Merkl

A

M2A: Analysis 2 für Mathematiker und Wirtschaftsmathematiker
Universität München – Sommer 2005

30 April 2005

Name, Vorname: Friedman, Oliver

Matrikelnummer:

1	2	3	4	5	6	7	8	Σ
6	7+	6+	7	5	4-	9	1	45

Schreiben Sie bitte Ihren Namen in Blockschrift auf jedes Blatt, einschließlich Deckblatt.

Bearbeiten Sie jede Aufgabe auf dem dafür vorgesehenen Blatt (Vor- und Rückseite). Wenn der Platz nicht reicht, stehen Ihnen am Ende der Klausur zwei leere Blätter zur Verfügung. Sollten Sie diese Blätter benötigen, vermerken Sie das bitte bei den betroffenen Aufgaben.

Sie haben 180 Minuten Zeit.

Wenn Sie den Hörsaal verlassen müssen und anschließend die Bearbeitung Ihrer Klausur fortsetzen möchten, wenden Sie sich bitte an die Aufsicht. Diese wird Ihre Aufgabenblätter verwahren und Sie nach draußen begleiten.

Viel Erfolg!

Friehm

Aufgabe 1: [6 =2+4 Punkte]

Seien (A, d_A), (B, d_B) zwei metrische Räume und $T : A \to B$ eine Abbildung.

a) Definieren Sie die Aussage: T ist stetig.

b) Seien $A = \mathcal{C}[0,1]$, $d_A(f,g) = ||f-g||_\infty$ und $B = \mathbb{R}$, $d_B(x,y) = |x-y|$. Zeigen Sie, daß die Abbildung $T : A \to B$, $T(f) = f(0)$ stetig ist.

a.) $\forall x \in A\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall y \in A: \cancel{\forall}\ d_A(x,y) < \delta \Rightarrow d_B(\cancel{f(x)}\ T(x), T(y)) < \varepsilon.$

b.) Es ist also z.z.: $\forall f \in \mathcal{C}[0,1]\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall g \in \mathcal{C}[0,1]: ||f-g||_\infty < \delta \Rightarrow \underbrace{|T(f)-T(g)| < \varepsilon}_{\hat{=}\ |f(0)-g(0)| <}$

Sei also $f \in \mathcal{C}[0,1]$ und $\varepsilon > 0$. Dann wählen wir $\delta := \varepsilon$. ~~Da gilt~~ Sei weiter $g \in \mathcal{C}[0,1]$ mit $||f-g||_\infty < \delta$. Wir haben z.z. $|f(0)-g(0)| < \varepsilon$.
Da $||f-g||_\infty < \delta$ gilt: $\max\{|f(x)-g(x)| \mid x \in [0,1]\} < \delta$, d.h. $\forall x \in [0,1]: |f(x)-g(x)| < \delta$.
Also auch für $x=0$. D.g. $|f(0)-g(0)| < \delta = \varepsilon$ $\square$.

Fischer

Aufgabe 2: [7=2+5 Punkte]

a) Formulieren Sie den Banachschen Fixpunktsatz.

b) Man zeige: Das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \frac{1}{10}\sin(x+y) &= x \\ \frac{1}{10}\cos(x+y) &= y \end{aligned}$$

besitzt genau eine Lösung (x, y) in $\mathbb{R}^2$.

a) Sei (M,d) ein vollst., nichtleerer metr. Raum. Sei $f: M \to M$ eine Abbildung, und zudem eine Kontraktion, d.h. $\exists L \in [0,1[\ \forall x,y \in M: d(f(x),f(y)) \leq L \cdot d(x,y)$. Dann besitzt die Fixpunktgleichung $f(x^*) = x^*$ genau eine Lösung. Für einen bel. Startwert $x_0 \in M$ und $x_{n+1} = f(x_n)$ konvergiert x_n für $n \to \infty$ gegen x^*, und es gilt $\forall n \in \mathbb{N}: d(x^*, x_n) \leq \frac{L^n}{1-L} \cdot d(x_0, x_1)$.

