Universität München 22. Juli 2009

Topologie und Differentialrechnung mehrerer Veränderlicher, SS 2009
Modulprüfung/Abschlussklausur

Name:

Aufgabe	1	2	3	4
Punkte				

Gesamtpunktzahl:

Gesamturteil:

- Schreiben Sie unbedingt auf jedes Blatt Ihren Namen und lösen Sie jede Aufgabe nur auf dem dafür vorgesehenen Blatt. Sollte Ihnen der Platz nicht reichen, fügen Sie an der entsprechenden Stelle ein zusätzliches Blatt *mit Ihrem Namen* ein.
- Arbeitszeit: 90 Minuten.
- Hilfsmittel sind nicht erlaubt.
- Alle Antworten sind sorgfältig zu begründen.

Viel Erfolg!

Name: **(2+2+2+2+2)**

Aufgabe 1

Wir betrachten die zweimal stetig differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x^2 + 2xy - y^2 + 1$.

a) Bestimmen Sie die kritischen Punkte von f.

b) Berechnen Sie die Hesse-Matrix von f im Punkt $(0, 0)$ und geben Sie die Taylorentwicklung von f im Punkt $(0, 0)$ bis zu den Gliedern zweiter Ordnung an.

c) Zeigen Sie, dass f keine lokalen Extrema besitzt.

d) Begründen Sie, warum die Einschränkung $\phi := f|_{S^1} : S^1 \to \mathbb{R}$ von f ihr Minimum und ihr Maximum annimmt.

e) Berechnen Sie die Extremalstellen von ϕ (d.h. diejenigen Punkte auf S^1, an denen ϕ ihr Minimum oder ihr Maximum annimmt).

Lösung:

a) Die kritischen Punkte von f sind die Nullstellen des Gradienten von f.

$$\operatorname{grad}(f)(x, y) = (2x + 2y \quad 2x - 2y)\,.$$

Daher ist $\operatorname{grad}(f)(x, y) = 0$ äquivalent zu $x = y = 0$. Dies ist der einzige kritische Punkt von f.

b) Die Hesse-Matrix von f bei $(0, 0)$ ist

$$H := \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Die Taylorreihe von f bis zur Ordnung 2 ist f selbst, da f ein Polynom vom Grad 2 ist. (Insbesondere ist das Restglied gleich 0.) Hier kann man natürlich auch explizit rechnen.

c) Weil H symmetrisch ist, ist H diagonalisierbar. Wegen $\det(H) = -8$ ist 0 kein Eigenwert und die beiden Eigenwerte λ, μ haben wegen $\det(H) = \lambda\mu$ verschiedene Vorzeichen. Also ist $(0, 0)$ ein Sattelpunkt und insbesondere kein lokales Extremum.

d) $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ ist kompakt nach dem Satz von Heine-Borel:

- S^1 ist beschränkt : Für alle $(x, y) \in S^1$ gilt $\|(x, y)\| \leq 1$
- $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ ist abgeschlossen, denn $S^1 = g^{-1}(1)$ mit der stetigen Funktion $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $g(x, y) := x^2 + y^2$.

Weiter ist f stetig. Stetige Funktionen auf kompakten Mengen (hier f auf S^1) nehmen ihr Maximum und ihr Minimum an.

e) Wir verwenden Lagrange-Multiplikatoren und lösen die Gleichung

$$\operatorname{grad} f = \lambda \cdot \operatorname{grad} h\,,$$

wobei $h(x, y) := x^2 + y^2 - 1$ die Nebenbedingung $(x, y) \in S^1$ beschreibt. Wir erhalten (nach Division durch 2) das von λ abhängige lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 0 &= x + y - \lambda x \\ 0 &= x - y - \lambda y \end{aligned}$$

Es hat nichttriviale Lösungen $(x, y) \neq (0, 0)$ (dies gilt wegen $(x, y) \in S^1$) genau dann wenn

$$\det \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 1 \\ 1 & -1 - \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 2 = 0.$$

Also gilt $\lambda = \pm\sqrt{2}$. Für diese λ ist der Lösungsraum des linearen Gleichungssystems mindestens eindimensional und wegen der Bedingung $x = (1 + \lambda)y$, die aus der zweiten Gleichung folgt, genau eindimensional. Einsetzen in die Nebenbedingung liefert

$$(1 + \lambda)^2 y^2 + y^2 = 1$$

also $y = \pm\frac{1}{\sqrt{(1+\lambda)^2+1}} = \pm\frac{1}{\sqrt{4+2\lambda}}$. Die Gleichung $x = (1 + \lambda)y$ legt dann auch den x-Wert fest. Es gibt also insgesamt höchstens 4 Extremalstellen auf S^1 (zwei für $\lambda = +\sqrt{2}$ und zwei für $\lambda = -\sqrt{2}$), wobei je zwei durch Punktspiegelung an $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$ auseinander hervorgehen.

