Merkl

M2A: Analysis 2 für Mathematiker und Wirtschaftsmathematiker
Universität München – Sommer 2005

28 Mai 2005

Name, Vorname:								
Matrikelnummer:								
1	2	3	4	5	6	7	8	Σ

Schreiben Sie bitte Ihren Namen in Blockschrift auf jedes Blatt, einschließlich Deckblatt. Zugelassene Hilfsmittel: Schreibstift, aber kein Bleistift. Verboten sind insbesondere: eigenes Papier, Taschenrechner, Handy, Radiergummi, Tintenlöscher.

Bearbeiten Sie jede Aufgabe auf dem dafür vorgesehenen Blatt (Vor- und Rückseite). Wenn der Platz nicht reicht, stehen Ihnen am Ende der Klausur zwei leere Blätter zur Verfügung. Sollten Sie diese Blätter benötigen, vermerken Sie das bitte bei den betroffenen Aufgaben.

Sie haben 180 Minuten Zeit.

Wenn Sie den Hörsaal verlassen müssen und anschließend die Bearbeitung Ihrer Klausur fortsetzen möchten, wenden Sie sich bitte an die Aufsicht. Diese wird Ihre Aufgabenblätter verwahren und Sie nach draußen begleiten.

Viel Erfolg!

Aufgabe 1: [5 Punkte]
Berechnen Sie die Tangentialebene T an das Hyperboloid

$$H := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 |\ x^2 - 2xy + y^2 - z^2 - 2z + 2 = 0\}$$

im Punkt $(x_0, y_0, z_0) = (3, 2, 1)$. Schreiben Sie das Ergebnis in der Form $T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 |\ \alpha x + \beta y + \gamma z = \delta\}$.

Aufgabe 2: [6=2+4 Punkte]

a) Formulieren Sie die Kettenregel für Funktionen mehrerer Veränderlicher.

b) Von der differenzierbaren Funktion $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei bekannt:

$$g(2,1) = 1,\ \ D_1 g(2,1) = 2,\ \ D_2 g(2,1) = 3.$$

Berechnen Sie die Ableitung der Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = g(2x, g(2x, x^2))$ an der Stelle $x = 1$.

Aufgabe 3: [6 Punkte]
Zeigen Sie: Das Gleichungssystem

$$\begin{cases} \dfrac{1}{10(e^{x-y}+1)} = x, \\[2ex] \dfrac{1}{e^{x+y}+10} = y \end{cases}$$

besitzt genau eine Lösung $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Aufgabe 4: [6 Punkte]
Gegeben sei die Menge $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | \; 2x^2 + xy + y^2 + z^2 = 1\}$. Beweisen Sie: Die Funktion $f : M \to \mathbb{R}, \; f(x, y, z) = e^x - e^y + e^{x-y}$, nimmt sowohl ein Minimum als auch ein Maximum als Wert an.

Aufgabe 5: [6 Punkte]
Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$
\begin{aligned}
y_1' &= -y_1 + 2y_2, \quad y_1(0) = 3,\\
y_2' &= -4y_1 + 5y_2, \quad y_2(0) = 4.
\end{aligned}
$$

Aufgabe 6: [6=2+4 Punkte]

a) Definieren Sie für eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ die Aussage "f ist differenzierbar".

b) Zeigen Sie *direkt mit dieser Definition*, dass die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = (y^2 - x^2, x^2 + y^2),$$

differenzierbar ist, und bestimmen Sie die Ableitung Df.

Aufgabe 7: [7 Punkte]

a) Formulieren Sie eine Version des Satzes von Picard-Lindelöf.

b) Beweisen Sie: Das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y(0) = 1 \\ y' = \dfrac{1}{2}\cos(xy), \quad 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

besitzt genau eine Lösung $y \in \mathcal{C}[0,1]$.

Aufgabe 8: (∗) [8 Punkte]
Finden Sie $\lambda \in \mathbb{R}$ und $E \in \mathbb{R}$ so, dass die Funktion

$$\psi : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, \;\; \psi(x) = \exp\{-\lambda ||x||_2\}$$

die partielle Differentialgleichung

$$-\frac{1}{2}\triangle\psi(x) - \frac{1}{||x||_2}\psi(x) = E\psi(x), \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$$

löst.