^2\,dt\right) \\
&= \frac{1}{2}\int\limits_0^1 f^{(3)}(t)\left(\int\limits_0^1 (x-t)_+^2\,dx - \frac{3}{4}\left(\frac{1}{3}-t\right)_+^2 - \frac{1}{4}(1-t)_+^2\right)dt\ .
\end{aligned}$$

Daher ist der Peano Kern

$$\begin{aligned}
K(t) &= \frac{1}{2}\int\limits_0^1 (x-t)_+^2\,dx - \frac{3}{8}(\frac{1}{3}-t)_+^2 - \frac{1}{8}(1-t)^2 \\
&= \left[\frac{1}{6}(x-t)^3\right]_t^1 - \frac{3}{8}(\frac{1}{3}-t)_+^2 - \frac{1}{8}(1-t)^2 \\
&= \begin{cases} \frac{1}{6}(1-t)^3 - \frac{1}{8}(1-t)^2 - \frac{3}{8}\left(\frac{1}{3}-t\right)^2 & ,\quad t \in \left[0,\frac{1}{3}\right] \\ \frac{1}{6}(1-t)^3 - \frac{1}{8}(1-t)^2 & ,\quad t \in \left[\frac{1}{3},1\right] \end{cases} \\
&= -\begin{cases} \frac{1}{6}t^3 & ,\quad t \in \left[0,\frac{1}{3}\right] \\ \frac{1}{24}(1-t)^2(4t-1) & ,\quad t \in \left[\frac{1}{3},1\right] \end{cases}
\end{aligned}$$

Der Peano Kern ist also überall nicht positiv. Daher gilt nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung

$$E(f) = f^{(3)}(\xi)\int\limits_0^1 K(t)\,dt =: Cf^{(3)}(\xi) \text{ für ein } \xi \in [0,1]\ .$$

Die Konstante C rechnet man nicht durch Integration von K aus. Es gilt für $f(x) := x^3$

$$E(x^3) = \int_0^1 x^3\,dx - \frac{3}{4}\Big(\frac{1}{3}\Big)^3 - \frac{1}{4} = -\frac{1}{36} = f^{(3)}(\xi)\cdot C = 6\cdot C\ ,$$

und daher lautet die Fehlerformel

$$\int_0^1 f(x)\,dx - Q(f) = -\frac{1}{216} f^{(3)}(\xi)\ , \quad \xi \in [0,1]\ .$$

c): Es ist

$$\int_{-1}^2 e^x\,dx = e^2 - e^{-1} = 7.021.$$

Die transformierten Quadraturformeln ergeben

$$\begin{aligned} Q_{[-1,2]}(e^x) &= 3\left(\tfrac{3}{4}e^0 + \tfrac{1}{4}e^2\right) = 7.792 \\ T_{[-1,2]}(e^x) &= \tfrac{3}{2}\left(e^{-1} + e^2\right) = 11.635 \\ R_{[-1,2]}(e^x) &= 3e^{0.5} = 4.946\ . \end{aligned}$$

□

19.5 Adaptive Quadratur

19.6 Nicht glatte Integranden

Kapitel 20

Anwendungen der Integralrechnung

20.1 Volumen von Rotationskörpern

Aufgabe 20.1 *Aus einer Kugel*

$$K_r(0) := \left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \,:\, \|\boldsymbol{x}\|_2 \le r\right\}$$

werde mit einem Zylinder

$$Z_\rho(0) := \left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \,:\, \left\|(x_2, x_3)^T\right\|_2 \le \rho\right\}$$

ein Teil herausgeschnitten. Berechnen Sie das Restvolumen, indem Sie den Körper als

a) Rotationskörper einer Funktion f von x_1

b) Rotationskörper einer Funktion g von x_3 bezüglich der Rotationsachse x_1 auffassen.

Lsung von Aufgabe 20.1
Für $\rho \ge r$ ist das zu berechnende Restvolumen $R = 0$. Es sei also $\rho < r$.

a): R ist die Differenz des Rotationskörpers, der durch

$$f(x_1) := \sqrt{r^2 - x_1^2}\ ,\ -\sqrt{r^2-\rho^2} \le x_1 \le \sqrt{r^2-\rho^2}$$

gegeben ist, und des Zylinders

$$Z = \left\{ \boldsymbol{x} \in Z_\rho(0) \,:\, |x_1| \leq \sqrt{r^2 - \rho^2} \right\} .$$

Daher gilt

$$R = \pi \int\limits_{-\sqrt{r^2-\rho^2}}^{\sqrt{r^2-\rho^2}} \left(r^2 - x_1^2\right) \, dx_1 - 2\pi\rho^2 \sqrt{r^2 - \rho^2} = \frac{4}{3}\pi \left(r^2 - \rho^2\right)^{3/2} .$$

b): Betrachtet man den Körper als Rotationskörper einer Funktion g von x_3 bzgl. der x_1-Achse (vgl. S. 21 - 3)

$$R = 2 \cdot 2\pi \int\limits_\rho^r x_3 \sqrt{r^2 - x_3^2} \, dx_3 = 4\pi \left[-\frac{1}{3} \left(r^2 - x_3^2\right)^{3/2} \right]_\rho^r = \frac{4}{3}\pi \left(r^2 - \rho^2\right)^{3/2} .$$

□

20.2 Kurven, Bogenlängen

Aufgabe 20.2 *Man berechne die Bogenlänge eines Zykloidenbogens zwischen zwei aufeinanderfolgenden Nullstellen und die Fläche unter diesem Bogen.*

Lsung von Aufgabe 20.2

Die Zykloide kann parametrisiert werden durch

$$x(\phi) := a(\phi - \sin\phi), \quad y(\phi) := a(1 - \cos\phi), \quad \phi \in \mathbb{R}.$$

Die Nullstellen erhält man für

$$y(\varphi) = 0 \iff a(1 - \cos\varphi) = 0 \iff \cos\varphi = 1 \iff \varphi = 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Die Bogenlänge ist dann $\left(\text{wegen } 1 - \cos\varphi = 2\sin^2 \frac{\varphi}{2}\right)$

$$\begin{aligned} L &= \int\limits_0^{2\pi} \left(\left(\frac{dx}{d\varphi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\varphi}\right)^2 \right)^{1/2} d\varphi = a \int\limits_0^{2\pi} \left((a - \cos\varphi)^2 + \sin^2\varphi \right)^{1/2} d\varphi \\ &= a \int\limits_0^{2\pi} (1 - 2\cos\varphi + \cos^2\varphi + \sin^2\varphi)^{1/2} \, d\varphi = a \int\limits_0^{2\pi} (2 - 2\cos\varphi)^{1/2} \, d\varphi \\ &= 2a \int\limits_0^{2\pi} \sin\frac{\varphi}{2} \, d\varphi = 2a \left[-2\cos\frac{\varphi}{2} \right]_0^{2\pi} = 8a. \end{aligned}$$

