MUSTERLÖSUNG KLAUSUR ANALYSIS 2

Aufgabe 1 (10 Punkte)**.** Sei $f(x,y,z) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$ für $x, y, z \neq 0$.

(a) Entwickeln Sie die Funktion f im Punkt $p = (2,1,4)$ in eine Taylorreihe (ohne Restglied) bis zweiter Ordnung einschließlich.

(b) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangentialebene von f an dem Punkt $p = (2,1,4)$.

Lösung

(a) [7 Punkte] Die Taylorreihe von $f(x,y,z)$ mit Entwicklungspunkt $p = (x_0, y_0, z_0)$ bis zweite Ordnung ohne Restglied ist :

$$\begin{aligned} f(p)+&\frac{\partial f}{\partial x}(p)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(p)(y-y_0) + \frac{\partial f}{\partial z}(p)(z-z_0) \\ &+ \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(p)(x-x_0)^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(p)(y-y_0)^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(p)(z-z_0)^2 + \\ &+ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(p)(x-x_0)(y-y_0) + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(p)(x-x_0)(z-z_0) + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(p)(y-y_0)(z-z_0). \end{aligned}$$

Die erste und zweite partiellen Ableitungen von $f(x,y,z) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$ sind

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= -\frac{1}{x^2}, & \frac{\partial f}{\partial y} &= -\frac{1}{y^2}, & \frac{\partial f}{\partial z} &= -\frac{1}{z^2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{2}{x^3}, & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{2}{y^3}, & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} &= \frac{2}{z^3}, \end{aligned}$$

und die gemischten zweiten partiellen Ableitungen sind null. Somit ergibt sich im Entwicklungspunkt $p = (2,1,4)$ die Reihe

$$\frac{7}{4} - \frac{1}{4}(x-2) - (y-1) - \frac{1}{16}(z-4) + \frac{1}{8}(x-2)^2 + (y-1)^2 + \frac{1}{64}(z-4)^2.$$

(b) [3 Punkte] Wenn wir Koordinaten in $\mathbb{R}^4$ mit (x,y,z,w) bezeichnen, erhalten wir die Gleichung

$$w = \frac{7}{4} - \frac{1}{4}(x-2) - (y-1) - \frac{1}{16}(z-4).$$

Aufgabe 2 (10 Punkte)**.** Sei

$$f(x,y) := \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2+y^6} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie, dass f im Ursprung nicht stetig ist.

(b) Untersuchen Sie, ob die partiellen Ableitungen im Ursprung existieren.

(c) Ist f differenzierbar?

Lösung

(a) [4 Punkte] Für $t \neq 0$ gilt

$$f(t^3,t) = \frac{t^6}{2t^6} = \frac{1}{2},$$

also $\lim_{t\to 0} f(t^3,t) = \frac{1}{2} \neq f(0,0)$. f ist also nicht stetig im Ursprung.

(b) [4 Punkte]

$$\lim_{x\to 0 x\neq 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = \lim_{x\to 0 x\neq 0} \frac{0}{x} = 0,$$

und genauso

$$\lim_{y\to 0 y\neq 0} \frac{f(0,y)-f(0,0)}{y} = 0.$$

Da die beiden Grenzwerte existieren, ist f partiell Differenzierbar im Punkt $(0,0)$ mit

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0.$$

(c) [2 Punkte] Da f im Punkt $(0,0)$ nicht stetig ist, kann es auch nicht differenzierbar sein.

Aufgabe 3 (10 Punkte)**.** Die Kurve $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, definiert durch $\gamma(t) = \left(\sqrt{3}(t^2-1), t^3-t\right)$, hat einen Doppelpunkt im Ursprung $(0,0)$.

(a) Berechnen Sie den Schnittwinkel der Kurve mit sich selbst in diesem Punkt.

(b) Berechnen Sie die Bogenlänge der Schleife, den die Kurve um den Ursprung macht.

Lösung

Zuerst finden wir die Parameterwerte t, so dass $\gamma(t) = 0$, d.h.

$$t^2 - 1 = 0, \text{ und } t^3 - t = 0.$$

Beide Gleichungen sind erfüllt wenn $t = \pm 1$. Das heißt, die Kurve γ besitzt einen Doppelpunkt im $\gamma(1) = \gamma(-1) = (0,0)$.

