

**Topologie und Differentialrechnung mehrerer  
Veränderlichen, SS 2009  
Modulprüfung/Abschlussklausur  
(Wiederholungsprüfung)**

Name:

Aufgabe	1	2	3	4
Punkte				

**Gesamtpunktzahl:**

**Gesamturteil:**

- Schreiben Sie unbedingt auf jedes Blatt Ihren Namen und lösen Sie jede Aufgabe nur auf dem dafür vorgesehenen Blatt. Sollte Ihnen der Platz nicht reichen, fügen Sie an der entsprechenden Stelle ein zusätzliches Blatt *mit Ihrem Namen* ein.
- Arbeitszeit: 90 Minuten.
- Hilfsmittel sind nicht erlaubt.
- Alle Antworten sind sorgfältig zu begründen.

**Viel Erfolg!**

Name:

((2+2)+2+(2+2))

### Aufgabe 1

- a) Es sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  eine offene Teilmenge,  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  eine Abbildung und  $a \in U$ . Definieren Sie, wann man  $f$  partiell differenzierbar, bzw. total differenzierbar im Punkt  $a$  nennt.
- b) Zeigen Sie: Ist  $f$  im Punkt  $a$  total differenzierbar, so ist  $f$  in  $a$  stetig.
- c) Wir betrachten nun die Funktion  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben durch

$$f(x, y) := \begin{cases} 0 & \text{falls } x = 0, \\ \frac{\sin y}{x} & \text{falls } x \neq 0. \end{cases}$$

Ist  $f$  im Punkt  $(0, 0)$  partiell differenzierbar, bzw. total differenzierbar? Begründen Sie jeweils Ihre Antwort.

### Lösung

- a)  $f$  ist *partiell differenzierbar* in  $a$ , falls die Grenzwerte  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+he_i) - f(a)}{h}$  für  $i = 1, \dots, n$  existieren. Hier bezeichnet  $e_i$  den  $i$ -ten Vektor der üblichen Basis von  $\mathbb{R}^n$ .

$f$  ist *total differenzierbar* in  $a$ , falls eine lineare Abbildung  $L_a : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  und eine auf einer offenen Umgebung  $V$  von  $0 \in \mathbb{R}^n$  definierte Funktion  $\varphi : V \rightarrow \mathbb{R}$  existieren, so dass für alle  $x \in V$  mit  $a + x \in U$  gilt:

$$f(a + x) = f(a) + L_a(x) + \varphi(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varphi(x)}{\|x\|} = 0.$$

- b) Weil  $f$  in  $a$  total differenzierbar ist, gibt es eine lineare Abbildung  $L_a$  und eine Funktion  $\varphi$  mit den oben genannten Eigenschaften. Sei  $(y_k)_{k \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $U$  die gegen  $a$  konvergiert. Wir wollen zeigen, dass  $\lim_{k \rightarrow \infty} f(y_k) = f(a)$  gilt. Dazu dürfen wir annehmen (indem wir Folgenglieder, die mit  $a$  übereinstimmen, streichen), dass  $a \neq y_k$  für alle  $k \in \mathbb{N}$ . Nun gilt mit

$x_k := y_k - a$ :

$$\begin{aligned}\lim_{k \rightarrow \infty} f(y_k) &= \lim_{k \rightarrow \infty} f(a + x_k) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} (f(a) + L_a(x_k) + \varphi(x_k)) \\ &= f(a) + 0 + \lim_{k \rightarrow \infty} \left( \frac{\varphi(x_k)}{\|x_k\|} \|x_k\| \right) \\ &= f(a).\end{aligned}$$

Die Umformung zur dritten Zeile folgt aus der Stetigkeit linearer Abbildung auf endlich dimensionalen Vektorräumen, das nächste Gleichheitszeichen folgt aus der Eigenschaft von  $\varphi$ .

- c) Sei  $a = (0, 0)$  und der Einheitsvektor  $e_1$ , bzw.  $e_2$  zeige in  $x$ -, bzw.  $y$ -Richtung. Es gilt dann

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + he_1) - f(a)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(0)/h - 0}{h} = 0 \\ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + he_2) - f(a)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{h} = 0.\end{aligned}$$

Also ist  $f$  in  $(0, 0)$  partiell differenzierbar.