Für die Fläche erhält man wegen $x(2\pi) = 2\pi a$.

$$\begin{aligned}
F &= \int_0^{2\pi a} y(x)\,dx = \int_0^{2\pi} y(x(\varphi)) \cdot \frac{dx}{d\varphi} \cdot d\varphi = a^2 \int_0^{2\pi} (1-\cos\varphi)^2\,d\varphi \\
&= a^2 \int_0^{2\pi} (1 - 2\cos\varphi + \cos^2\varphi)\,d\varphi = a^2 \left[\varphi - 2\sin\varphi + \frac{1}{4}\sin 2\varphi + \frac{\varphi}{2}\right]_0^{2\pi} \\
&= 3a^2\pi.
\end{aligned}$$

Aufgabe 20.3 *Die Kurve* $t \mapsto (x(t), y(t)) := (t - \sin t, 1 - \cos t)$, $0 \leq t \leq \pi$ *rotiere um die* x*–Achse. Berechnen Sie das Volumen des entstehenden Rotationskörpers.*

Lsung von Aufgabe 20.3

Für $y = f(x)$ ist das Volumen $V = \pi \int_a^b [f(x)]^2\,dx$

In Parameterdarstellung ergibt sich $V = \pi \int_{t_a}^{t_b} (y(t))^2 \dot{x}(t)\,dt$

Hier:

$$\begin{aligned}
V &= \pi \int_0^{\pi} (1-\cos t)^2 (1-\cos t)\,dt = \pi \int_0^{\pi} (1-\cos t)^3\,dt \\
&= \pi \int_0^{\pi} (1 - 3\cos t + 3\cos^2 t - \cos^3 t)\,dt \\
&= \pi \left[t - 3\sin t + \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t - \sin t + \frac{1}{3}\sin^3 t\right]_0^{\pi} = \frac{5}{2}\pi^2
\end{aligned}$$

20.3 Krümmung und Torsion von Kurven

Aufgabe 20.4 *Die ebene* C^2*-Kurve* $\boldsymbol{x}$ *sei in Polarkoordinaten gegeben*

$$\boldsymbol{x}(\varphi) := r(\varphi) \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix} .$$

a) *Man zeige, dass dann die Krümmung gegeben ist durch*

$$\kappa(\varphi) = \frac{|r(\varphi)^2 + 2r'(\varphi)^2 - r(\varphi)r''(\varphi)|}{\left(r(\varphi)^2 + r'(\varphi)^2\right)^{3/2}}$$

b) *Man berechne mit dem Ergebnis aus a) die Krümmung der Archimedischen Spirale*

c) *Berechnen Sie die Bogenlänge und die Krümmung der logarithmischen Spirale* $(\alpha, \beta > 0)$

$$\boldsymbol{x} \, : \, [0, a] \to \mathbb{R}^2 \ , \ \boldsymbol{x}(\varphi) := \alpha e^{-\beta\varphi} \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix} \ ,$$

Lsung von Aufgabe 20.4

a): Wegen

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{x}(\varphi) &= r(\varphi)(\cos\varphi, \sin\varphi)^T \\
\boldsymbol{x}'(\varphi) &= r'(\varphi)(\cos\varphi, \sin\varphi)^T + r(\varphi)(-\sin\varphi, \cos\varphi)^T \\
\boldsymbol{x}''(\varphi) &= (r''(\varphi) - r(\varphi))(\cos\varphi, \sin\varphi)^T + 2r'(\varphi)(-\sin\varphi, \cos\varphi)^T
\end{aligned}$$

gilt

$$\begin{aligned}
\|\boldsymbol{x}'(\varphi)\|_2^2 &= r'(\varphi)^2 + r(\varphi)^2 \ , \\
\|\boldsymbol{x}''(\varphi)\|_2^2 &= (r''(\varphi) - r(\varphi))^2 + 4r'(\varphi)^2 \ , \\
< \boldsymbol{x}'(\varphi), \boldsymbol{x}''(\varphi) > &= r'(\varphi)(r''(\varphi) - r(\varphi)) + 2r(\varphi)r'(\varphi) \\
&= r'(\varphi)(r''(\varphi) + r(\varphi)) \ ,
\end{aligned}$$

und daher

$$\begin{aligned}
\kappa(\varphi) &= \frac{\sqrt{(r'(\varphi)^2 + r(\varphi)^2)((r''(\varphi) - r(\varphi))^2 + 4r'(\varphi)^2) - r'(\varphi)^2(r''(\varphi) + r(\varphi))^2}}{\|\boldsymbol{x}'(\varphi)\|_2^3} \\
&= \frac{|r(\varphi)^2 + 2r'(\varphi)^2 - r(\varphi)r''(\varphi)|}{(r(\varphi)^2 + r'(\varphi)^2)^{3/2}}
\end{aligned}$$

b): Für die Archimedische Spirale gilt mit den Bezeichnungen aus Teil a)

$$r(\varphi) = a\varphi \ , \ r'(\varphi) = a \ , \ r''(\varphi) = 0$$

und daher

$$\kappa(\varphi) = \frac{|a^2\varphi^2 + 2a^2|}{\left(a^2\varphi^2 + a^2\right)^{3/2}} = \frac{1}{a} \, \frac{2 + \varphi^2}{\sqrt{1 + \varphi^2}^3}$$

c): Es gilt

$$\boldsymbol{x}'(\varphi) = -\alpha\beta e^{-\beta\varphi} \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix} + \alpha e^{-\beta\varphi} \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix} \ ,$$

und daher ist die Bogenlänge

$$\begin{aligned} l(x) &= \int_0^a \|\boldsymbol{x}'(\varphi)\|_2 \, d\varphi = \int_0^a \sqrt{\alpha^2\beta^2 e^{-2\beta\varphi} + \alpha^2 e^{-2\beta\varphi}} \, d\varphi \\ &= \alpha\sqrt{1+\beta^2} \int_0^a e^{-\beta\varphi} \, d\varphi = \frac{\alpha\sqrt{1+\beta^2}}{\beta} \left(1 - e^{-\beta a}\right) \end{aligned}$$