Da f invariant unter dieser Punktspiegelung ist und in den Minimalstellen einen echt kleineren Wert annimmt als in den Maximalstellen (sonst wäre $f|_{S^1}$ konstant. Dies ist aber nicht der Fall, denn $f(1, 0) = 2 \neq 0 = f(0, 1)$), hat f mindestens vier Extremalstellen.

Die oben berechneten vier Punkte sind also genau die Extremalstellen von $f|_{S^1}$.

Name: **(1+4+2+3)**

Aufgabe 2

a) Wir betrachten die stetig differenzierbare Funktion

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \,, \\ (x, y, z) &\mapsto (x^2 + y^2, y^2 + z^2) \,. \end{aligned}$$

Berechnen Sie die Jacobimatrix $DF(x, y, z)$ für $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

b) Formulieren Sie den Satz über implizite Funktionen.

c) Zeigen Sie, dass $(1, 1)$ ein singulärer (d.h. kein regulärer) Wert von F ist.

d) Skizzieren Sie die Menge $M := F^{-1}(1, 1) \subset \mathbb{R}^3$. Hinweis: $M = M_1 \cap M_2$, wobei $M_1 = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 = 1\}$ und $M_2 = \{(x, y, z) \mid y^2 + z^2 = 1\}$.

Lösung:

a) Es gilt

$$DF(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2x & 2y & 0 \\ 0 & 2y & 2z \end{pmatrix}.$$

b) Seien $U_1 \subset \mathbb{R}^k$ und $U_2 \subset \mathbb{R}^l$ offen und $F : U_1 \times U_2 \longrightarrow \mathbb{R}^l$, $(x, y) \longmapsto F(x, y)$ stetig differenzierbar. Es gelte $F(\hat{x}, \hat{y}) = 0$ und

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1}(\hat{x}, \hat{y}) & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial y_l}(\hat{x}, \hat{y}) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_l}{\partial y_1}(\hat{x}, \hat{y}) & \dots & \frac{\partial F_l}{\partial y_l}(\hat{x}, \hat{y}) \end{pmatrix} \neq 0 \,.$$

Dann gibt es offene Umgebungen $V_1 \subset U_1$ von $\hat{x}$ und $V_2 \subset U_2$ von $\hat{y}$, sowie eine stetig differenzierbare Funktion

$$g : V_1 \longrightarrow V_2$$

so dass $g(\hat{x}) = \hat{y}$ und so dass für alle $(x, y) \in V_1 \times V_2$ gilt: $F(x, y) = 0$ genau dann, falls $y = g(x)$.

c) Wir haben $F(0, 1, 0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\mathrm{Bild}((DF)(0, 1, 0)) = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Insbesondere ist $DF(0, 1, 0) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ nicht surjektiv. Daher ist $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ kein regulärer Wert von F.

d) Wir betrachten die Zylinderfläche $\{(x^2 + y^2 = 1)\} \subset \mathbb{R}^3$ und zeichnen in dieser Fläche zwei Ellipsen durch den Punkt $(0, 1, 0)$, die zu den Zylinderachsen jeweils Winkel von 45 Grad bilden. Diese Ellipsen schneiden sich in den Punkten $(0, \pm 1, 0)$ im Winkel von 90 Grad und die Vereinigung dieser beiden Ellipsen ist die gesuchte Menge $F^{-1}(1, 1) = M_1 \cap M_2$. Dies ist insbesondere keine Untermannigfaltigkeit im $\mathbb{R}^3$.

Name: **(5+2+3)**

Aufgabe 3

Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diejenige 2π-periodische Funktion, die für $x \in [0, 2\pi)$ durch $f(x) := x$ gegeben ist.

a) Wir betrachten die komplexe Fourierentwicklung $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} c_k \cdot e^{ikx}$ von f. Berechnen Sie die Fourierkoeffizienten c_k für $k \in \mathbb{Z}$.

b) Konvergiert diese Fourierreihe gleichmäßig gegen f? Begründen Sie Ihre Antwort.

c) Zeigen Sie durch Auswerten der Vollständigkeitsrelation und mit Hilfe des Ergebnisses aus a) die Formel $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Lösung:

a) Für $k \neq 0$ benutzt man partielle Integration:

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{2\pi} \int x e^{-ikx} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\left[\frac{x}{-ik} e^{-ikx} \right]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \frac{1}{-ik} e^{-ikx} dx \right) \\ &= \frac{i}{k}. \end{aligned}$$

Weiter gilt

$$c_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x dx = \frac{(2\pi)^2}{2(2\pi)} = \pi.$$

b) Diese Fourierreihe konvergiert nicht gleichmäßig gegen f, denn die Partialsummen der Fourierreihe sind stetig, aber die Funktion f ist nicht stetig.