(a) [5 Punkte] Tangentialvektor:

$$\gamma'(t) = \left(2\sqrt{3}t, 3t^2 - 1\right),$$

also für $t = \pm 1$:

$$\gamma'(1) = \left(2\sqrt{3}, 2\right), \qquad \gamma'(-1) = \left(-2\sqrt{3}, 2\right)$$

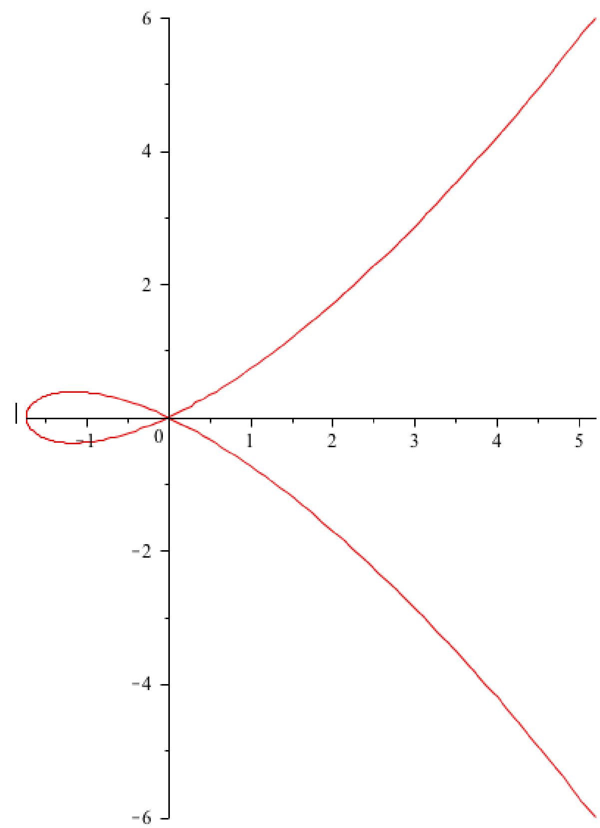
Der Schnittwinkel θ erfüllt

$$\cos\theta = \frac{\gamma'(1)\cdot\gamma'(-1)}{\|\gamma'(1)\|\|\gamma'(-1)\|} = \frac{-8}{16} = -\frac{1}{2}.$$

Also $\theta = \frac{2\pi}{3}$.

(b) [5 Punkte]

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} \|\gamma'(t)\|\,dt &= \int_{-1}^{1} \sqrt{12t^2 + (3t^2-1)^2}\,dt \\ &= \int_{-1}^{1} \sqrt{12t^2 + 9t^4 - 6t^2 + 1}\,dt \\ &= \int_{-1}^{1} \sqrt{(3t^2+1)^2}\,dt \\ &= \int_{-1}^{1} 3t^2 + 1\,dt \\ &= 4.\end{aligned}$$


6
4
2
-2
-4
-6
-1
0
1
2
3
4
5

Aufgabe 4 (10 Punkte)**.** (a) Sei $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig und $N := \{x \in \mathbb{R}^n : F(x) = 0\}$. Beweisen Sie, dass N abgeschlossen ist.

(b) Sei $F(x, y) = x^2 + xy + y^2$. Finden Sie das Maximum und das Minimum der Menge

$$\{y \in \mathbb{R} : \text{ es existiert ein } x \in \mathbb{R} \text{ so dass } F(x, y) = 27\}.$$

Lösung

(a) [3 Punkte] Falls $x_n \in N$ mit $x_n \to x$, dann $F(x_n) \to F(x)$ weil F stetig, und $F(x_n) = 0$ weil $x_n \in N$. Es folgt: $F(x) = 0$, also $x \in N$.