Mit $r(\varphi) = \alpha e^{-\beta\varphi}$, $r'(\varphi) = -\alpha\beta e^{-\beta\varphi}$, $r''(\varphi) = \alpha\beta^2 e^{-\beta\varphi}$ erhält man die Krümmung der logarthmischen Spirale als

$$\kappa(\varphi) = \frac{\left|\alpha^2 e^{-2\beta\varphi} - 2\alpha^2\beta^2 e^{-2\beta\varphi} - \alpha^2\beta^2 e^{-2\beta\varphi}\right|}{|\alpha^2 e^{-2\beta\varphi} + \alpha^2\beta^2 e^{-2\beta\varphi})^{3/2}} = \frac{e^{\beta\varphi}}{\alpha\sqrt{1+\beta^2}} \; .$$

Aufgabe 20.5 *Gegeben sei die Raumkurve*

$$\boldsymbol{x} \,:\, [0,a] \to \mathbb{R}^3 \;,\; \boldsymbol{x}(t) := \left(t, t^2, \frac{2}{3}t^3\right)^T \; .$$

Man berechne die Krümmung und die Torsion von $\boldsymbol{x}$ *.*

Lsung von Aufgabe 20.5

Wegen $\frac{d\sigma}{dt} = \|\dot{\boldsymbol{x}}(t)\|_2 = \sqrt{1 + (2t)^2 + (2t^2)^2} = 1 + 2t^2$ ist der Tangenteneinheitsvektor

$$\begin{aligned} \boldsymbol{T}(t) &= \frac{d\boldsymbol{x}}{d\sigma} = \frac{d\boldsymbol{x}/dt}{d\sigma/dt} = \frac{1}{1+2t^2} \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \\ 2t^2 \end{pmatrix} \; . \\ \Rightarrow \frac{d\boldsymbol{T}}{d\sigma} &= \frac{d\boldsymbol{T}/dt}{d\sigma/dt} = \frac{1}{(1+2t^2)^3} \begin{pmatrix} -4t \\ 2 - 4t^2 \\ 4t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Die Krümmung ist also

$$\kappa(t) = \left\| \frac{d\boldsymbol{T}}{d\sigma} \right\|_2 = \frac{\left(16t^2 + (2-4t^2)^2 + 16t^2\right)^{1/2}}{\left(1+2t^2\right)^3} = \frac{2}{(1+2t^2)^2} \; ,$$

und die Hauptnormale

$$\boldsymbol{n}(t) = \frac{1}{\kappa} \, \frac{d\boldsymbol{T}}{d\sigma} = \frac{1}{1+2t^2} \begin{pmatrix} -2t \\ 1 - 2t^2 \\ 2t \end{pmatrix} \; .$$

Die Binormale ist

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{T} \times \boldsymbol{n} = \frac{1}{1+2t^2} \begin{pmatrix} 2t^2 \\ -2t \\ 1 \end{pmatrix} \; .$$

Daher folgt

$$\frac{d\boldsymbol{B}}{d\sigma} = \frac{d\boldsymbol{B}/dt}{d\sigma/dt} = \frac{1}{(1+2t^2)^3}\begin{pmatrix} 4t \\ 4t^2-2 \\ -4t \end{pmatrix} \ ,$$

und die Torsion ist

$$\tau = \frac{2}{(1+2t^2)^2}$$

Aufgabe 20.6 *Man bestimme den Krümmungsradius der Astroide in allen Punkten, in denen er erklärt ist.*

20.4 Von einer Kurve umschlossene Fläche

Aufgabe 20.7 *Man skizziere die geschlossene Kurve*

$$\Big\{x \in \mathbb{R}^2 \ : \ \|x\| = |\sin k\varphi| \quad , \quad 0 \le \varphi \le 2\pi\Big\}$$

für den Fall $k = 3$ *und berechne für allgemeines* $k \in \mathbb{N}$ *die eingeschlossene Fläche.*

Aufgabe 20.8 *Bestimmen Sie die von der Astroide*

$$t \mapsto \boldsymbol{x}(t) := \begin{pmatrix} 2\cos^3 t \\ 2\sin^3 t \end{pmatrix} \quad , \quad 0 \le t \le 2\pi \ ,$$

eingeschlossene Fläche.

Lsung von Aufgabe 20.8
Mit

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \begin{pmatrix} 6\cos^2 t(-\sin t) \\ 6\sin^2 t(\cos t) \end{pmatrix}$$

folgt

$$\begin{aligned}
F &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} 2\cos^3 t\ 6\sin^2 t\cos t - 6\cos^2 t(-\sin t)2\sin^3 t\, dt \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} 12\cos^4 t\sin^2 t + 12\sin^4 t\cos^2 t\, dt \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} 12\cos^2 t\sin^2 t\left(\cos^2 t + \sin^2 t\right)\, dt \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} 3(\sin 2t)^2\, dt = \frac{3}{2}\pi \ ,
\end{aligned}$$

$$\text{da} \int_0^{2\pi} \sin^2(nx)\, dx = \pi \qquad \forall n \qquad \text{(nach Bsp. 18.5. Seite 18-7)} \ .$$

□

20.5 Mantelflächen von Rotationskörpern

Aufgabe 20.9 *Die Spitze eines Flugkörpers ist als Rotationskörper aus einem Paraboloid* P *und einem Kugelabschnitt* K *entsprechend der Skizze so*

zusammengesetzt, dass der Übergang zwischen dem Paraboloid und dem Kugelabschnitt glatt ist und sich an den Kugelabschnitt der zylindrische Rumpf glatt anschließen kann.

a) Berechnen Sie die unbekannten Größen α *und* β *.*

b) Bestimmen Sie das Volumen und die Oberfläche der Spitze.