Sei nun  $x_k = y_k = 1/k, k = 1, 2, \dots$ . Dann gilt  $\lim_{k \rightarrow \infty} (x_k, y_k) = (0, 0)$ , aber

$$\begin{aligned}\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k, y_k) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\sin(1/k)}{1/k} \\ &= 1 \neq f(0, 0) = 0.\end{aligned}$$

Also ist  $f$  in  $(0, 0)$  nicht stetig und nach b) ist  $f$  in  $(0, 0)$  auch nicht total differenzierbar.

Name:

(3+3+4)

### Aufgabe 2

- a) Es sei  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine stetige Kurve. Definieren Sie, wann man  $\gamma$  rektifizierbar nennt.
- b) Für  $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  betrachten wir die *logarithmische Spirale*  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $t \mapsto (e^{ct} \cos t, e^{ct} \sin t)$ . Es seien  $a < b$  reelle Zahlen. Man berechne die Länge von  $\gamma|_{[a,b]}$  in Abhängigkeit von  $a$ ,  $b$  und  $c$ .
- c) Sei  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  definiert durch

$$\gamma(t) := \begin{cases} (0, 0) & \text{falls } t = 0, \\ (t, t \cos(\frac{\pi}{t})) & \text{falls } t \neq 0. \end{cases}$$

Zeige, dass  $\gamma$  stetig, aber nicht rektifizierbar ist.

Anleitung: Für  $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  betrachte man die Zerlegung  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m = 1$  des Intervalls  $[0, 1]$ , wobei  $t_k := \frac{1}{m-k+1}$  für  $k = 1, \dots, m$ , und schätze die Länge von  $\gamma$  von unten durch die Länge des Polygonzuges mit Eckpunkten  $\gamma(t_k)$ ,  $0 \leq k \leq m$ , ab.

### Lösung

- a) Für eine Zerlegung  $Z = \{t_0, \dots, t_m\}$  von  $[a, b]$ , d.h.  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = b$ ,  $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ , definiert man

$$l(Z; \gamma) := \sum_{i=1}^m \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\|.$$

Die Kurve  $\gamma$  ist *rektifizierbar*, falls folgendes gilt: Es gibt eine reelle Zahl  $L = L(\gamma) \in \mathbb{R}$  mit der folgenden Eigenschaft: Für alle  $\epsilon > 0$  existiert ein  $\delta > 0$ , so dass für alle Zerlegungen  $Z$  von  $[a, b]$  der Feinheit  $\max\{|t_i - t_{i-1}| \mid i = 2, \dots, m\} < \delta$  die Ungleichung

$$|L(\gamma) - l(Z; \gamma)| < \epsilon$$

gilt. In diesem Fall heißt  $L(\gamma)$  die *Länge* von  $\gamma$ .

Bemerkung: Man kann mit Hilfe der Stetigkeit von  $\gamma$  zeigen (Übungsaufgabe!), dass diese Definition der Rektifizierbarkeit (die aus Forster 2

entnommen ist) äquivalent zu der folgenden ist, die man auch an vielen Stellen findet:

$$\sup \{l(Z; \gamma) \mid Z \text{ Zerlegung von } [a, b]\} < \infty.$$

In diesem Fall ist  $L(\gamma) := \sup \{l(Z; \gamma) \mid Z \text{ Zerlegung von } \gamma\}$  die Länge von  $\gamma$  und stimmt mit der obigen Definition der Länge überein.

- b) Nach einem Satz aus der Vorlesung sind stetig differenzierbare Kurven  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  rektifizierbar und für ihre Länge gilt

$$L(\gamma) = \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| dt.$$

Die logarithmische Spirale ist stetig differenzierbar und

$$\begin{aligned} L(\gamma) &= \int_a^b \sqrt{(ce^{ct} \cos(t) - e^{ct} \sin(t))^2 + (ce^{ct} \sin(t) + e^{ct} \cos(t))^2} dt \\ &= \frac{\sqrt{c^2 + 1}}{c} (e^{cb} - e^{ca}). \end{aligned}$$

- c) Die Kurve  $\gamma$  ist offenbar stetig an allen Punkten  $t \in (0, 1]$ . Wegen

$$0 \leq \lim_{s \rightarrow 0} \|(s, s \cos(\pi/s) - (0, 0))\| \leq \lim_{s \rightarrow 0} (|s| + |s|) = 0$$

ist  $\gamma$  auch stetig in  $t = 0$ . Also ist  $\gamma$  insgesamt stetig.

