



LUDWIG-
MAXIMILIANS-
UNIVERSITÄT
MÜNCHEN

MATHEMATISCHES INSTITUT



Prof. Dr. Peter Müller
Dr. Maximilian Duell, Manuela Feistl

Sommersemester 2020
28. Juli 2020

Topologie und Differentialrechnung mehrerer Variablen

Online-Hausarbeit

Name: _____ Unterschrift: _____

Matr.Nr.: _____ Fachsemester: _____

Abschluss: Bachelor

Master

Lehramt Gymnasium: modularisiert nicht modularisiert

Diplom Andere: _____

Hauptfach: Mathematik Wirtschaftsm. Inf. Phys. Stat. _____

Nebenfach: Mathematik Wirtschaftsm. Inf. Phys. Stat. _____

Anrechnung der Credit Points für das: Hauptfach Nebenfach (Bachelor / Master)

- Bitte überprüfen Sie, ob Sie **vier Aufgaben** erhalten haben.
- Schreiben Sie nur in den Farben blau oder schwarz.
- Schreiben Sie **auf jedes Blatt** Ihrer Abgabe Ihren **Nachnamen und Vornamen**.
- Sie können innerhalb einer Aufgabe die Ergebnisse einer Teilaufgabe uneingeschränkt in jeder darauffolgenden Teilaufgabe benutzen.
- Alle Lösungen müssen hinreichend detailliert begründet sein.
- Bitte achten Sie darauf, dass Sie zu jeder Aufgabe nur eine Lösung abgeben; streichen Sie deutlich durch, was nicht gewertet werden soll.
- Sie haben **150 Minuten** Zeit, um die Hausarbeit zu bearbeiten **plus 60 Minuten extra** zum Scannen und Hochladen der Ergebnisse.

Viel Erfolg!

1	2	3	4	Σ
/10	/10	/10	/10	/40

Name: _____

Aufgabe 1.

[4 + 6 = 10 Punkte]

(a) Sei (X, \mathcal{T}) ein topologischer Raum mit der Hausdorff-Eigenschaft und sei $x \in X$. Zeigen Sie:

Die Menge $\{x\}$ ist abgeschlossen.

(b) Sei (X, d) ein metrischer Raum. Zeigen Sie, dass

(i) durch

$$d_{\times}((x, y), (x', y')) := d(x, x') + d(y, y'), \quad (x, y), (x', y') \in X \times X,$$

eine Metrik auf dem kartesischen Produkt $X \times X$ erklärt ist.

(ii) die Metrik d als Abbildung

$$\begin{aligned} (X \times X, d_{\times}) &\rightarrow (\mathbb{R}, |\cdot|) \\ (x, y) &\mapsto d(x, y) \end{aligned}$$

stetig ist, wobei $|\cdot|$ den Absolutbetrag bezeichnet.

Lösung.

Name: _____

Aufgabe 2.

[5 + 5 = 10 Punkte]

Die 2π -periodische Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sei durch

$$f(x) := \begin{cases} \cos(x/2), & x \in]0, 2\pi[, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

definiert.

- (a) Bestimmen Sie alle Fourier-Koeffizienten von f und geben Sie die Fourier-Reihe von f an.
- (b) Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert die Fourier-Reihe von f punktweise gegen $f(x)$?

Lösung.

Name: _____

Aufgabe 3.

[3 + 3 + 4 = 10 Punkte]

Betrachten Sie die Funktion

$$f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{\sqrt{n^3 + nx}}.$$

Zeigen Sie, dass

(a) die Reihe in der Definition von f gleichmäßig in $x \in [0, 1]$ konvergent ist,

(b)
$$\int_0^1 f(x) dx = 2 \sum_{n \in \mathbb{N}} \left(\sqrt{n + \frac{1}{n}} - \sqrt{n} \right),$$

(c) es eine Konstante $c \in]0, \infty[$ gibt, so dass für alle $N \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \left(\sqrt{n + \frac{1}{n}} - \sqrt{n} \right) \leq \frac{c}{\sqrt{N}}.$$

Lösung.

Name: _____

Aufgabe 4.

[5 + 5 = 10 Punkte]

Gegeben seien $p, q \in]1, \infty[$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ und die Funktion

$$f :]0, \infty[\times]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto \frac{1}{p} x^p + \frac{1}{q} y^q.$$

Bestimmen Sie mit Hilfe der Methode der Lagrangeschen Multiplikatoren alle lokalen Extrema f unter der Nebenbedingung $xy = 1$. Gehen Sie dazu wie folgt vor:

- (a) Zeigen Sie, dass f höchstens ein lokales Extremum unter der Nebenbedingung $xy = 1$ besitzt.
- (b) Zeigen Sie, dass f genau ein lokales Extremum unter der Nebenbedingung $xy = 1$ besitzt. Handelt es sich dabei um ein lokales Maximum oder ein lokales Minimum?

Hinweis. Es ist vorteilhaft, die Nebenbedingung als $\ln(xy) = 0$ zu formulieren.

Lösung.