2+ P

b.) Wir betrachten die Funktion $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $F(x,y) = \left(\frac{1}{10}\sin(x+y), \frac{1}{10}\cos(x,y)\right)$.
Wir zeigen sodann, dass F bezügl. $\|\cdot\|_\infty$ auf $\mathbb{R}^2$ (vollst.) eine Kontraktion ist, und wenden den Fixpunktsatz an, d.h. $\exists (x',y') \in \mathbb{R}^2$ mit $F(x',y') = (x',y')$, d.h. $\frac{1}{10}\sin(x',y') = x' \wedge \frac{1}{10}\cos(x',y') = y'$.
Wir haben also z.z.: $\exists L \in [0,1[\ \forall (x,y),(x',y') \in \mathbb{R}^2: \|F(x,y) - F(x',y')\|_\infty \leq L \cdot \|(x,y)-(x',y')\|_\infty$

$\|F(x,y) - F(x',y')\|_2^2 = \left(\frac{1}{10}(\sin(x+y) - \sin(x'+y'))\right)^2 + \left(\frac{1}{10}(\cos(x+y) - \cos(x'+y'))\right)^2 =$
$= \frac{1}{100}\left(\sin^2(x+y) - 2\sin(x+y)\sin(x'+y') + \sin^2(x'+y') + \cos^2(x+y) - 2\cos(x+y)\cos(x'+y') + \cos^2(x'+y')\right) =$
$= \frac{1}{100}\left(2 - 2\left(\sin(x+y)\sin(x'+y') + \cos(x+y)\cos(x'+y')\right)\right) = \frac{1}{50} - \frac{1}{50}(\ldots) \leq \frac{1}{50} - \frac{1}{50}(\sin(x+y)$

→

$\|F(x,y)-F(x',y')\|_\infty = \|(\frac{1}{10}(\sin(x+y)-\sin(x'+y')), \frac{1}{10}(\cos(x+y)-\cos(x'+y')))\|_\infty =$

$= \frac{1}{10}\cdot\|\sin(x+y)-(\sin(x+y)+r_s), \cos(x+y)-(\cos(x+y)+r_c)\|_\infty = \frac{1}{10}\cdot\|r_s, r_c\|_\infty = \frac{1}{10}\cdot\max\{|r_s|,|r_c|\}$

$|r_s| = \cancel{\cos}\,|\sin(x'+y')-\sin(x+y)| \le |x'+y'-(x+y)|$, da $|\sin(a+x)-\sin(a)| \le |x|$. $(\sin'(x)\le x')$

Ebenso: $|r_c| = |\cos(x'+y')-\cos(x+y)| \le |x'+y'-(x+y)|$, da $|\cos(a+x)-\cos(a)| \le |x|$. $(\cos'(x)\le x')$

etwas unscharf, aber richtige Id

$\Rightarrow \frac{1}{10}\cdot\max\{|r_s|,|r_c|\} \le \frac{1}{10}\cdot|x-x'+y-y'| \le \frac{1}{10}\cdot(|x-x'|+|y-y'|) \le \frac{1}{10}\,2\max\{|x-x'|,|y-y'|\} =$

$= \frac{2}{10}\cdot\|(x,y)-(x',y')\|_\infty \le \frac{1}{2}\cdot\|(x,y)-(x',y')\|.$ $\Rightarrow L=\frac{1}{2}.$ (z.B.).

ja! Die erste richtige Lösung (dieser Aufgabe), die ich sehe!

S. P

Fährmann

Aufgabe 3: [6=2+4 Punkte]

a) Definieren Sie den Begriff Semimetrik.

b) Sei $d : \mathbb{R}^{2 \times \mathbb{R}^2} \to \mathbb{R}$ definiert durch $d(x,y) := |x_2 - y_2|$, wobei $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$. Zeigen Sie, daß d eine Semimetrik auf $\mathbb{R}^2$ ist, und begründen Sie, warum d keine Metrik ist.

a.) Sei M die Menge und $d: M \times M \to \mathbb{R}$ die Abbildung. d heisst Semimetrik wenn $\forall x,y,z \in M$ gilt:

(1) $d(x,y) \geq 0$ (2) $d(x,y) = d(y,x)$ (3) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ (4) $d(x,x) = 0$

2 P

b.) (1) $d(x,y) = |x_2 - y_2| \geq 0$, da $|\cdot| \geq 0$.