Lsung von Aufgabe 20.9
a): Die "Teilstücke" der in der Skizze dargestellten Funktion $f(x)$ sind

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{\alpha x} & , \quad 0 \le x \le \beta \\ \sqrt{r^2 - (x-l)^2} & , \quad \beta \le x \le l \end{cases} \tag{20.1}$$

Die freien Parameter α und β lassen sich aus den Bedingungen für einen "glatten Anschluss"

$$\sqrt{\alpha x}_{|x=\beta} = \sqrt{r^2 - (x-l)^2}_{|x=\beta}$$

und

$$\left(\frac{d}{dx}\sqrt{\alpha x}\right)_{|x=\beta} = \left(\frac{d}{dx}\sqrt{r^2 - (x-l)^2}\right)_{|x=\beta}$$

bestimmen zu

$$\beta = \sqrt{l^2 - r^2} \quad , \qquad \alpha = 2(l - \beta) \quad . \tag{20.2}$$

Wie die Formel für β zeigt, ist die Bedingung $l > r$ für eine sinnvolle Lösung notwendig. Dies sieht man aber auch sofort aus der Skizze.

b): Mit $f(x)$ nach (*.1) erhält man die Oberfläche O und das Volumen V aus

$$O := \int_0^l \underbrace{2\pi f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}}_{=:g(x)}\, dx$$

und

$$V := \int_0^l \underbrace{\pi f(x)^2}_{=:F(x)}\, dx \ .$$

Wegen der stückweisen Definition von f nach (*.1) haben wir die Integrale aufzuteilen:

$$\begin{aligned} O &= \int_0^\beta g(x)\, dx + \int_\beta^l g(x)\, dx \quad =: \quad O_1 + O_2 \ , \\ V &= \int_0^\beta F(x)\, dx + \int_\beta^l F(x)\, dx \quad =: \quad V_1 + V_2 \ . \end{aligned}$$

Nach Einsetzen von (*.1) ergeben sich verhältnismäßig einfache Integrale. Mit diesen erhält man

$$\begin{aligned} O_1 &= 2\pi\sqrt{\alpha}\frac{2}{3}\left[(\beta+\alpha/4)^{3/2} - (\alpha/4)^{3/2}\right] \ , \\ O_2 &= 2\pi r(l-\beta) \ , \\ V_1 &= \alpha\pi\frac{\beta^2}{2} \ , \\ V_2 &= \pi\left[(l-\beta)r^2 - (l-\beta)^3/3\right] \ . \end{aligned}$$

Aufgabe 20.10 *Die Flugzeugschnauze aus der letzten Aufgabe soll durch 16 Längsrippen und alle 20 cm angebrachte Querrippen versteift werden. Welche Gesamtlänge haben all diese Rippen bei $l = 5$ m und $r = 3$ m?*

Aufgabe 20.11 *Für die Außenhaut des Flugkörpers ist ein kohlefaserverstärkter Kunststoff vorgesehen, der in Form schmaler Bänder vorliegt. Diese sollen auf der Oberfäche entlang Kurven der Form*

$$(t, \sin(t)f(t), \cos(t)f(t)), \quad t \in [0, l]$$

verklebt werden[1].

[1] Das ist übrigens unrealistisch, weil die Nase dann viel zu stark belegt wird. Realistische Kurven sind aber viel schwieriger zu behandeln.

Dabei sei $f(x)$ die in der Aufgabe 13.5 berechnete Funktion, durch deren Rotation um die x–Achse der Rotationskörper bestimmt ist.

Berechnen Sie (wieder bei $l = 5$ m und $r = 3$ m) die Länge eines jeden solchen auf der Oberfläche der Schnauze zu verklebenden Bandes. Fertigen Sie eine Skizze an.

Aufgabe 20.12 *Man bestimme (ohne Benutzung von Formelsammlungen) das Volumen und die Oberfläche des durch den Parabelbogen $y = x^2, \quad -1 \leq x \leq 1$ erzeugten Rotationskörpers.*

Lsung von Aufgabe 20.12

$$\begin{aligned}
\text{Volumen} &= \pi \int_{-1}^{1} x^4\,dx = \pi \frac{1}{5} x^5 \Big|_{-1}^{1} = \frac{2}{5}\pi \\
\text{Oberfläche} &= 2\pi \int_{-1}^{1} x^2 \sqrt{1+4x^2}\,dx = 4\pi \int_{0}^{1} x^2 \sqrt{1+4x^2}\,dx \\
\text{Substitution} &= t \ := \ (4x^2+1)^{1/2} + 2x \Rightarrow x = \frac{t^2-1}{4t} = \frac{1}{4}t - \frac{1}{4t} \\
& \quad \frac{dx}{dt} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4t^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Longrightarrow O &= 4\pi \int_{1}^{2+\sqrt{5}} \left(\frac{t^2-1}{4t}\right)^2 \left(1 + \frac{(t^2-1)^2}{4t^2}\right)^{1/2} \left(\frac{1+t^2}{4t^2}\right) dt \\
&= 4\pi \int_{1}^{2+\sqrt{5}} \left(\frac{t^2-1}{4t}\right)^2 \left(\frac{4t^2+t^4-2t^2+1}{4t^2}\right)^{1/2} \frac{1+t^2}{4t^2}\,dt \\
&= 4\pi \int_{1}^{2+\sqrt{5}} \frac{(t-1)^2(t+1)^2}{16t^2} \frac{t^2+1}{2t} - \frac{t^2+1}{4t^2}\,dt \\
&= \pi \int_{1}^{2+\sqrt{5}} \frac{(t^2-1)^2(t^2+1)^2}{32t^5}\,dt = \frac{\pi}{32} \int_{1}^{2+\sqrt{5}} \frac{(t^4-1)^2}{t^5}\,dt \\
&= \frac{\pi}{32} \int_{1}^{2+\sqrt{5}} \left(t^3 - \frac{2}{t} + \frac{1}{t^5}\right) dt = \frac{\pi}{32} \left[\frac{1}{4}t^4 - 2\ell n t - \frac{1}{4t^4}\right]_1^{2+\sqrt{5}} \\
&= \frac{\pi}{32} \left(\frac{(2+\sqrt{5})^4}{4} - 2\ell n \left(2+\sqrt{5}\right) - \frac{1}{4(2+\sqrt{5})^4} = 7.6194594\right)
\end{aligned}$$

Aufgabe 20.13 *Aus dem Rotationsellipsoid $4x^2 + 4y^2 + z^2 \leq 16$ werde der Zylinder $x^2 + y^2 \leq 1$ herausgebohrt. Berechnen Sie Volumen und Oberfläche des Restkörpers.*