Für die Zerlegung  $Z_m$  aus dem Hinweis bestimmen wir  $l(Z_m; \gamma)$ :

$$\begin{aligned} l(Z_m; \gamma) &= \|\gamma(1/m) - \gamma(0)\| \\ &\quad + \sum_{k=2}^m \|\gamma(1/(m-k+1)) - \gamma(1/(m-(k-1)+1))\| \\ &= \left\| \left( \frac{1}{m}, \frac{(-1)^m}{m} \right) \right\| \\ &\quad + \sum_{k=2}^m \left\| \left( \frac{1}{m-k+1}, \frac{(-1)^{m-k+1}}{m-k+1} \right) - \left( \frac{1}{m-k+2}, \frac{(-1)^{m-k+2}}{m-k+2} \right) \right\| \\ &\geq \frac{1}{m} + \sum_{k=2}^m \frac{1}{m-k+1} \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{m}. \end{aligned}$$

Die harmonische Reihe divergiert, also gilt  $\lim_{m \rightarrow \infty} l(Z_m; \gamma) = \infty$ . Daher ist  $\gamma$  nicht rektifizierbar.

Name:

(3+3+2+2)

### Aufgabe 3

- a) Es sei  $U \subset \mathbb{R}^3$  offen und  $v : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  ein zweimal stetig differenzierbares Vektorfeld. Man zeige, dass  $\operatorname{div}(\operatorname{rot}(v)) = 0$ .
- b) Sei  $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  eine zweimal stetig differenzierbare Funktion. Die Funktion  $F : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$  sei durch  $F(x) := f(r)$  gegeben, wobei wir  $r := \|x\|$  schreiben. Man beweise die Formel

$$\Delta F(x) = f''(r) + \frac{n-1}{r} f'(r).$$

- c) Sei nun  $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch  $f(r) := r^\alpha$ , wobei  $\alpha \neq 0$ . Angenommen, die in Teil b) definierte Funktion  $F(x) = f(r)$  ist *harmonisch* auf  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ , d.h.  $\Delta F = 0$ . Berechnen Sie  $\alpha$  in Abhängigkeit von  $n$  unter der Annahme, dass  $n \neq 2$ .
- d) Skizzieren Sie das Gradientenvektorfeld der Funktion  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(x, y) \mapsto \sin(y) - \cos(x)$  auf dem Bereich  $(x, y) \in [-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi]$ .

### Lösung

- a) Weil  $v$  zweimal stetig differenzierbar ist, gilt nach dem Satz von Schwarz

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial v_k}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right), \quad 1 \leq i, j, k \leq 3. \text{ Also}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\operatorname{rot}(v)) &= \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left( -\frac{\partial v_3}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \right) \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial x_3} \left( \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) \\ &= \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2 \partial x_3} - \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_3 \partial x_2} - \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_1 \partial x_3} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_3 \partial x_1} + \frac{\partial^2 v_3}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial^2 v_3}{\partial x_2 \partial x_1} \\ &= 0. \end{aligned}$$

- b) Es gilt  $r = \|x\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$ , also  $\frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{x_i}{r}$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Wir erhalten mit der Kettenregel und der Produktregel

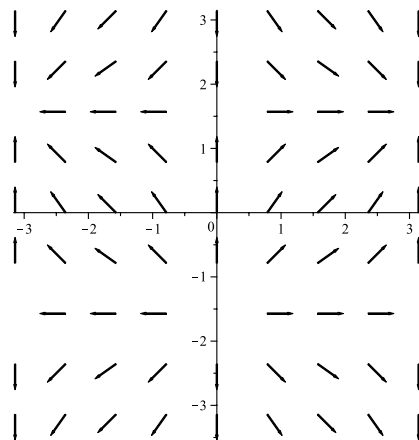
$$\begin{aligned}
\Delta F(x) &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 F}{\partial x_i^2} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left( f'(r) \frac{x_i}{r} \right) \\
&= \sum_{i=1}^n \left( f''(r) \left( \frac{x_i}{r} \right)^2 + f'(r) \frac{r - x_i \cdot (x_i/r)}{r^2} \right) \\
&= f''(r) + f'(r) \frac{\sum_{i=1}^n (r^2 - x_i^2)}{r^3} = f''(r) + \frac{n-1}{r} f'(r).
\end{aligned}$$