(2) $d(x,y) = |x_2 - y_2| = |y_2 - x_2| = d(y,x)$

(3) $d(x,z) = |x_2 - z_2| \leq |x_2 - y_2| + |y_2 - z_2| = d(x,y) + d(y,z)$

(4) $d(x,x) = |x_2 - x_2| = 0$

Annahme: d ist Metrik. D.g. $\forall x,y \in \mathbb{R}^2$: $d(x,y) = 0 \Rightarrow x = y$.
Sei also $x,y \in \mathbb{R}^2$ mit $x = (1,0)$ und $y = (2,0)$, d.h. $x \neq y$. D.g.
$d(x,y) = |x_2 - y_2| = |0 - 0| = 0$ ↯ $\Rightarrow$ d ist nicht Metrik

4 P

Friedmann

Aufgabe 4: [7=2+5 Punkte]

a) Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge auf einem metrischen Raum (M,d). Definieren Sie: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Cauchy-Folge.

b) Wir betrachten für $n\in\mathbb{N}^*$ die Funktionen

$$f_n:[-1,1]\to\mathbb{R}\,,\ f_n(x):=\begin{cases}0\,, \text{falls } -1\le x<0\\ x^{\frac{1}{n}}\,, \text{falls } 0\le x\le 1\end{cases}$$

Zeigen Sie, daß $(f_n)_{n\ge 1}$ eine Cauchy-Folge in $(\mathcal{C}[-1,1],\|\cdot\|_1)$ ist.

a.) Sei (M,d) ein metr. Raum und $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine ~~Cauchy-Folge~~ Folge mit Werten in M. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Cauchy-Folge wenn gilt:
$\forall \varepsilon>0\ \exists n\in\mathbb{N}\ \forall k,l>n: d(a_k,a_l)<\varepsilon$. ✓

b.) z.z. $\forall\varepsilon>0\ \exists n\in\mathbb{N}\ \forall k,l>n: \|f_k-f_l\|_1<\varepsilon$

$$\Leftrightarrow \int_{-1}^{1}|f_k(x)-f_l(x)|\,dx<\varepsilon$$ ✓

Da $f_n(x)=0$ für $x<0$ und alle $n\in\mathbb{N}$ ~~gilt~~ ist $\int_{-1}^{0}|f_k(x)-f_l(x)|\,dx=0$ für alle k,l. ✓
Es genügt z.z.: $\int_0^1|f_k(x)-f_l(x)|\,dx<\varepsilon$, d.h. $\int_0^1|x^{1/k}-x^{1/l}|\,dx<\varepsilon$ (*) ✓
~~Vorbetrachtung: Sei k ∀ k,l ist Max ... $x^{1/k}$~~
Da zw. 0 und 1 $x^{1/k}-x^{1/l}$ entweder immer positiv oder immer negativ ist, gilt: $\int_0^1|x^{1/k}-x^{1/l}|\,dx=\left|\int_0^1 x^{1/k}-x^{1/l}\,dx\right|=\left|\left[\frac{x^{1/k+1}}{1+1/k}-\frac{x^{1/l+1}}{1+1/l}\right]_0^1\right|=$

$$=\left|\left(\frac{1^{1/k+1}}{1+1/k}-\frac{1^{1/l+1}}{1+1/l}\right)-\left(\frac{0}{..}-\frac{0}{..}\right)\right|=\left|\frac{1}{1+1/k}-\frac{1}{1+1/l}\right|=\left|\frac{1}{\frac{k+1}{k}}-\frac{1}{\frac{l+1}{l}}\right|=\left|\frac{k}{k+1}-\frac{l}{l+1}\right|=$$

$$=\left|\frac{k+1-1}{k+1}-\frac{l+1-1}{l+1}\right|=\left|1-\frac{1}{k+1}-\left(1-\frac{1}{l+1}\right)\right|=\left|\frac{1}{l+1}-\frac{1}{k+1}\right|$$