Lsung von Aufgabe 20.13

Das Rolationsellipsoid erhält man durch Rolation von $x(z) = \frac{1}{2}\sqrt{16-z^2}$ um die z-Achse

Volumen: $(x(z) = 1 \iff z^2 = 12)$

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_0^{2\sqrt{3}} x^2(z)\,dz - \underbrace{4\sqrt{3}\pi}_{\text{Volumen}} \underbrace{\hphantom{xxxxxxxxxxxxxxxxxx}}_{\text{des herausgeschnittenen Zylinders}} \\ &= \frac{\pi}{2}\int_0^{2\sqrt{3}} (16-z^2)\,dz - 4\sqrt{3}\pi = 8\sqrt{3}\pi = 43.5311848 \end{aligned}$$

Oberfläche:

$$\begin{aligned} F &= 2 - 2\pi \int_0^{2\sqrt{3}} x(z)\sqrt{1+x'(z)^2}\,dz + \underbrace{4\sqrt{3}\cdot 2\pi}_{=\text{ Innenfläche}} \\ &= 4\pi \int_0^{2\sqrt{3}} \frac{1}{2}\sqrt{16-z^2}\sqrt{1+\frac{z^2}{4}(16-z^2)^{-1}}\,dz + 8\sqrt{3}\pi \\ &= 2\pi \int_0^{2\sqrt{3}} \sqrt{16-z^2+\frac{z^2}{4}}\,dz + 8\sqrt{3}\pi \\ &= \pi \int_0^{2\sqrt{3}} \sqrt{64-3z^2}\,dz + 8\sqrt{3}\pi \\ &= \pi\sqrt{3}\left[\frac{z}{2}\sqrt{\frac{64}{3}-z^2} + \frac{32}{3}\arctan\frac{z}{\frac{8}{\sqrt{3}}}\right]_0^{2\sqrt{3}} + 8\sqrt{3}\pi \\ &= \pi\sqrt{3}\left(\sqrt{28} + \frac{32}{3}\arctan\frac{3}{4}\right) + 8\sqrt{3}\pi = 121.54722 \end{aligned}$$

Aufgabe 20.14 *Aus dem (endlichen) Rotationsparaboloid*

$$\begin{aligned} P &= \left\{(x,y,z)^T \,:\, x^2+y^2 \le z \le 4\right\} \quad \textit{werde der Kegel} \\ K &= \left\{(x,y,z)^T \,:\, 1+\sqrt{x^2+y^2} \le z\right\} \quad \textit{herausgefräst.} \end{aligned}$$

Man berechne das Volumen und die Oberfläche des entstehenden Körpers.

Aufgabe 20.15 *Die Astroide*

$$t \mapsto \boldsymbol{x}(t) := \left(2\cos^3 t, 2\sin^3 t\right) \quad , \quad 0 \le t \le 2\pi \ ,$$

rotiere um die x_1-Achse. Bestimmen Sie die Oberfläche.

Lsung von Aufgabe 20.15

Mit

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \begin{pmatrix} 6\cos^2 t(-\sin t) \\ 6\sin^2 t(\cos t) \end{pmatrix}$$

beträgt die Oberfläche

$$\begin{aligned}
F &= 2 \cdot 2\pi \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sin^3 t \sqrt{(-6\cos^2 t \sin t)^2 + 6\sin^2 t \cos t}\, dt \\
&= 4\pi \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sin^3 t \cdot 6\sqrt{\cos^4 t \sin^2 t + \sin^4 t \cos^2 t}\, dt \\
&= 4\pi \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} 12\sin^3 t \sqrt{\left(\cos^2 t + \sin^2 t\right) \cos^2 t \sin^2 t}\, dt \\
&= 48\pi \int\limits_0^{\frac{\pi}{0}} \sin^3 t |\sin t \cos t|\, dt \\
&= 48\pi \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t \cos t\, dt \\
& \quad 48\pi \left[\frac{1}{5}\sin^5 t\right]^{\frac{\pi}{2}0} = \frac{48}{5}\pi \ .
\end{aligned}$$

□

20.6 Kurvenintegrale

Kapitel 21

Periodische Funktionen

21.1 Einleitende Beispiele

21.2 Fourierentwicklung periodischer Funktionen

Aufgabe 21.1 *Bestimmen Sie die Fourierreihe von*

$$f(x) = \max(\sin x, 0).$$

Lsung von Aufgabe 21.1
Es ist für $n \neq 1$

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \sin x\cos(nx)\,dx \\
&= \frac{1}{\pi}\Big[\frac{1}{n^2-1}(\cos x\cos(nx) + n\sin x\sin nx)\Big]_0^{\pi} \\
&= \frac{1}{(n^2-1)\pi}((-1)^{n-1}-1) = \begin{cases} \dfrac{-2}{(n^2-1)\pi} & \text{falls} \quad n \text{ gerade} \\ 0 & \text{falls} \quad n \text{ ungerade} \end{cases}
\end{aligned}$$

und

$$a_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin x\cos x\,dx = \frac{1}{4}\Big[\cos(2x)\Big]_0^{\pi} = 0$$

Ferner gilt für $n \neq 1$

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \sin x\sin(nx)\,dx \\
&= \frac{1}{\pi}\Big[\frac{1}{n^2-1}(n\cos x\sin(nx) - \sin x\cos nx)\Big]_0^{\pi} = 0
\end{aligned}$$

und

$$b_1 = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi \sin^2 x\,dx = \frac{1}{2}.$$

Daher folgt

$$f(x) = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}\sin x - 2\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{(4n^2-1)\pi}\cos(2nx).$$

□

Aufgabe 21.2 *Man bestimme die Fourierreihe der T-periodischen Funktionen*

$$f(x) = \begin{cases} 0 & -1 < x < -\frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} < x < 1 \end{cases}, \quad T = 2,$$

$$g(x) = |\sin \pi x|, \quad -1 < x < 1, \quad T = 2.$$

Lsung von Aufgabe 21.2

Ist f eine $T > 0$ periodische Funktion, so liefert die Variablentransformation $t = \frac{2\pi}{T}x$ eine 2π-periodische Funktion:

$$g(t) := f\left(\frac{T}{2\pi}t\right).$$

Für die Fourierkoeffizienten hierfür gilt

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{T}{2\pi}t\right)\cos nt\,dt = \frac{2}{T}\int\limits_{-T/2}^{T/2} f(x)\cos\frac{2n\pi x}{T}\,dx \\
b_n &= \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{T}{2\pi}t\right)\sin nt\,dt = \frac{2}{T}\int\limits_{-T/2}^{T/2} f(x)\sin\frac{2n\pi x}{T}\,dx \\
f(x) &= \begin{cases} 0 & -1 < x < -\frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} < x < 1 \end{cases} \quad \text{ist eine gerade Funktion.}
\end{aligned}$$