(b) [7 Punkte] Extrema mit Nebenbedingung: $\max_{F(x,y)=27} g(x, y)$, wobei $g(x, y) = y$. Notwendige Bedingung von Lagrange: es existiert $\lambda \in \mathbb{R}$ so dass

$$\nabla F(x_0, y_0) = \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$F(x_0, y_0) = 27.$$

also

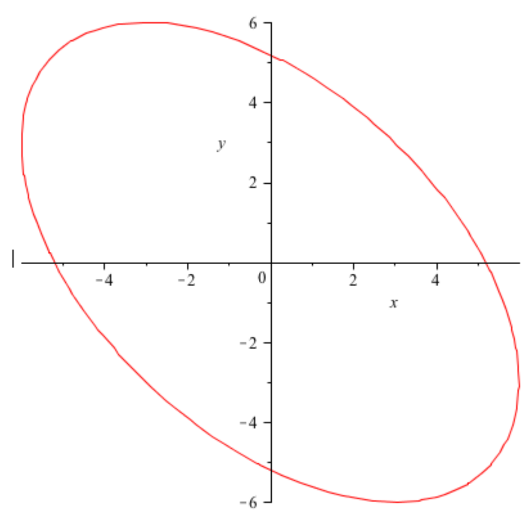
$$2x_0 + y_0 = 0$$
$$2y_0 + x_0 = \lambda$$
$$x_0^2 + x_0 y_0 + y_0^2 = 27.$$

Auflösen nach x_0 und y_0:

$$(x_0, y_0) = (3, -6) \text{ oder } (-3, 6).$$

Daraus folgt

$$\max_{F(x,y)=27} y = 6, \qquad \min_{F(x,y)=27} y = -6.$$

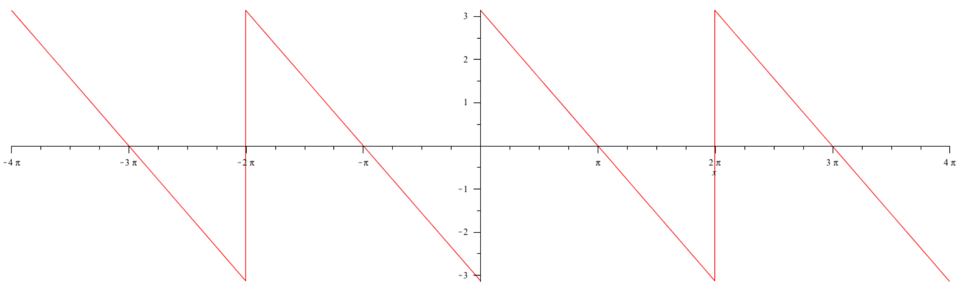


Aufgabe 5 (10 Punkte)**.** Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die 2π-periodische Funktion mit

$$f(x) = \pi - x \qquad \text{für } 0 \leq x < 2\pi.$$

(a) Skizzieren Sie den Graphen von f auf $\mathbb{R}$.
(b) Berechnen Sie die Fourierreihe von f.
(c) Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert die Fourierreihe? Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung
(a) [2 Punkte]



(b) [4 Punkte] Komplexe Fourierreihe von f:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}, \qquad c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx}\, dx.$$

Für $n \neq 0$ erhalten wir:

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \pi e^{-inx}\, dx - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x e^{-inx}\, dx \\ &= -\frac{1}{2\pi} \Big[\frac{-x e^{-inx}}{in} \Big|_0^{2\pi} + \frac{1}{in} \int_0^{2\pi} e^{-inx}\, dx \Big] \\ &= \frac{1}{ni} \end{aligned}$$

und $c_0 = 0$, weil f ungerade ist. Die Fourierreihe von f ist dann

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{ni} (e^{inx} - e^{-inx}) \\ &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}. \end{aligned}$$

Alternativ kann man direkt die Sinus/Cosinus Koeffizienten berechnen. Da f ungerade ist, sind alle Cosinus-Koeffizienten $a_n = 0$, und $b_n = \frac{2}{n}$.

(c) [4 Punkte] Da $f(x)$ für alle $0 < x < 2\pi$ differenzierbar ist, gilt laut dem Satz von Dirichlet:

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{\sin nx}{n} = f(x) \qquad \text{für } 0 < x < 2\pi.$$

Für $x = 0$ oder $x = 2\pi$ hingegen gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n} = 0.$$

Die Fourierreihe konvergiert also, aber nicht gegen $f(x)$.