Sei also $\varepsilon>0$. D.o. ein $m\in\mathbb{N}^*$ mit $\frac{1}{m}<\varepsilon$. Seien also $k,l>m$. D.g.

$$d(a_k,a_l)=\left|\frac{1}{l+1}-\frac{1}{k+1}\right|\le\frac{1}{\max\{l,k\}+1}\le\frac{1}{\max\{l,k\}}<\frac{1}{m}$$ ✓ ☑

Fritzum

Aufgabe 5: [5 Punkte]
Sei $y^t = (1,2,3)$ und $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x) = y^t x$. Zeigen Sie, daß

$$A := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid f(x) \le 0\}$$

der Abschluß der Menge

$$B := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid f(x) < 0\}$$

bezüglich der Standardtopologie auf $\mathbb{R}^3$ ist.

Z.z. $A = \overline{B}$, dazu zeigen wir, dass $\overline{B} \overset{zz}{=} \cancel{Bu}\ B \cup C \overset{\checkmark}{=} A$ mit $C = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid f(x) = 0\}$. ✓

$D = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid f(x) > 0\}$, $\mathbb{R}^3 = B \cup C \cup D$. Wir arbeiten mit $\|\cdot\|_\infty$. ✓

(1). Sei $x \in B$, d.h. $f(x) < 0$. Sei $\varepsilon > 0$. Dann ist $U_\varepsilon^{\|\cdot\|_\infty}(x) \cap B \neq \emptyset$, da $x \in U_\varepsilon^{\|\cdot\|_\infty}(x)$, d.h. x ist Berührpunkt von $B \Rightarrow B \subseteq \overline{B}$. ✓ ($B \subset \overline{B}$ gilt automatisch)

(2) Sei $x \in C$, d.h. $f(x) < 0$, d.h. $y^t x = 0$, d.h. ~~x+2y+3z=0~~ $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0$.
Sei $\varepsilon > 0$. Z.z.: $U_\varepsilon^{\|\cdot\|_\infty}(x) \cap B \neq \emptyset$. Wir betrachten dazu $z^t = (x_1 - \frac{\varepsilon}{2}, x_2, x_3)$.
Dann ist $f(z) = x_1 - \frac{\varepsilon}{2} + 2x_2 + 3x_3 = f(x) - \frac{\varepsilon}{2} = -\frac{\varepsilon}{2} < 0$, d.h. $z \in B$.
Außerdem gilt: $\|z - x\|_\infty = \|(x_1 - \frac{\varepsilon}{2}, x_2, x_3)^t - (x_1, x_2, x_3)^t\|_\infty = \|(-\frac{\varepsilon}{2}, 0, 0)^t\|_\infty = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$, d.h.
$z \in U_\varepsilon^{\|\cdot\|_\infty}(x) \Rightarrow U_\varepsilon^{\|\cdot\|_\infty}(x) \cap B \neq \emptyset \Rightarrow C \subseteq \overline{B}$. ✓ damit haben Sie $A \subset \overline{B}$.

3) Sei $x \in D$, d.h. $f(x) > 0$. Z.z. $\exists \varepsilon > 0 : U_\varepsilon^{\|\cdot\|_\infty}(x) \cap B = \emptyset$. Sei also $f(x) > 0$. ~~Wir wählen~~
~~$\varepsilon < \frac{1}{\sqrt{2}} f(x)$. Sei nun $z \in B$ beliebig, d.h. $f(z) < 0$. D.g.~~
~~$\|(x_1, x_2, x_3)^t - (z_1, z_2, z_3)^t\|_\infty$~~ $= \|(x_1 - z_1, x_2 - z_2, x_3 - z_3)^t\|_\infty$ ~~$= |x_1 - z_1| + |x_2 - z_2| + |x_3 - z_3|$~~
~~Sei $\|(x_1 - z_1, x_2 - z_2, x_3 - z_3)^t\|_\infty$~~ $= |x_1 - z_1|$ und $x_1 \geq z_1$. D.g. $x_1 > -2x_2 - 3x_3 \wedge -z_1 > 2z_2 + 3z_3$,
~~d.h. $x_1 - z_1 > 2z_2 + 3z_3 - 2x_2 - 3x_3$ (=) f(x).~~
~~Wir wählen $\varepsilon = \min\{|x_1|, |x_2|, |x_3|\}$~~. D.g. ~~(1) Falls Sei (1) $\|x - y\|_\infty = |x_1 - z_1|$. Falls~~
~~$z_1 \neq 0$ ist $|x_1 - z_1| > \varepsilon \Rightarrow z \notin U_\varepsilon(x)$. Falls~~ $z_1 > 0$,
Wir wählen $\varepsilon = \min\{|x_1|, |x_2|, |x_3|\}$. Sei nun $z \in B$ beliebig, d.h. $f(z) < 0$. D.g.
→ Rückseite

