Sommersemester 2017 München, den 12.8.2017

Klausuraufgaben zur "Topologie und Differentialrechnung mehrerer Variablen"

Prof. Dr. F. Merkl

1. (5=1+4 Punkte) Gegeben seien ein metrischer Raum (M, d) und eine Folge $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit Werten in M.

   (a) Definieren Sie, wann die Folge a eine Cauchyfolge in (M, d) genannt wird.

   (b) Nun sei zusätzlich bekannt: $d(a_n, a_{n+1}) \leq n^{-2}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Beweisen Sie, dass a eine Cauchyfolge in (M, d) ist.

2. (9=1+8 Punkte)

   (a) Formulieren Sie eine Version der Kettenregel für Funktionen mehrerer Variablen, inklusive ihrer Voraussetzungen.

   (b) Gegeben seien glatte Funktionen $F_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $F_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sowie zwei reelle Zahlen a und b. Es gelte für alle $j \in \{1, 2\}$ und alle $x, y \in \mathbb{R}$:

$$D_1 D_1 F_j(x, y) + p(x) D_1 F_j(x, y) + q(x) F_j(x, y) = 0, \tag{1}$$

$$F_1(x, x) = F_2(x, x), \tag{2}$$

$$D_1 F_1(x, x) - D_1 F_2(x, x) = 1. \tag{3}$$

   Hierbei bezeichnet D_1 die partielle Ableitung nach dem ersten Argument. Weiter gelte für alle $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = \int_a^x F_1(x, y) h(y)\, dy + \int_x^b F_2(x, y) h(y)\, dy$$

   Beweisen Sie, dass die Funktion f für alle $x \in \mathbb{R}$ die folgende Differentialgleichung erfüllt:

$$f''(x) + p(x) f'(x) + q(x) f(x) = h(x) \tag{4}$$

3. (9=3+3+3 Punkte)

   (a) Gegeben seien zwei metrische Räume (M, d_M) und (N, d_N) sowie eine Abbildung $f : M \to N$. Charakterisieren Sie die Aussage "$f : (M, d_M) \to (N, d_N)$ ist stetig" auf drei verschiedene äquivalente Weisen.

   (b) Zeigen Sie, dass die lineare Abbildung

$$F : (C([0, 2\pi], \mathbb{C}), \|\cdot\|_1) \to (\ell^\infty(\mathbb{Z}, \mathbb{C}), \|\cdot\|_\infty), \tag{5}$$

$$F(g) = \left(\int_0^{2\pi} e^{-ikx} g(x)\, dx \right)_{k\in\mathbb{Z}} \tag{6}$$

   stetig ist.
   Notationen: $C([0, 2\pi], \mathbb{C})$ bezeichnet den Raum aller stetigen Funktionen $g : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, und $i \in \mathbb{C}$ bezeichnet die imaginäre Einheit. Für $g \in C([0, 2\pi], \mathbb{C})$ ist $\|g\|_1 = \int_0^{2\pi} |g(x)|\, dx$. Weiter: $\ell^\infty(\mathbb{Z}, C) = \{a = (a_j)_{j\in\mathbb{Z}} \in \mathbb{C}^\mathbb{Z} |\ \|a\|_\infty < \infty\}$, wobei $\|a\|_\infty = \sup_{j\in\mathbb{Z}} |a_j|$.

   (c) Es bezeichne $(L^1([0, 2\pi], \mathbb{C}), \|\cdot\|_1)$ die Vervollständigung von $(C([0, 2\pi], \mathbb{C}), \|\cdot\|_1)$, wobei die Fortsetzung der Norm auf die Vervollständigung mit dem gleichen Symbol $\|\cdot\|_1$ bezeichnet wird. Zeigen Sie, dass die durch die Formeln (5) und (6) gegebene Abbildung F eine stetige Fortsetzung

$$\hat{F} : (L^1([0, 2\pi], \mathbb{C}), \|\cdot\|_1) \to (\ell^\infty(\mathbb{Z}, \mathbb{C}), \|\cdot\|_\infty) \tag{7}$$

   besitzt.

Bitte wenden!