c) Falls  $F$  harmonisch ist, so gilt

$$\alpha(\alpha - 1)r^{\alpha-2} + \alpha r^{\alpha-1} \frac{n-1}{r} = 0.$$

Weil  $\alpha \neq 0$ , folgt  $\alpha - 1 + n - 1 = 0$  bzw.  $\alpha = 2 - n$ . (Der Fall  $n = 2$  ist ausgeschlossen weil wir auch  $\alpha = 0$  ausgeschlossen haben).

d) Das Gradientenvektorfeld von  $f$  ist  $\text{grad} f(x, y) = (\sin(x), \cos(y))$ .



Name:

(3+4+3)

#### Aufgabe 4

- Es sei  $X$  ein topologischer Raum. Definieren Sie mit Hilfe von Überdeckungen, wann man  $X$  kompakt nennt.
- Zeigen Sie direkt mit Hilfe dieser Definition und ohne Sätze aus der Vorlesung zu zitieren: Die Menge  $X := (0, 1]$ , versehen mit der Teilraumtopologie von  $\mathbb{R}$ , ist nicht kompakt.
- Formulieren Sie den Satz von Heine-Borel und behandeln Sie mit seiner Hilfe ein weiteres Mal Teilaufgabe b).

#### Lösung

- Ein topologischer Raum  $X$  ist kompakt falls für jede Familie  $(U_i)_{i \in I}$  offener Mengen in  $X$  ( $I$  ist eine Indexmenge) mit  $\bigcup_{i \in I} U_i = X$  eine endliche Teilmenge  $\{i_1, \dots, i_k\} \subset I$  existiert, so dass  $\bigcup_{j=1}^k U_{i_j} = X$ .

Anders gesagt: Jede offene Überdeckung von  $X$  enthält eine endliche Teilüberdeckung.

- Sei  $U_n = (1/n, 1]$  mit  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ . Dann ist  $U_n \subset (0, 1] = X$  offen in der Teilraumtopologie, denn  $(1/n, 1] = (1/n, \infty) \cap (0, 1]$ . Weiter ist  $U_k \subset U_j$  falls  $j \geq k$ .

Für jedes  $x \in (0, 1)$  existiert ein  $1 < n_x \in \mathbb{N}$ , so dass  $n_x > 1/x$  bzw.  $x \in (1/n_x, 1)$  (nach dem Archimedischen Axiom). Also gilt  $x \in \bigcup_{n=2}^{\infty} U_n$  falls  $x \in (0, 1)$ . Offenbar ist auch  $1 \in \bigcup_{n=2}^{\infty} U_n$ . Daher gilt  $\bigcup_{n=2}^{\infty} U_n = X$ .

Sei nun  $\{i_1, \dots, i_k\} \subset \{2, 3, \dots\}$  endlich. Ohne Einschränkung sei  $i_1 = \max\{i_1, \dots, i_k\}$ . Dann gilt  $\bigcup_{j=1}^k U_{i_j} = U_{i_1} = (1/i_1, 1] \neq (0, 1]$ . Also gibt es keine endliche Teilüberdeckung von  $(0, 1]$  durch  $U_i$ ,  $i = 2, 3, \dots$ . Dies zeigt, dass  $(0, 1]$  nicht kompakt ist.

- Satz von Heine-Borel: Eine Teilmenge  $U \subset \mathbb{R}^m$  mit der Unterraumtopologie ist genau dann kompakt, wenn  $U$  beschränkt und abgeschlossen in  $\mathbb{R}^m$  ist.

Die Teilmenge  $(0, 1] \subset \mathbb{R}$  beschränkt, aber nicht abgeschlossen: Die in  $\mathbb{R}$  konvergente Folge  $(\frac{1}{n})_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}}$  liegt ganz in  $(0, 1]$ , nicht jedoch ihr Grenzwert 0. Nach dem Satz von Heine-Borel ist somit  $(0, 1]$  nicht kompakt.