Frühm

Aufgabe 6: [4 Punkte]
Zeigen Sie: Die Menge

$$A := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x^3y + 2xyz^2 + 2y^2 + 3 = 0,\ xy^3 + 3xz + x^3 = 0\}$$

ist abgeschlossen bezüglich der Standardtopologie auf $\mathbb{R}^3$.

Wir zeigen $\mathbb{R}^3 \setminus A$ ist offen. Sei also $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \setminus A$, d.h. $f(x,y,z) \neq 0$ und $g(x,y,z) \neq 0$ mit $f(x,y,z) = 3x^3y + 2xyz^2 + 2y^2 + 3$ und $g(x,y,z) = xy^3 + 3xz + x^3$.
Wie bereits i.d. Vorlesung gezeigt, sind f und g bezügl. der Standardtop. stetig; seien $g(x,y,z) > 0$ und $f(x,y,z) > 0$ (die anderen 3 Fälle analog), mit ~~Da f stetig~~ $g(x,y,z) = \varepsilon_g$ und $f(x,y,z) = \varepsilon_f$. Da f stetig gibt es ein δ_f, sodass $\forall (x',y',z') \in \mathbb{R}^3$ mit ~~[illegible]~~ $(x',y',z') \in U^{\|\cdot\|}_{\delta_f}(x,y,z)$ gilt: $|f(x,y,z) - f(x',y',z')| < \frac{\varepsilon_f}{2}$. Dann ist $f(x',y',z') > 0$. Analog dazu gibt es δ_g mit $\forall (x',y',z') \in \mathbb{R}^3$ und $(x',y',z') \in U^{\|\cdot\|}_{\delta_g}((x,y,z))$ sodass $g(x',y',z') > 0$.
$\Rightarrow U^{\|\cdot\|}_{\min\{\delta_f, \delta_g\}}(x,y,z) \subseteq \mathbb{R}^3 \setminus A$. $\Rightarrow \mathbb{R}^3 \setminus A$ offen $\Rightarrow A$ abgeschlossen.

Ziemlich umständlich, aber richtig.

Einfacher:

$\{0\} \subseteq \mathbb{R}$ abg., f, g stetig $\Rightarrow f^{-1}[\{0\}], g^{-1}[\{0\}]$ abg. $\Rightarrow A = f^{-1}[\{0\}] \cap g^{-1}[\{0\}]$ abg.

4 − 1

Weil umständlich.

Sei $\|x-y\|_\infty = |x_i - z_i|$.

(1) $z_i < 0 \Rightarrow |x_i - z_i| > |x_i| \geq \varepsilon \Rightarrow z \notin U_\varepsilon(x)$.

(2) $z_i > 0$: Da $f(z) < 0$ $\exists\, j \neq i$ mit $z_j < 0$. O.B.d.A. $|x_i - z_i| \geq |x_j - z_j| > |x_j| \geq \varepsilon \Rightarrow z \notin U_\varepsilon(x)$

$\Rightarrow D \cap \overline{B} = \emptyset$ ✓ $\Rightarrow$ $\overline{B} \subset A$

$\Rightarrow \overline{D} = B \cap C = A$ ✓

gut!