Daher gilt $b_n = 0$ für alle n, sowie

$$\begin{aligned}
a_n &= \int\limits_{-1}^{1} f(x)\cos\frac{2n\pi x}{2}\,dx = 2\int\limits_0^{1/2}\cos(n\pi x)\,dx = 2\left[\frac{1}{n\pi}\sin(n\pi x)\right]_0^{1/2} \\
&= \frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2} = \begin{cases} 0 & \text{falls } n = 2k, \quad k \in \mathbb{N} \\ \frac{2}{n\pi}(-1)^k & \text{falls } n = 2k+1, \quad k \in \mathbb{N}_0 \end{cases} \\
a_0 &= \int\limits_{-1}^{1} f(x)\,dx = \int\limits_{-1/2}^{1/2} dx = 1 \\
&\Longrightarrow f(x) \sim \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^\infty \frac{2}{(2k+1)\pi}(-1)^k\cos((2k+1)\pi x)
\end{aligned}$$

Auch g ist gerade und

$$\begin{aligned} a_n &= \int_{-1}^{1} |\sin \pi x| \cos(n\pi x)\, dx = 2\int_0^1 \sin(\pi x)\cos(n\pi x)\, dx \\ &= \int_0^1 (\sin(n+1)\pi x - \sin(n-1)\pi x)\, dx \begin{pmatrix} 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2} \\ = \sin\alpha - \sin\beta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n=0\ :\ a_0 &= 2\int_0^1 \sin \pi x\, dx = 2\left[-\frac{1}{\pi}\cos \pi x\right]_0^1 = \frac{4}{\pi} \\ n=1\ :\ a_1 &= \int_0^1 \sin(2\pi x)\, dx = \left[-\frac{1}{2\pi}\cos 2\pi x\right]_0^1 = 0 \\ n>1\ :\ a_n &= \frac{1}{n}\left[-\frac{1}{n+1}\cos(n+1)\pi x + \frac{1}{n-1}\cos(n-1)\pi x\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{\pi}\left(-\frac{1}{n+1}\cos(n+1)\pi + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n-1}\cos(n-1)\pi - \frac{1}{n-1}\right) \\ &= \frac{1}{\pi}\left(-\frac{1}{n+1}(-1)^{n+1} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n-1}(-1)^{n-1} - \frac{1}{n-1}\right) \\ &= \frac{1}{\pi}\left(\frac{(-1)^n+1}{n+1} + \frac{(-1)^n+1}{n-1}\right) \\ &= \begin{cases} 0 & n \text{ ungerade} \\ \frac{4}{\pi}\frac{1}{n^2-1} \quad , & n \text{ gerade} \end{cases} \implies g(x) \sim \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2-1}\cos(2n\pi x) \end{aligned}$$

Aufgabe 21.3 *Man gebe die charakteristischen Eigenschaften einer Funktion an, deren Fourierreihe nur*

— *gerade Kosinusglieder*
— *ungerade Kosinusglieder*
— *gerade Sinusglieder*
— *ungerade Sinusglieder*

enthält.

Hinweis: Vergleichen Sie die Fourierkoeffizienten von $f(x)$ und von $g(x) := f(\pi - x)$.

Lsung von Aufgabe 21.3

Sei $g(x) := f(\pi - x)$. Dann gilt

$$a_n(g) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\cos nx\, dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\pi - x)\cos nx\, dx$$

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{1}{\pi}\int_{2\pi}^{0} f(t)\cos n(\pi - t)\,dt \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi} f(t)\left(\cos n\pi\cos nt + \underbrace{\sin n\pi}_{=0}\sin nt\right)\,dt \\
&= (-1)^n\frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi} f(t)\cos nt\,dt = (-1)^n a_n(f)
\end{aligned}
$$

und genauso

$$
\begin{aligned}
b_n(g) &= -\frac{1}{\pi}\int_{2\pi}^{0} f(t)\sin n(\pi - t)\,dt \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi} f(t)\left(\underbrace{\sin n\pi}_{=0}\cos nt - \cos n\pi\sin nt\right)\,dt \\
&= (-1)^{n+1}\frac{1}{n}\int_{0}^{2\pi} f(t)\sin nt\,dt = (-1)^{n+1} b_n(f)
\end{aligned}
$$

Ist f gerade, so gilt $g(x) = f(\pi - x) = f(x - \pi) = g(-x)$, d.h. auch g ist gerade. Genauso ist mit f auch g ungerade.

Besitzt f nur gerade Kosinusglieder, so sind f und g, und daher auch $h(x) := f(x) - g(x)$ gerade, also $b_n(h) = 0$ für alle n, und

$$a_n(h) = a_n(f) - a_n(g) = a_n(f)(1 - (-1)^n) = 0$$

$\Longrightarrow h(x) = 0,\quad$ d.h.$f(x) = g(x)$ für alle $x \in \mathbb{R},\quad$ d.h. $F(x) := f\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ ist eine gerade Funktion.

Besitzt f nur ungerade Kosinusglieder, so ist f und g und auch $h := f + g$ gerade, also $b_n(h) = 0$, sowie $a_n(h) = a_n(f)(1 + (-1)^n) = 0 \;\Rightarrow\; f(x) = -g(x)$. Damit ist $f\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ eine ungerade Funktion.

