LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN

MATHEMATISCHES INSTITUT

Mathematisches Institut
Prof. Dr. P. Müller

Klausur
Donnerstag, 4. August 2011

Analysis 2

(*Topologie und Differentialrechnung mehrerer Variablen*)

Klausur

Nachname: ____________ Vorname: ____________

Matrikelnr.: ____________ Fachsemester: ____________

Studiengang: ____________ Nebenfach: ____________

☐ Ich stimme der Veröffentlichung des Ergebnisses dieser Klausur unter Angabe meiner Matrikelnummer zu.

Bitte **schalten Sie Ihr Mobiltelefon aus** und legen es nicht auf den Tisch; legen Sie bitte Ihren Lichtbild- und Studienausweis sichtbar auf den Tisch.

Bitte überprüfen Sie, ob Sie **sechs Aufgaben** erhalten haben.

Schreiben Sie bitte weder mit Bleistift noch in den Farben rot oder grün. Schreiben Sie auf **jedes Blatt** Ihren **Nachnamen und Vornamen**.

Lösen Sie bitte jede Aufgabe auf dem dafür vorgesehenen Blatt. Falls der Platz nicht ausreicht, verwenden Sie bitte die leeren Seiten am Ende und vermerken dies auf dem Angabenblatt der entsprechenden Aufgabe.

Alle Lösungen oder Antworten müssen hinreichend detailliert begründet sein.

Bitte achten Sie darauf, dass Sie zu jeder Aufgabe nur eine Lösung abgeben; streichen Sie deutlich durch, was nicht gewertet werden soll.

Sie haben **120 Minuten** Zeit, um die Klausur zu bearbeiten.

Viel Erfolg!

1	2	3	4	5	6	$\sum$

Aufgabe 1. (*6 Punkte*)

Berechne die folgenden eigentlichen oder uneigentlichen Integrale:

$$\text{(a)} \quad \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{\sin(x)} \cos(x)\, \mathrm{d}x; \qquad \text{(b)} \quad \int_0^\infty x^2 \mathrm{e}^{-x}\, \mathrm{d}x.$$

Aufgabe 2. (*6 Punkte*)

Sei V der Vektorraum aller auf dem Intervall $[0,1]$ definierten reellwertigen Polynome f **höchstens zweiten Grades**. Welche der angegebenen Funktionen $p_j\colon V \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ sind Normen auf V?

$$\begin{aligned} &\text{(a)} \quad p_1(f) := |f(0)|; \\ &\text{(b)} \quad p_2(f) := \int_0^1 |f(t)f(1-t)|\, \mathrm{d}t; \\ &\text{(c)} \quad p_3(f) := |f(0)| + |f(\tfrac{1}{2})| + |f(1)|. \end{aligned}$$

Aufgabe 3. (*6 Punkte*)

Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar und $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, definiert durch $x \mapsto f(\|x\|_2)x$, ein Vektorfeld. Man zeige, dass A in allen Punkten $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ differenzierbar ist und es gilt

$$\langle \nabla, A \rangle(x) = f'(\|x\|_2)\|x\|_2 + n f(\|x\|_2) \qquad (x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}).$$

Aufgabe 4. (*6 Punkte*)

Man bestimme Lage und Art der lokalen Extremstellen der Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$(x,y) \mapsto xy^2 - 4xy + x^4.$$

Aufgabe 5. (*6 Punkte*)

Sei (X,d) ein metrischer Raum mit der diskreten Metrik

$$d(x,y) := \begin{cases} 0, & \text{für } x = y, \\ 1, & \text{für } x \neq y. \end{cases}$$

Man zeige: Eine Teilmenge $A \subseteq X$ ist genau dann kompakt, wenn sie endlich ist.

Aufgabe 6. (*6 Punkte*)

Sei $X := C([-1,1])$ der Banach-Raum der stetigen, auf dem Intervall $[-1,1]$ definierten Funktionen, versehen mit der Supremumsnorm. Man zeige, dass es genau ein $f \in X$ gibt, so dass

$$f(x) = \frac{1}{2}\arctan(f(x)) + e^x$$

für alle $x \in [-1,1]$ erfüllt ist.