c) Nach der Vollständigkeitsrelation gilt :

$$\|f\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (f(x))^2 dx = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2$$

denn f ist Riemann-integrierbar. Also folgt

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\frac{(2\pi)^3}{3} &= \sum_{k=-\infty,k\neq 0}^{\infty}\frac{1}{k^2}+|c_0|^2\\ &= \pi^2+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{k^2}.\end{aligned}$$

Insgesamt erhält man

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{4\pi^2}{3}-\pi^2\right)=\frac{\pi^2}{6}.$$

Name: **(3+3+4)**

Aufgabe 4

a) Es sei X eine nichtleere Menge. Was versteht man unter einer Metrik auf X?

b) Wir betrachten die Menge $\mathcal{C}$ der Kurven $[0,1] \to \mathbb{R}^n$, wobei $n \in \mathbb{N}$, $n > 0$, fest gewählt wurde. Man zeige, dass durch die Setzung

$$d(\phi, \psi) := \int_0^1 \|\phi(t) - \psi(t)\| \, dt$$

eine Metrik d auf $\mathcal{C}$ definiert wird.

c) Wir betrachten nun die Teilmenge $\mathcal{D} \subset \mathcal{C}$ der differenzierbaren Kurven $[0,1] \to \mathbb{R}^n$. Ist $\mathcal{D}$ bezüglich der Metrik d offen in $\mathcal{C}$? Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung:

a) Eine Metrik auf X ist eine Abbildung $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ so dass für alle $x, y, z \in X$ gilt

$$\begin{aligned} d(x,y) = 0 &\Longleftrightarrow x = y \\ d(x,y) &= d(y,x) \\ d(x,y) &\leq d(x,z) + d(z,y). \end{aligned}$$

b) Wenn ψ, ϕ stetig sind, so auch $t \longmapsto \|\phi(t) - \psi(t)\|$. Seien $\phi, \psi, \mu \in \mathcal{C}$. Nach den Eigenschaften des Riemann-Integrals folgt:

- Aus $d(\phi, \psi) = 0$ folgt $\int_0^1 \|\phi(t) - \psi(t)\| dt = 0$. Da der Integrand stetig und nicht-negativ ist, kann dies nur gelten, falls $\|\phi(t) - \psi(t)\| = 0$ für alle t gilt. Es folgt $\phi(t) = \psi(t)$ für alle t, also $\phi = \psi$. Gilt umgekehrt $\phi = \psi$, so ist $\|\phi(t) - \psi(t)\| = 0$ für alle t, also $d(\phi, \psi) = 0$.
- Symmetrie : $d(\phi, \psi) = \int_0^1 \|\phi(t) - \psi(t)\| dt = \int_0^1 \|\psi(t) - \phi(t)\| dt = d(\psi, \phi)$.

- Dreiecksungleichung:

$$\begin{aligned} d(\phi,\psi) &= \int_0^1 \|\phi(t)-\mu(t)+\mu(t)-\psi(t)\|dt \\ &\leq \int_0^1 \|\phi(t)-\mu(t)\|dt + \int_0^1 \|\mu(t)-\psi(t)\|dt \\ &= d(\phi,\mu)+d(\mu,\psi) \end{aligned}$$

  nach der Dreiecksungleichung für $\| - \|$.

d) $\mathcal{D}$ ist nicht offen in $\mathcal{C}$ (mit der durch d induzierten Topologie).

Beweis: Sei $n=1$ und $\psi_m : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $m \in \{1,2,\ldots\}$ gegeben durch $\psi_m(t) = \frac{1}{m}|t-1/2|$. Dann ist ψ_m eine Folge in $\mathcal{C}$ und es gilt:

- Für alle m ist $\psi_m \notin \mathcal{D}$, denn $t \mapsto |t-1/2|$ ist bei $t=0$ nicht differenzierbar.
- Sei $\phi(t)=0$, $t \in [0,1]$ der konstante Weg. Dann gilt

$$\begin{aligned} \lim_{m\to\infty} d(\psi_m,\phi) &= \lim_{m\to\infty} \frac{1}{m}\int_0^1 |t-1/2|dt \\ &= \lim_{m\to\infty} \frac{1}{4m} \\ &= 0. \end{aligned}$$

  Also gilt $\lim_{m\to\infty} \psi_m = \phi$ in $(\mathcal{C},d)$.

Also ist $\mathcal{C}\setminus\mathcal{D}$ nicht abgeschlossen (und somit $\mathcal{D}$ nicht offen) in $\mathcal{C}$, denn in diesem Fall müsste der Limes ϕ der in $\mathcal{C}\setminus\mathcal{D}$ liegenden Folge (ψ_m) wieder in $\mathcal{C}\setminus\mathcal{D}$ liegen. Es ist aber $\phi \in \mathcal{D}$.