Besitzt f nur gerade (ungerade) Sinusglieder, so sind mit f und g auch $h'(x) := f(x) + g(x)$ (bzw. $k(x) := f(x) - g(x)$) ungerade, also $a_n(h) = 0 \quad (a_n(k) = 0)$. Ferner ist

$$
\begin{aligned}
b_n(h) &= b_n(f) + b_n(g) = b_n(f)(1 + (-1)^{n+1}) = 0, \text{ d.h. } f\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \text{ ungerade} \\
b_n(k) &= b(f) - b_n(g) = b_n(f)(1 - (-1)^{n+1}) = 0, \text{ d.h } f\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \text{ gerade}
\end{aligned}
$$

Aufgabe 21.4 *Sei $f(x)$ die 2π–periodische Funktion, die erklärt ist durch*

$$f(x) = \min(\sin x,\ \sin x_0),\quad x \in [0, \pi],\quad f(x) = -f(-x),$$

mit einem $x_0 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Man bestimme x_0 *so, dass die Oberschwingung von* f *mit der dreifachen Frequenz von* f *maximale Amplitude besitzt.*

Lsung von Aufgabe 21.4

Da f ungerade ist, ist die Fourierreihe von f eine reine Sinusreihe. Die Amplitude der 3-ten Oberschwingung ist also

$$\begin{aligned}
b_3 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin 3x\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin 3x\,dx \\
&= \frac{2}{\pi}\left(\int_{=}^{x_0}\sin x\sin 3x\,dx + \int_{x_0}^{\pi-x_0}\sin x_0\sin 3x\,dx + \int_{\pi-x_0}^{\pi}\sin x\sin 3x\,dx\right) \quad := \quad \varphi(x_3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \varphi'(x_0) \quad &= \quad \frac{2}{\pi}\Bigg\{\sin x_0\sin 3x_0 + \int_{x_0}^{\pi-x_0}\cos x_0\sin 3x\,dx - \sin x_0\sin 3(\pi-x_0) \\
&\qquad - \sin x_0\sin 3x_0 + \underbrace{\sin(\pi-x_0)}_{\sin x_0}\sin 3(\pi-x_0)\Bigg\} \\
&= \quad \frac{2}{\pi}\cos x_0\int_{x_0}^{\pi-x_0}\sin 3x\,dx = \frac{2}{\pi}\cos x_0[-\cos 3x]_{x_0}^{\pi-x_0} \\
&= \quad \frac{2}{3\pi}\cos x_0(\underbrace{-\cos 3(\pi-x_0)}_{=\underbrace{\cos 3\pi}_{=-1}\cos 3x_0+\sin 3\pi\sin 3x_0} + \cos 3x_0) \\
&= \quad +\frac{4}{3\pi}\cos x_0\cos 3x_0 \\
\iff \quad & x_0 = \frac{\pi}{2} \vee x_0 = \frac{\pi}{6}.
\end{aligned}$$

Für $x_0 = \frac{\pi}{2}$ gilt $f(x) = \sin x$, und daher $b_3 = 0$; die Amplitude der 3. Oberschwingung ist also minimal.

Wegen $\varphi''(x_0) = -\frac{4}{3\pi}\sin x_0\cos 3x_0 - \frac{4}{\pi}\cos x_0\sin 3x_0$

gilt $\varphi''\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{4}{3\pi}\sin\frac{\pi}{6}\underbrace{\cos\frac{\pi}{2}}_{=0} - \frac{4}{\pi}\underbrace{\cos\frac{\pi}{6}}_{>0}\underbrace{\sin\frac{\pi}{2}}_{=1} < 0$, und in $x_0 = \frac{\pi}{6}$ liegt ein (lokales) Maximum vor.

21.3 Approximation im quadratischen Mittel

Aufgabe 21.5 *Bestimmen Sie ein trigonometrisches Polynom p, das die Funktion*

$$f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R} \ , \ f(x) = |x|,$$

so approximiert, dass der absolute Fehler kleiner als 10^{-2} ist.

Lsung von Aufgabe 21.5

Nach Satz 22.5 ist die abgebrochene Fourierreihe die beste Approximation von f in T_n.

Da f gerade ist, gilt $b_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x|\,dx \ = \ \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\,dx = \pi, \\ a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos(nx)\,dx \\ &= \frac{2}{\pi}\Big\{\Big[\frac{x}{n}\sin(nx)\Big]_0^{\pi} - \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\sin nx\,dx\Big\} \\ &= \frac{2}{\pi}\Big[\frac{1}{n^2}\cos nx\Big]_0^{\pi} = \begin{cases} 0, & \text{falls} \quad n \text{ gerade} \\ -\frac{4}{\pi n^2}, & \text{falls} \quad n \text{ ungerade}\ . \end{cases} \end{aligned}$$

Es gilt also

$$|x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos((2n-1)x), \quad x \in [-\pi, \pi].$$

Für das trigonometrische Polynom

$$p_m(x) := \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos((2n-1)x)$$

folgt

$$\begin{aligned} \big||x| - p_m(x)\big| &= \Big|\frac{4}{\pi}\sum_{n=m+1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos((2n-1)x)\Big| \\ &\leq \frac{4}{\pi}\sum_{n=m+1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\ . \end{aligned}$$

Für $x = 0$ ist

$$0 = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}.$$

Daher erhält man (mit einem Rechner)

$$\Big||x| - p_m(x)\Big| \leq \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{(2n-1)^2} < 0.01\ ,$$

falls $m \geq 32$. □

21.4 Gleichmäßige Konvergenz von Fourierreihen

21.5 Asymptotisches Verhalten der Fourierkoeffizienten

21.6 Andere Formen der Fourierreihe

Aufgabe 21.6 *Es sei*

$$f(x) := \sinh x\ ,\ 0 < x < 2\pi\ ,$$

2π-periodisch fortgesetzt. Man bestimme die komplexe Form und hieraus die reelle Form der Fourierreihe von f.

Lsung von Aufgabe 21.6

Es gilt für $k \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned}
c_k &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-ikx}\,dx \;=\; \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}(e^x - e^{-x})e^{-ikx}\,dx \\
&= \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}(e^{(1-ik)x} - e^{-(1+ik)x})\,dx \\
&= \frac{1}{4\pi}\Big[\frac{1}{1-ik}e^{(1-ik)x} + \frac{1}{1+ik}e^{-(1+ik)x}\Big]_0^{2\pi} \\
&= \frac{1}{4\pi}\Big(\frac{1}{1-ik}(e^{2\pi-2k\pi i} - 1) + \frac{1}{1+ik}(e^{-2\pi-2k\pi i} - 1)\Big) \\
&= \frac{1}{4\pi}\Big(\frac{1}{1-ik}(e^{2\pi} - 1) + \frac{1}{1+ik}(e^{-2\pi} - 1)\Big) \\
&= \frac{1}{4\pi}\Big(\frac{e^{\pi}}{1-ik}(e^{\pi} - e^{-\pi}) + \frac{e^{-\pi}}{1+ik}(e^{-\pi} - e^{\pi})\Big) \\
&= \frac{\sinh\pi}{2\pi}\Big(\frac{e^{\pi}}{1-ik} - \frac{e^{-\pi}}{1+ik}\Big)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\sinh \pi}{2\pi(1+k^2)}\Big(e^{\pi} + ike^{\pi} - e^{-\pi} + ike^{-\pi}\Big) \\
&= \frac{\sinh \pi}{\pi(1+k^2)}(\sinh \pi + ik\cosh \pi)\ ,
\end{aligned}
$$