5/5

Frühm

Aufgabe 7: [11=2+5+4 Punkte]

a) Definieren Sie den Begriff der Seminorm.

b) Sei

$$B := \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, daß

$$||x|| := \sqrt{x^t B x}$$

eine Seminorm auf $\mathbb{R}^2$ definiert.

c) (∗) Man zeige, daß die von $\|.\|$ induzierte Topologie *nicht* die Standardtopologie auf $\mathbb{R}^2$ ist.

a.) Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum und $\|\cdot\|: V \to \mathbb{R}$ eine Abbildung. $\|\cdot\|$ heisst Seminorm, wenn gilt:

2 (1) $\forall x \in V: \|x\| \geq 0$. ✓ (2) $\forall \alpha \in \mathbb{R}\ \forall x \in V: \|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$. ✓ (3) $\forall x, z \in V: \|x+z\| \leq \|x\| + \|z\|$. ✓

b.) $x^t B x = (x_1, x_2) \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = (x_1, x_2) \cdot \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ -x_1 + x_2 \end{pmatrix} = x_1(x_1 - x_2) + x_2(-x_1 + x_2) = (x_1 - x_2) \cdot (x_1 - x_2) = (x_1 - x_2)^2.$

5

$\Rightarrow \|x\| = \sqrt{x^t B x} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2} = \underline{|x_1 - x_2|}$ ✓

(1) Sei $x \in V$. D.g. $\|x\| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2} = |x_1 - x_2| \geq 0$

(2) Sei $\alpha \in \mathbb{R}, x \in V$. D.g. $\|\alpha x\| = |\alpha x_1 - \alpha x_2| = |\alpha| |x_1 - x_2| = |\alpha| \cdot \|x\|$.

(3) Seien $x, z \in V$: $\|x + z\| = |(x_1 + z_1) - (x_2 + z_2)| =$
$= |x_1 - x_2 + z_1 - z_2| \leq |x_1 - x_2| + |z_1 - z_2| = \|x\| + \|z\|$. ✓

2 c.) ~~Sei $(\mathbb{R}^2, T_{\|\cdot\|_\infty})$ und $A \in T_{\|\cdot\|_\infty}$. Dann ex. $\varepsilon > 0$, dass ... Sei ... eine $\varepsilon > 0$, ... $U_\varepsilon^{\|\cdot\|_\infty}(x) \subseteq A$. Sei U offen in $T_{\|\cdot\|}$, d.h.~~

$U_1^{\|\cdot\|_\infty}\left(\begin{pmatrix} 10 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ ist offen in $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$. Wir zeigen:

$\forall \delta > 0: U_\delta^{\|\cdot\|}\left(\begin{pmatrix} 10 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \not\subseteq U_1^{\|\cdot\|_\infty}\begin{pmatrix} 10 \\ 0 \end{pmatrix}$ d.h. die Menge ist nicht offen in $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|)$.

Sei also $\delta > 0$. Dann ist $\begin{pmatrix} 0 \\ -10 \end{pmatrix} \in U_\delta^{\|\cdot\|}\left(\begin{pmatrix} 10 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$, da $\|(10,0)^t - (0,-10)^t\|$
$= \|(10, 10)^t\| = |10 + 10| \neq 0 < \delta$ ↯ die Idee war aber gut

Aber: $\|(10,0)^t - (0,-10)^t\|_\infty = \|(10,10)^t\|_\infty = 10 > 1 \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ -10 \end{pmatrix} \notin U_1^{\|\cdot\|_\infty}\begin{pmatrix} 10 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ $U_1^{\|\cdot\|_\infty}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist nicht offen in $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|)$

Fröhlich

Aufgabe 8: [4 Punkte]
(*) Für $1 < p < r < +\infty$ seien $R := (\mathcal{C}[0,1], \|.\|_r)$ und $P := (\mathcal{C}[0,1], \|.\|_p)$. Zeigen Sie, daß die Identität

$$\mathrm{Id} : R \to P\,,\ \mathrm{Id}(f) = f$$

stetig ist.

z.z. ~~Ak~~ $\forall f \in \mathcal{C}[0,1]\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall g \in \mathcal{C}[0,1] : \|f-g\|_r < \delta \Rightarrow \|f-g\|_p < \varepsilon$ ✓

1/4