

MATHEMATISCHES INSTITUT  
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN  
H. Steinlein  
M. Brunnbauer

**Analysis II (MIIA) im WS 2007/08**  
**Lösungsvorschläge zur ersten Klausur**  
**Freitag, 7. Dezember 2007, 10-12 Uhr**

**Aufgabe 1:** Zeigen Sie folgende Formel:

$$\sin x = \frac{2 \tan \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}}.$$

Für welche  $x \in \mathbb{R}$  sind alle vorkommenden Terme definiert?

---

Da die linke Seite für alle  $x \in \mathbb{R}$  definiert ist und die rechte nur für  $x \in \{(2k+1)\pi | k \in \mathbb{Z}\}$  nicht, macht die zu zeigende Formel für alle  $x \in \mathbb{R} \setminus \{(2k+1)\pi | k \in \mathbb{Z}\}$  Sinn.

Es gilt  $\tan y = \frac{\sin y}{\cos y}$ , also folgt

$$\begin{aligned} \frac{2 \tan \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}} &= \frac{2 \frac{\sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}}}{1 + \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2}}} \\ &= \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}} \\ &= 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} \\ &= \sin x \end{aligned}$$

nach dem Additionstheorem des Sinus. □

**Aufgabe 2:** Finden Sie Stammfunktionen für

$$f(x) := e^x \cos x,$$

$$g(x) := \frac{3x^2 - 3x - 3}{x^3 - 2x^2 - x + 2}$$

auf den jeweiligen maximalen Definitionsbereichen.

---

Die Funktion  $f$  hat maximalen Definitionsbereich  $\mathbb{R}$ . Mit zweimaliger partieller Integration gilt

$$\int e^x \cos x dx = e^x \cos x - \int e^x (-\sin x) dx = e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \cos x dx.$$

Es ist also  $2 \cdot \int e^x \cos x dx = e^x (\cos x + \sin x)$  und

$$F(x) := \frac{1}{2} e^x (\cos x + \sin x)$$

definiert eine Stammfunktion von  $f$ .

Das Polynom im Nenner von  $g$  faktorisiert sich zu

$$x^3 - 2x^2 - x + 2 = (x + 1)(x - 1)(x - 2).$$

Also ist der maximale Definitionsbereich von  $g$  gerade  $\mathbb{R} \setminus \{\pm 1, 2\}$ . Weiter ist

$$\frac{3x^2 - 3x - 3}{x^3 - 2x^2 - x + 2} = \frac{1}{x - 2} + \frac{\frac{3}{2}}{x - 1} + \frac{\frac{1}{2}}{x + 1}$$

die Partialbruchzerlegung. Somit ist

$$G(x) := \log |x - 2| + \frac{3}{2} \log |x - 1| + \frac{1}{2} \log |x + 1|$$

eine Stammfunktion von  $g$  auf ganz  $\mathbb{R} \setminus \{\pm 1, 2\}$ . □

**Aufgabe 3:** Sei  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  durch

$$f(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } x \in ]\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n-1}], n \in \mathbb{N} \\ -1 & \text{für } x \in ]\frac{1}{2n+1}, \frac{1}{2n}], n \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

definiert. Zeigen Sie, dass  $f$  Riemann-integrierbar ist.

(Der Satz V.1.15 über das Lebesguesche Integritätskriterium darf nicht verwendet werden!)

---

Um zu zeigen, dass  $f$  Riemann-integrierbar ist, genügt es zu jedem  $\varepsilon > 0$  Treppenfunktionen  $\varphi$  und  $\psi$  zu finden, so dass  $\varphi \leq f \leq \psi$  und  $\int_0^1 (\psi - \varphi)(x) dx < \varepsilon$  gilt.

Sei also  $\varepsilon > 0$ . Wähle  $N \in \mathbb{N}$  so groß, dass  $\frac{2}{N} < \varepsilon$ . Definiere

$$\varphi(x) := \begin{cases} -1 & \text{für } x \leq \frac{1}{N} \\ f(x) & \text{für } x > \frac{1}{N} \end{cases}$$

und

$$\psi(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } x \leq \frac{1}{N} \\ f(x) & \text{für } x > \frac{1}{N} \end{cases}$$

Dies sind offenbar Treppenfunktionen und es gilt  $\varphi \leq f \leq \psi$  und

$$(\psi - \varphi)(x) := \begin{cases} 2 & \text{für } x \leq \frac{1}{N} \\ 0 & \text{für } x > \frac{1}{N} \end{cases}$$

Also ist  $\int_0^1 (\psi - \varphi)(x) dx = \frac{2}{N} < \varepsilon$ . Dies zeigt, dass  $f$  Riemann-integrierbar ist. □

**Aufgabe 4:** Existiert das uneigentliche Integral

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin x} dx ?$$

Begründen Sie Ihre Antwort.

(Sie dürfen die Formel aus Aufgabe 1 verwenden. Es gibt allerdings auch eine Lösung, die ohne diese Formel auskommt.)

