Wintersemester 2017 München, den 4.10.2017

Nachklausuraufgaben zur "Topologie und Differentialrechnung mehrerer Variablen"

Prof. Dr. F. Merkl

1. (8=3+3+2 Punkte)

   (a) Gegeben seien zwei metrische Räume (A, d_A) und (B, d_B) sowie eine Abbildung $f : A \to B$. Charakterisieren Sie die Aussage "$f : (A, d_A) \to (B, d_B)$ ist stetig" auf drei verschiedene äquivalente Weisen.

   (b) Gegeben sei die Menge $A = \{(w, z) \in \mathbb{C}^2 |\ |w| + |z| + \operatorname{Im} z \leq 1\}$. Beweisen Sie, dass A abgeschlossen in $\mathbb{C}^2$ ist.

   (c) Ist A kompakt? Beweisen Sie Ihre Antwort.

2. (8=1+4+3 Punkte)

   (a) Formulieren Sie den Banachschen Fixpunktsatz, inklusive einer a-priori-Abschätzung und einer a-posteriori-Abschätzung für das zugrundeliegende Iterationsverfahren.

   (b) Durch die Rekursionsvorschrift

$$x_0 = 0, \quad x_{n+1} = \frac{1}{e^{x_n} + 1} \text{ für } n \in \mathbb{N}_0 \tag{1}$$

   wird eine reellwertige Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ definiert. Beweisen Sie, dass diese Folge in $\mathbb{R}$ konvergiert.

   (c) Es sei $x^* = \lim_{n \to \infty} x_n$. Geben Sie eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}_0$ explizit an, für die $|x_n - x^*| < 1/100$ gilt. Begründen Sie Ihre Antwort.

3. (8=1+7 Punkte)

   (a) Formulieren Sie eine Version der Kettenregel für Funktionen mehrerer Variablen, inklusive ihrer Voraussetzungen.

   (b) Gegeben seien zwei stetig differenzierbare Abbildungen $u, v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, die die partiellen Differentialgleichungen $D_1 u = D_2 v$ und $D_2 u = -D_1 v$ erfüllen. Weiter seien gegeben:

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x, y) = e^{u(x,y)} \cos(v(x, y)), \tag{2}$$

$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad g(x, y) = e^{u(x,y)} \sin(v(x, y)). \tag{3}$$

   Beweisen Sie, dass f und g die partielle Differentialgleichung $D_1 f = D_2 g$ erfüllen.
   Bemerkung: Es gilt auch $D_2 f = -D_1 g$, doch das sollen Sie nicht zeigen.

4. (8=3+2+1+2 Punkte) Gegeben seien eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ und eine reelle Zahl $p > 1$. Es bezeichne

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n |\ \|x\|_p = 1\} \tag{4}$$

   die Einheitssphäre bezüglich der p-Norm $\| \cdot \|_p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

   (a) Zeigen Sie, dass S eine C^1-Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$ ist.

   (b) Nun sei $x = (x_1, \ldots, x_n) \in S$ gegeben. Geben Sie ein $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ mit

$$x + T_x S = \{z \in \mathbb{R}^n |\ \langle y, z \rangle = 1\} \tag{5}$$

   explizit an. Begründen Sie Ihr Ergebnis.
   Notationen: $x + T_x S$ bezeichnet den affinen Tangentialraum von S in x, also das Bild des Tangentialraums $T_x S$ unter der Verschiebung um den Vektor x. Insbesondere gilt $x \in x + T_x S$. Die Abbildung $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\langle (a_1, \ldots, a_n), (b_1, \ldots, b_n) \rangle = \sum_{j=1}^n a_j b_j$ bezeichnet das Standardskalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$.

   (c) Formulieren Sie eine Version der Hölderschen Ungleichung.

   (d) Beweisen Sie für das in Teilaufgabe (b) gefundene $y \in \mathbb{R}^n$ und alle $z \in S$:

$$\langle y, z \rangle \leq 1. \tag{6}$$

Bitte wenden!

5. (8=2+2+4 Punkte)

   (a) Formulieren Sie eine Version des Satzes von den impliziten Funktionen.

   (b) Es sei $n \in \mathbb{N}$. Für $b = (b_0, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ bezeichne

$$p_b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad p_b(x) = \sum_{j=0}^{n} b_j x^j \tag{7}$$

   die Polynomabbildung mit den Koeffizienten $b_0, \dots, b_n$. Nun seien $a \in \mathbb{R}^{n+1}$ und eine *einfache* Nullstelle $z \in \mathbb{R}$ von p_a gegeben. Zeigen Sie, dass es eine offene Umgebung $U \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ von $a \in \mathbb{R}^{n+1}$ und eine glatte Abbildung $N : U \to \mathbb{R}$ mit $N(a) = z$ und $p_b(N(b)) = 0$ für alle $b \in U$ gibt.

   (c) Berechnen Sie die Jacobimatrix $DN(a)$ der Abbildung N aus Teilaufgabe (b) an der Stelle a.

6. (8=1+4+3 Punkte)

   (a) Gegeben seien eine glatte Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, und ein Punkt $a \in \mathbb{R}^n$. Definieren Sie, wann a ein stationärer Punkt von f genannt wird.

   (b) Nun sei speziell $n = 2$ und

$$f(x, y) = \cosh(x - y) + (\cosh(x + y) - \cosh 2)^2 \tag{8}$$

   für $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Bestimmen Sie alle stationären Punkte von f.

   (c) Entscheiden Sie mit Begründung, ob $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$ ein lokales Maximum von f, ein lokales Minimum von f oder keines von beiden ist.

Dieses Aufgabenblatt dürfen Sie behalten.