

MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
H. Steinlein
M. Brunnbauer

Analysis II (MIIA) im WS 2007/08
Zweite Klausur

Freitag, 1. Februar 2008, 14-16 Uhr

Name:

Aufgabe 1: Sei V ein normierter Vektorraum und seien $K, L \subset V$ kompakte Teilmengen. Zeigen Sie, dass

$$K + L := \{x + y \in V \mid x \in K, y \in L\}$$

ebenfalls kompakt ist.

Hinweis: Ein Beweis mit der Überdeckungseigenschaft ist nicht einfach. Denken Sie lieber an Satz VI.2.7.

Wir zeigen, dass $K + L$ folgenkompakt ist, was nach Satz VI.2.7 äquivalent zur Kompaktheit ist. Sei also $(x_n + y_n)_n$ eine Folge in $K + L$, wobei $x_n \in K, y_n \in L$ gelten soll. Wegen der Kompaktheit von K existiert eine konvergente Teilfolge $(x_{n_k})_k$ von $(x_n)_n$. Da L auch kompakt ist, hat die Folge $(y_{n_k})_k$ ebenfalls eine konvergente Teilfolge, die mit $(y_{n_{k_\ell}})_\ell$ bezeichnet sei.

Sind $x \in K$ und $y \in L$ die Grenzpunkte der Folgen $(x_{n_{k_\ell}})_\ell$ bzw. $(y_{n_{k_\ell}})_\ell$, so konvergiert die Folge $(x_{n_{k_\ell}} + y_{n_{k_\ell}})_\ell$ offenbar gegen $x + y$. Diese Folge ist also eine konvergente Teilfolge von $(x_n + y_n)_n$, womit die Folgenkompaktheit von $K + L$ gezeigt ist.

Name:

Aufgabe 2: Es seien $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ zwei Normen auf einem Vektorraum V . Zeigen Sie, dass

$$\|x\| := \max\{\|x\|_1, \|x\|_2\}$$

eine weitere Norm definiert.

Weisen Sie außerdem nach, dass Mengen, die bezüglich $\|\cdot\|_1$ oder $\|\cdot\|_2$ offen sind, auch im Bezug auf $\|\cdot\|$ offen sind.

Offenbar ist $\|x\| \geq 0$ für alle $x \in V$ und $\|x\| = 0$ genau dann, wenn $\|x\|_1 = \|x\|_2 = 0$ gilt, d. h. wenn $x = 0$ ist. Weiter ist

$$\|\lambda x\| = \max\{\|\lambda x\|_1, \|\lambda x\|_2\} = \max\{|\lambda|\|x\|_1, |\lambda|\|x\|_2\} = |\lambda| \max\{\|x\|_1, \|x\|_2\} = |\lambda|\|x\|.$$

Es gilt

$$\|x + y\| = \max\{\|x + y\|_1, \|x + y\|_2\} \leq \max\{\|x\|_1 + \|y\|_1, \|x\|_2 + \|y\|_2\}.$$

Angenommen $\|x\|_1 \geq \|x\|_2$. Falls $\|y\|_1 \geq \|y\|_2$, so ist also

$$\|x + y\| \leq \|x\|_1 + \|y\|_1 = \|x\| + \|y\|.$$

Ist aber $\|y\|_1 \leq \|y\|_2$, so folgt

$$\|x + y\| \leq \|x\|_1 + \|y\|_2 = \|x\| + \|y\|,$$

denn $\|x\|_1 + \|y\|_1 \leq \|x\|_1 + \|y\|_2$ und auch $\|x\|_2 + \|y\|_2 \leq \|x\|_1 + \|y\|_2$.

Falls $\|x\|_1 \leq \|x\|_2$, so folgt die Dreiecksungleichung analog. Insgesamt ist $\|\cdot\|$ damit als Norm nachgewiesen.

Sei $U \subset V$ offen bezüglich $\|\cdot\|_1$ (für $\|\cdot\|_2$ funktioniert dieses Argument völlig analog). Wir wollen nachweisen, dass U auch bezüglich $\|\cdot\|$ offen ist. Sei dazu $p \in U$ ein Punkt. Nach Definition der Offenheit gibt es ein $r > 0$, so dass

$$B_{\|\cdot\|_1}(p, r) := \{x \in V \mid \|x - p\|_1 < r\}$$

ganz in U liegt. Nach Definition gilt $\|\cdot\|_1 \leq \|\cdot\|$, also gilt

$$B_{\|\cdot\|}(p, r) \subset B_{\|\cdot\|_1}(p, r) \subset U.$$

Somit ist U offen im Bezug auf die Norm $\|\cdot\|$.

Name:

Aufgabe 3: Gegeben ist die Abbildung

$$F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3,$$

$$(r, \theta, \varphi) \mapsto ((1 + r \sin \theta) \cos \varphi, (1 + r \sin \theta) \sin \varphi, r \cos \theta).$$

Berechnen Sie die Jacobi-Matrix und die Jacobi-Determinante von F .

Die Jacobi-Matrix ergibt sich als

$$\begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi & r \cos \theta \cos \varphi & -(1 + \sin \theta) \sin \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi & r \cos \theta \sin \varphi & (1 + \sin \theta) \cos \varphi \\ \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \end{pmatrix}$$

und entsprechend ist die Jacobi-Determinante

$$\begin{aligned} & r(1 + r \sin \theta) \cos^2 \theta \cos^2 \varphi + r(1 + r \sin \theta) \sin^2 \theta \sin^2 \varphi \\ & + r(1 + r \sin \theta) \cos^2 \theta \sin^2 \varphi + r(1 + r \sin \theta) \sin^2 \theta \cos^2 \varphi \\ & = r(1 + r \sin \theta). \end{aligned}$$

Name:

Aufgabe 4: Die Funktion $f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ sei durch

$$f(x, y) := \frac{x - y}{x + y}$$

definiert. Berechnen Sie die Taylorentwicklung von f am Punkt $(1, 1)$ bis einschließlich den Gliedern zweiter Ordnung.