---

Für  $x \in \mathbb{R}^+$  gilt  $\sin x \leq x$ , also auch  $\frac{1}{\sin x} \geq \frac{1}{x}$ . Falls  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin x} dx$  gegen einen endlichen Wert konvergieren würde, so wäre

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin x} dx = \lim_{r \rightarrow 0} \int_r^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin x} dx \geq \lim_{r \rightarrow 0} \int_r^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{x} dx.$$

Aber die rechte Seite dieser Ungleichung ist

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{x} dx = \lim_{r \rightarrow 0} \int_r^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{x} dx = \lim_{r \rightarrow 0} [\log x]_r^{\frac{\pi}{2}} = \lim_{r \rightarrow 0} \left( \log \frac{\pi}{2} - \log r \right) = \infty.$$

Somit divergiert auch die linke Seite, d. h. das uneigentliche Integral  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin x} dx$  existiert nicht.  $\square$

**Aufgabe 5:** Berechnen Sie die Bogenlänge der *Traktrix*  $w : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,

$$w(t) := \left( t - \tanh t, \frac{1}{\cosh t} \right)$$

von 0 bis  $T$ .

---

Es ist  $w'(t) = (1 - (1 - \tanh^2 t), -\frac{\sinh t}{\cosh^2 t})$ , also ist

$$\begin{aligned} |w'(t)|^2 &= \tanh^4 t + \frac{\sinh^2 t}{\cosh^4 t} = \frac{\sinh^4 t}{\cosh^4 t} + \frac{\sinh^2 t}{\cosh^4 t} \\ &= \sinh^2 t \frac{\sinh^2 t + 1}{\cosh^4 t} = \frac{\sinh^2 t}{\cosh^2 t} \\ &= \tanh^2 t. \end{aligned}$$

Somit ergibt sich die Bogenlänge von  $w$  zwischen 0 und  $T$  als

$$\begin{aligned} \int_0^T |w'(t)| dt &= \int_0^T \tanh t dt = \int_0^T \frac{\sinh t}{\cosh t} dt \\ &= [\log \cosh t]_0^T = \log \cosh T. \end{aligned}$$

□

**Aufgabe 6:** Sei  $d : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  durch

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) := \begin{cases} \min\{|x_1 - x_2|, 1\} & \text{falls } y_1 = y_2 \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

definiert.

- a) Zeigen Sie, dass dies eine Metrik auf  $\mathbb{R}^2$  definiert.
- b) Beweisen Sie, dass die Menge  $N := \{(0, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq y \leq 1\}$  in der von dieser Metrik induzierten Topologie nicht kompakt ist.

---

Offenbar ist  $d$  nicht-negativ und symmetrisch. Außerdem gilt  $d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = 0$  genau dann, wenn  $y_1 = y_2$  und  $|x_1 - x_2| = 0$  ist, also genau dann, wenn  $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$  gilt. Bei der Dreiecksungleichung müssen mehrere Fälle betrachtet werden. Seien  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$  Punkte in  $\mathbb{R}^2$ .

*1. Fall:*  $y_1 = y_2$ . Dann ist  $d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \min\{|x_1 - x_2|, 1\}$ . Ist  $y_3 \neq y_1$ , so ist

$$d((x_1, y_1), (x_3, y_3)) + d((x_3, y_3), (x_2, y_2)) = 2 \geq 1 \geq d((x_1, y_1), (x_2, y_2)).$$

Bleibt noch der Fall, dass  $y_3 = y_1 = y_2$  gilt. Ist  $|x_1 - x_3| \geq 1$  oder  $|x_2 - x_3| \geq 1$ , so ist

$$d((x_1, y_1), (x_3, y_3)) + d((x_3, y_3), (x_2, y_2)) \geq 1 \geq d((x_1, y_1), (x_2, y_2)).$$

Gilt aber  $|x_1 - x_3| < 1$  und  $|x_2 - x_3| < 1$ , so folgt

$$\begin{aligned} d((x_1, y_1), (x_3, y_3)) + d((x_3, y_3), (x_2, y_2)) &= |x_1 - x_3| + |x_3 - x_2| \geq |x_1 - x_2| \\ &\geq \min\{|x_1 - x_2|, 1\} = d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \end{aligned}$$

nach der Dreiecksungleichung für den Betrag.

*2. Fall:*  $y_1 \neq y_2$ . Es ist  $d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = 1$ . Da außerdem  $y_3 \neq y_1$  oder  $y_3 \neq y_2$  gelten muss, folgt

$$d((x_1, y_1), (x_3, y_3)) + d((x_3, y_3), (x_2, y_2)) \geq 1 = d((x_1, y_1), (x_2, y_2)).$$

Somit gilt die Dreiecksungleichung für  $d$  und es ist bewiesen, dass  $d$  eine Metrik ist.

Die Menge  $N$  wird von den offenen Kugeln  $K_{\frac{1}{2}}((0, y))$  mit  $(0, y) \in N$  überdeckt. Da  $K_{\frac{1}{2}}((0, y)) = ] - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}[ \times \{y\}$ , sind diese Kugeln paarweise disjunkt. Somit kann man auf keine dieser Überdeckungsmengen verzichten und es gibt keine endliche Teilüberdeckung, d. h.  $N$  ist nicht kompakt.  $\square$

The first part of the document discusses the importance of maintaining accurate records of all transactions. It emphasizes that every entry should be supported by a valid receipt or invoice. This ensures transparency and allows for easy verification of the data.

In the second section, the author details the various methods used to collect and analyze the data. This includes both manual and automated processes. The manual process involves reviewing each entry individually, while the automated process uses software to identify patterns and anomalies.

The third part of the document focuses on the results of the analysis. It shows that there are several areas where the data deviates from the expected values. These deviations are likely due to human error or system malfunctions. The author provides a detailed breakdown of these errors and suggests ways to prevent them in the future.

Finally, the document concludes with a summary of the findings and a list of recommendations. The key recommendation is to implement a more robust data validation system that can catch errors before they are entered into the database. This will help to improve the overall accuracy and reliability of the data.