4. (9=1+1+3+2+2 Punkte) Gegeben sei das Differentialgleichungssystem

$$\frac{d}{dt}y(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} y(t), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{8}$$

sowie der Anfangswert

$$y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \tag{9}$$

für eine unbekannte zweimal stetig differenzierbare Funktion $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$.

(a) Geben Sie eine Volterra-Integralgleichung an, die äquivalent zu diesem Anfangswertproblem ist. Die Angabe der Integralgleichung genügt; bei dieser Teilaufgabe ist kein Beweis verlangt.

(b) Formulieren Sie eine Version des Satzes von Picard-Lindelöf.

(c) Berechnen Sie die beiden Komponenten y_1 und y_2 der Lösung y des obigen Differentialgleichungssystems (8) mit der Anfangsbedingung (9) explizit. Im Ergebnis darf keine Matrix-Exponentialfunktion einer 2×2-Matrix stehen.

(d) Geben Sie, basierend auf der Volterra-Integralgleichung aus Teilaufgabe (a), eine Abbildung $\Phi : C(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ an, so dass das Iterationsverfahren $y^{(n+1)} = \Phi(y^{(n)})$, $n \in \mathbb{N}_0$, für $n \to \infty$ und jede Startnäherung $y^{(0)} \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ gleichmäßig auf kompakten Mengen gegen die obige Lösung y konvergiert. Die Angabe der Abbildung Φ genügt; bei dieser Teilaufgabe ist kein Beweis verlangt.
Notation: $C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ bezeichnet die Menge aller stetigen Abbildungen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$.

(e) Berechnen Sie $y^{(1)} = \Phi(y^{(0)})$ mit der Startnäherung

$$y^{(0)}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{10}$$

5. (9=2+1+2+1+3 Punkte) Gegeben seien zwei positiv definite Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$, wobei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$, die Menge $M = \{x \in \mathbb{R}^n | \, x^t A x = 1\}$, sowie die Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^t B x$.
Notation: Der Vektor x wird hier als Spaltenvektor aufgefasst. x^t bezeichnet die Transponierte von x.

(a) Beweisen Sie, dass M eine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$ ist.

(b) Welche Dimension besitzt die Untermannigfaltigkeit M? Bei dieser Teilaufgabe ist keine Begründung verlangt.

(c) Berechnen Sie den Tangentialraum $T_x M$ von M in einem gegebenen Punkt $x \in M$. Geben Sie $T_x M$ als Nullstellengebilde einer geeigneten Abbildung an. Im Ergebnis darf keine Ableitungsoperation stehen.

(d) Formulieren Sie den Satz von den Lagrange-Multiplikatoren.

(e) Geben Sie eine Matrix $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$ an, so dass für alle $x \in M$ die beiden folgenden Aussagen äquivalent sind:

i. x ist ein stationärer Punkt der Einschränkung $f|_M$ von f auf die Untermannigfaltigkeit M.

ii. x ist ein Eigenvektor der Matrix C.

Begründen Sie Ihre Antwort.

6. (9=4+1+4 Punkte) Gegeben seien die 1-Form

$$\omega_{(x,y)} = \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2 + y^2}$$

auf $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ und die Abbildung

$$f : U \to U, \quad f(x,y) = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2} \right).$$

(a) Berechnen Sie den Rückzug $f^*\omega$. Schreiben Sie das Ergebnis in möglichst vereinfachter Form.

(b) Formulieren Sie das Lemma von Poincaré für 1-Formen und Homotopien. Für eine offene Menge $V \subseteq \mathbb{R}^m$, $m \in \mathbb{N}$, sollen Sie dabei in der Antwort die Abbildung

$$I_V : Z^1([0,1] \times V) \to C^\infty(V, \mathbb{R}), \quad I_V \chi(x) = \int_{k_x} \chi \text{ für } x \in V$$

verwenden, wobei k_x die gerichtete Strecke von $(0, x)$ nach $(1, x)$ bezeichnet.

(c) Beweisen Sie, dass es keine glatte Homotopie von der Identität $\mathrm{id}_U : U \to U$ nach $f : U \to U$ gibt.