1. *(10=2+3+2+3 Punkte)* Gegeben seien die folgende Differentialform ω über der Ebene $\mathbb{R}^2$:

$$\omega_{(x,y)} = 4x^3y^3\,dx + 3x^4y^2\,dy, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2 \tag{1}$$

und die parametrisierte Kurve $k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $k(t) = (t^3, t^4)$.

   (a) Welchen Typ hat der Rückzug $k^*\omega$? Genauer gesagt: Welche Mengen sind der Definitionsbereich A und der Zielbereich B der Abbildung $k^*\omega : A \to B$?

   (b) Berechnen Sie den Rückzug $k^*\omega$.

   (c) Berechnen Sie das Kurvenintegral $\int_c \omega$, wobei $c : [0,1] \to \mathbb{R}^2$, $c(t) = (t^3, t^4)$ die Einschränkung von k auf das Einheitsintervall bezeichnet.

   (d) Entscheiden Sie, ob ω exakt ist, und begründen Sie Ihre Entscheidung.

2. *(10 Punkte)* Der $\mathbb{R}$–Vektorraum $U := C([0,\pi], \mathbb{R})$ aller stetigen Funktionen $f : [0,\pi] \to \mathbb{R}$ werde mit der Maximumsnorm $\|\cdot\|_\infty : U \to \mathbb{R}$, $\|f\|_\infty := \max_{x\in[0,\pi]} |f(x)|$ versehen. Beweisen Sie, dass der von den Funktionen $a_n : [0,\pi] \to \mathbb{R}$, $a_n(x) = \cos(nx)$ mit $n \in \mathbb{N}_0$ aufgespannte Untervektorraum

$$V := \left\{ \sum_{n=0}^{k} c_n a_n \;\middle|\; k \in \mathbb{N}_0,\ c_n \in \mathbb{R} \text{ für } n = 0, \ldots, k \right\} \tag{2}$$

dicht in $(U, \|\cdot\|_\infty)$ ist.

3. *(10= 1+9 Punkte)* Gegeben seien drei Banachräume $(U, \|\cdot\|_U)$, $(V, \|\cdot\|_V)$ und $(W, \|\cdot\|_W)$ sowie zwei zweimal stetig differenzierbare Funktionen $f : U \to V$ und $g : V \to W$.

   (a) Welchen Typ hat die zweite Ableitung $d^2f = d(df)$, also die Ableitung der Ableitung von f? Mit anderen Worten gesagt: Welche Mengen A, B sind der Definitionsbereich A bzw. der Zielbereich B der zweiten Ableitung
   $d^2f : A \to B$?

   (b) Drücken Sie die zweite Ableitung $d^2(g \circ f)$ der Komposition $g \circ f$ mit Hilfe der ersten und zweiten Ableitungen df, dg, d^2f und d^2g aus. Begründen Sie Ihr Ergebnis mit einer Rechnung.
   Variante: Wenn Sie eine vereinfachte Variante dieser Teilaufgabe bearbeiten wollen, nehmen Sie den Spezialfall $U = \mathbb{R}^m$, $V = \mathbb{R}^n$, $W = \mathbb{R}$, also $f = (f_1, \ldots, f_n) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit $m, n \in \mathbb{N}$ und drücken Sie die Hessematrix $D^2(g \circ f)$ mit Hilfe der ersten und zweiten partiellen Ableitungen von g und den f_j, $j = 1, \ldots, n$, aus. Wenn Sie nur diesen Spezialfall bearbeiten, sind noch 7 der 9 Punkte dieser Teilaufgabe erreichbar.

4. *(10 Punkte)* Beweisen Sie, dass es genau eine beschränkte stetig differenzierbare Funktion $x :]-1,1[\to \mathbb{R}$ gibt, die die folgenden Gleichungen für alle $t \in]-1,1[$ erfüllt:

$$x(0) = 2, \tag{3}$$

$$\frac{d}{dt}x(t) = \sin\left(\frac{t}{3} \cdot \left(x\left(\frac{t}{3}\right) + x\left(\frac{2t}{3}\right)\right)\right) \tag{4}$$

Bitte wenden!

5. *(10=6+4 Punkte)* Gegeben sei das von zwei Parametern $a, b \in \mathbb{R}$ abhängige Gleichungssystem

$$x^2y^4 + axy^3 + by^2 = 1, \tag{5}$$

$$x^4y^3 + ax^2 + bxy = 1 \tag{6}$$

für zwei Unbekannte x, y. Für $a = b = 0$ ist $x = y = 1$ eine Lösung dieses Gleichungssystems.

(a) Beweisen Sie, dass es eine offene Umgebung V des Nullpunkts $(0,0) \in \mathbb{R}^2$ und zwei stetig differenzierbare Funktionen $X, Y : V \to \mathbb{R}$ mit

$$X(0,0) = 1, \qquad Y(0,0) = 1 \tag{7}$$

gibt, so dass für alle $(a, b) \in V$ durch $x = X(a, b)$, $y = Y(a, b)$ eine Lösung des Gleichungssystems (5)–(6) gegeben wird.

(b) Berechnen Sie für so eine Funktion Y die partielle Ableitung $D_2Y(0,0)$.

6. *(10=5+5 Punkte)*

(a) Gegeben $n \in \mathbb{N}$, seien M eine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$ und $a \in \mathbb{R}^n \setminus M$ ein Punkt, der nicht auf M liegt. Wir versehen $\mathbb{R}^n$ mit der euklidischen Metrik $d(x, y) = \|x - y\|_2$, $x, y \in \mathbb{R}^n$. Beweisen Sie: Ist $b \in M$ ein Punkt mit kürzestem Abstand von a, d.h. gilt $d(b, a) \leq d(x, a)$ für alle $x \in M$, so ist $b - a$ orthogonal zum Tangentialraum T_bM von M in b, d.h. für alle $y \in T_bM$ gilt $\langle b - a, y \rangle = 0$. Hierbei bezeichnet $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das euklidische Skalarprodukt.

(b) Nun sei $M = S^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 | \; \|x\|_2 = 1\}$ die Einheitssphäre in $\mathbb{R}^3$ und $a = (1, 4, 8)$. Beweisen Sie, dass es genau einen Punkt $b \in M$ mit kürzestem Abstand von a gibt, und berechnen Sie dessen Koordinaten.