und hieraus erhält man die reellen Fourierkoeffizienten

$$
\begin{aligned}
a_n &= c_n + c_{-n} = \frac{2\sinh^2 \pi}{\pi(1+n^2)}, \\
b_n &= i(c_n - c_{-n}) = -\frac{2n\sinh \pi \cosh \pi}{\pi(1+n^2)} = \frac{-n\sinh(2\pi)}{\pi(1+n^2)}.
\end{aligned}
$$

□

Aufgabe 21.7 *Man zeige, dass die komplexen Fourierkoeffizienten einer ungeraden Funktion rein imaginär und einer geraden Funktion reell sind.*

Lsung von Aufgabe 21.7
Es gilt $c_0 = \frac{a_0}{2}, \quad c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n), \quad c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + ib_n)$

Ist f eine gerade Funktion, so gilt $b_n = 0$ für alle n, und daher $c_n = \frac{1}{2}a_n = c_{-n} \in \mathbb{R}$, also sind alle Fourierkoeffizienten reell.

Ist f eine ungerade Funktion, so gilt $a_n = 0$ für alle n, und alle Fourierkoeffizienten $a_n = -c_{-n} = -\frac{1}{2}ib_n$ sind rein imaginär.

21.7 Numerische Fourieranalyse und -synthese

Aufgabe 21.8 *Es sei $t \mapsto (x(t), y(t))^T$, $t \in [0, 2\pi]$ eine glatte Parameterdarstellung einer geschlossenen C^1-Kurve im $\mathbb{R}^2$. Dann sind die Komponentenfunktionen sicher 2π-periodisch auf $\mathbb{R}$ fortsetzbar und besitzen Fourierentwicklungen*

$$
\begin{aligned}
x(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(a_n\cos(nt) + b_n\sin(nt)\Big)\ , \\
y(t) &= \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(A_n\cos(nt) + B_n\sin(nt)\Big)\ .
\end{aligned}
$$

a) Drücken Sie den Inhalt der von der Kurve umschlossenen Fläche durch die Fourierkoeffizienten von x und y aus.

b) Berechnen Sie mit der in Teil a) gefundenen Formel den Flächeninhalt der Ellipse mit den Halbachsen a und b.

c) In der Praxis tritt häufig der Fall auf, dass für die Funktionen x und y nur Messdaten an endlich vielen Zeitpunkten $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \ldots \leq t_m \leq 2\pi$ vorliegen. Man wird dann an Stelle der Fourierentwicklungen von x und y ihre trigonometrischen Interpolierenden verwenden.

Bestimmen Sie hiermit eine Approximation für den Inhalt einer Fläche, von der die folgenden Randpunkte zur Verfügung stehen:

t	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
$x(t)$	1	0	-1	0	1
$y(t)$	0	1	0	-1	0

Lsung von Aufgabe 21.8

a): Für die von der Kurve $t \to (x(t), y(t))^T$ umschlossene Fläche gilt

$$F = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (x(t)y'(t) - x'(t)y(t))\, dt.$$

Da die Fourierreihe von x gleichmäßig gegen x konvergiert und y' stetig ist, gilt nach Satz 22.2

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} x(t)y'(t)\, dt &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \Big(a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt) \Big) \right) y'(t)\, dt \\
&= \frac{a_0}{2} \int_0^{2\pi} y'(t)\, dt + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_0^{2\pi} y'(t) \cos(nt)\, dt + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_0^{2\pi} y'(t) \sin(nt)\, dt\ .
\end{aligned}$$

Da y 2π-periodisch ist, gilt

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} y'(t)\, dt &= [y(t)]_0^{2\pi} = 0\ , \\
\int_0^{2\pi} y'(t) \cos(nt)\, dt &= \Big[y(t) \cos(nt) \Big]_0^{2\pi} + n \int_0^{2\pi} y(t) \sin(nt)\, dt \\
&= n\pi B_n\ , \\
\int_0^{2\pi} y'(t) \sin(nt)\, dt &= \Big[y(t) \sin(nt) \Big]_0^{2\pi} - n \int_0^{2\pi} y(t) \cos(nt)\, dt \\
&= -n\pi A_n\ .
\end{aligned}$$

Damit folgt

$$\int_0^{2\pi} x(t)y'(t)\,dt = \pi \sum_{n=1}^{\infty} n\Big(a_n B_n - b_n A_n\Big) \ ,$$

und (durch Vertauschen der Rollen von x und y) genauso

$$\int_0^{2\pi} x'(t)y(t)\,dt = \pi \sum_{n=1}^{\infty} n\Big(-a_n B_n + b_n A_n\Big) \ ,$$

und man erhält

$$F = \pi \sum_{n=1}^{\infty} n\Big(a_n B_n - b_n A_n\Big) \ .$$

b): Die Parameterdarstellung der Ellipse lautet

$$t \to \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\cos t \\ b\sin t \end{pmatrix} \quad , \quad t \in [0, 2\pi] \ .$$

Hieraus kann man die Fourierkoeffizienten von x und y sofort ablesen:

$$\begin{array}{llllll} a_0 = 0 & , \quad a_1 = a & , \quad a_n = 0 & \forall n > 1 & , \quad b_n = 0 & \forall n \geq 1 \ , \\ A_0 = 0 & , \quad A_n = 0 & \forall n \geq 1 & , \quad b_1 = b & , \quad b_n = 0 & \forall n \geq 2 \ , \end{array}$$

und aus Teil a) folgt für den Flächeninhalt der Ellipse

$$F = \pi ab \ .$$

c): Die vorgelegten Punkte liegen offenbar auf dem Einheitskreis. Man erhält daher als trigonometrische Interpolierende

$$x(t) = \cos t \ , \quad y(t) = \sin t$$

und der Flächeninhalt ist (vgl. Teil b) $F = \pi$. □