Es ist $f(1, 1) = 0$ und

$$\text{grad } f(x, y) = \left(\frac{2y}{(x+y)^2}, \frac{-2x}{(x+y)^2} \right).$$

Die Hessematrix ist

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{-4y}{(x+y)^3} & \frac{2x-2y}{(x+y)^3} \\ \frac{2x-2y}{(x+y)^3} & \frac{4x}{(x+y)^3} \end{pmatrix}.$$

Somit ist $\text{grad } f(1, 1) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ und

$$H_f(1, 1) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Die Taylorentwicklung bis zur zweiten Ordnung lautet also

$$\begin{aligned} f(1, 1) + \langle \text{grad } f(1, 1), (x-1, y-1) \rangle + \frac{1}{2} \langle (x-1, y-1), H_f(1, 1)(x-1, y-1) \rangle \\ = 0 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}y + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \langle (x-1, y-1), (1-x, y-1) \rangle \\ = \frac{1}{4}(y^2 - x^2) + x - y. \end{aligned}$$

Name:

Aufgabe 5: Bestimmen Sie die lokalen und globalen Extrema der Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R},$$
$$f(x, y) := (4x^2 - y^2)e^{-x^2 - 4y^2}.$$

Man berechnet

$$\text{grad } f(x, y) = (8xe^{-x^2 - 4y^2} - 2x(4x^2 - y^2)e^{-x^2 - 4y^2}, -2ye^{-x^2 - 4y^2} - 8y(4x^2 - y^2)e^{-x^2 - 4y^2}).$$

Die kritischen Punkte sind also die Lösungen von

$$8x = 2x(4x^2 - y^2),$$
$$2y + 8y(4x^2 - y^2) = 0.$$

Für $x = 0$ folgt $2y = 8y^3$, also $y = 0$ oder $y^2 = \frac{1}{4}$, d. h. $y = \pm \frac{1}{2}$. Für $x \neq 0$ ergibt sich

$$4 = 4x^2 - y^2,$$
$$y + 4y(4x^2 - y^2) = 0.$$

Setzt man die erste Gleichung in die zweite ein, so ergibt sich $17y = 0$, also $y = 0$. Dann muss $x^2 = 1$ sein, d. h. $x = \pm 1$. Man hat also die kritischen Punkte

$$(0, 0), (0, \pm \frac{1}{2}), (\pm 1, 0)$$

gefunden. Die zugehörigen Werte sind

$$f(0, 0) = 0, f(0, \pm \frac{1}{2}) = -\frac{1}{4e}, f(\pm 1, 0) = \frac{4}{e}.$$

Da $e^{-x^2 - 4y^2}$ für $|(x, y)| \rightarrow \infty$ gegen Null geht, geht auch $f(x, y)$ gegen Null. Insbesondere sind $(0, \pm \frac{1}{2})$ globale Minima und $(\pm 1, 0)$ globale Maxima. Da weiter $f(x, 0)$ für $x \neq 0$ positiv und $f(0, y)$ für $y \neq 0$ negativ ist, muss $(0, 0)$ ein Sattelpunkt sein.

Name:

Aufgabe 6: Bestimmen Sie die lokalen Maxima und Minima der Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) := x^2 y$$

auf dem Einheitskreis $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$.

Es ist $\text{grad } f(x, y) = (2xy, x^2)$.

Sei $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, h(x, y) := x^2 + y^2$. Dann ist $\text{grad } h(x, y) = (2x, 2y)$. Man hat also folgendes Gleichungssystem zu betrachten:

$$\begin{aligned} 2xy &= 2x\lambda, \\ x^2 &= 2y\lambda, \\ x^2 + y^2 &= 1. \end{aligned}$$

Eine erste Lösung ist $(x, y) = (0, \pm 1)$ (mit $\lambda = 0$). Für $x \neq 0$ ist nach der ersten Gleichung $\lambda = y$, also $x^2 = 2y^2$. Somit ist $3y^2 = 1$, d. h. $y = \pm \frac{1}{3}\sqrt{3}$, und $x^2 = \frac{2}{3}$, d. h. $x = \pm \frac{1}{3}\sqrt{6}$. Man hat also sechs kritische Punkte:

$$(0, \pm 1), \left(\pm \frac{1}{3}\sqrt{6}, \frac{1}{3}\sqrt{3}\right), \left(\pm \frac{1}{3}\sqrt{6}, -\frac{1}{3}\sqrt{3}\right).$$

Diese haben die Werte

$$\begin{aligned} f(0, \pm 1) &= 0, \\ f\left(\pm \frac{1}{3}\sqrt{6}, \frac{1}{3}\sqrt{3}\right) &= \frac{2}{9}\sqrt{3}, \\ f\left(\pm \frac{1}{3}\sqrt{6}, -\frac{1}{3}\sqrt{3}\right) &= -\frac{2}{9}\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Wegen der Anordnung der kritischen Punkte am Einheitskreis folgt, dass $(\pm \frac{1}{3}\sqrt{6}, \frac{1}{3}\sqrt{3})$ und $(0, -1)$ lokale Maxima und $(\pm \frac{1}{3}\sqrt{6}, -\frac{1}{3}\sqrt{3})$ und $(0, 1)$ lokale Minima sind.

... ..

... ..

... ..

... ..

... ..

... ..

... ..

... ..

... ..

... ..

... ..

... ..

... ..

... ..

... ..

... ..

... ..

... ..