

AB Geometrie & Topologie

Prof. Bernhard Leeb, Ph.D.

Dr. Stephan Stadler

Analysis II

KLAUSURLÖSUNG

Punkte insgesamt $30+14+6+6+8+12+6+10+14=108$

1. (Punkte **30**, **+2** für eine korrekte Antwort, **-2** für eine falsche Antwort, insgesamt ≥ 0)

Wahr oder falsch?

- (a) Jede Teilmenge von \mathbb{R}^n ist offen oder abgeschlossen.

Falsch. $[0, 1) \subset \mathbb{R}$ ist weder offen noch abgeschlossen.

- (b) Ist (X, d) ein metrischer Raum, so ist auch d^2 eine Metrik auf X .

Falsch. Wir betrachten $X = \{-1, 0, 1\} \subset \mathbb{R}$ mit der induzierten Metrik d . Dann gilt $4 = d^2(-1, 1) > d^2(-1, 0) + d^2(0, -1) = 1 + 1$. Also ist die Dreiecksungleichung für d^2 verletzt.

- (c) Ist (X, d) ein metrischer Raum, so ist auch \sqrt{d} eine Metrik auf X .

Wahr. \sqrt{d} ist offensichtlich positiv und symmetrisch. Die Dreiecksungleichung für \sqrt{d} folgt aus der Dreiecksungleichung für d mittels der Abschätzung

$$(\sqrt{d(x, z)})^2 = d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \leq (\sqrt{d(x, y)} + \sqrt{d(y, z)})^2.$$

- (d) Für beliebige Normen $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ auf einem endlichdimensionalen \mathbb{R} -Vektorraum V existiert eine Konstante $L \geq 1$, so dass $\frac{1}{L} \cdot \|v\|_1 \leq \|v\|_2 \leq L \cdot \|v\|_1$ für alle $v \in V$ gilt.

Wahr. Wurde in der Vorlesung bewiesen.

- (e) Ist $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ stetig und $B \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt, so ist $F(B) \subset \mathbb{R}^m$ beschränkt.

Wahr. Wir verwenden die Charakterisierung von Kompakta im \mathbb{R}^n als beschränkte abgeschlossene Teilmengen. Der Abschluß \overline{B} von B ist beschränkt und abgeschlossen, also kompakt. Weil stetige Bilder von Kompakta wieder Kompakta sind, ist $F(\overline{B})$ kompakt. Folglich ist $F(\overline{B})$ beschränkt, also auch die Teilmenge $F(B) \subset F(\overline{B})$.

- (f) Ist (X, d) ein vollständiger metrischer Raum und $f : X \rightarrow X$ eine Abbildung, so dass $d(f(x), f(y)) < d(x, y)$ für alle $x, y \in X$ gilt, so hat f einen Fixpunkt.

Falsch. Die Halbgerade $X = [1, +\infty) \subset \mathbb{R}$ mit der von \mathbb{R} induzierten Metrik ist ein vollständiger metrischer Raum. Die Abbildung $f : X \rightarrow X$ gegeben durch $f(x) = x + \frac{1}{x}$ hat keinen Fixpunkt, denn $f(x) > x$. Sie ist außerdem streng monoton, denn $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} > 0$ für $x > 1$. Für $1 \leq x < y$ gilt daher

$$0 < f(y) - f(x) = y - x - \underbrace{\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right)}_{>0} < y - x.$$

Also hat f die verlangte Kontraktionseigenschaft.

- (g) Die Zusammenhangskomponenten eines topologischen Raums sind offen und abgeschlossen.

Falsch. Die Zusammenhangskomponenten von $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, versehen mit der von \mathbb{R} induzierten Relativtopologie, sind die Punkte, denn die zusammenhängenden Teilmengen von \mathbb{R} sind genau die Intervalle. Die Punkte in \mathbb{Q} sind nicht offen.

- (h) Eine Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^m ist genau dann zusammenhängend, wenn sie wegzusammenhängend ist.

Wahr. Da Untermannigfaltigkeiten lokal euklidisch sind, sind sie lokal wegzusammenhängend. Daher sind ihre Wegzusammenhangskomponenten offen und stimmen folglich mit den Zusammenhangskomponenten überein.

- (i) Ist $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ partiell differenzierbar in $p \in \mathbb{R}^n$, so ist F stetig in p .

Falsch. Die partielle Differenzierbarkeit hängt nur vom Verhalten der Funktion auf den achsenparallelen Geraden durch p ab und erzwingt deshalb keine Stetigkeit in p .

- (j) Ist $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ differenzierbar, so ist F stetig.

Wahr. Wurde in der Vorlesung bewiesen.

- (k) Ist $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ stetig partiell differenzierbar, so ist F differenzierbar.

Wahr. Wurde in der Vorlesung bewiesen.

- (l) Ist die Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar und hat in $p \in \mathbb{R}^n$ ein isoliertes Minimum, dann ist $d^2 f_p$ positiv definit.

Falsch. Die Funktion $f(x) = x^4$ auf \mathbb{R} hat in 0 ein isoliertes Minimum, jedoch gilt $f''(0) = 0$.

- (m) Ist $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar und $p \in \mathbb{R}^n$ ein kritischer Punkt von f , so dass $d^2 f_p$ negativ semidefinit ist, so hat f in p ein lokales Maximum.

Falsch. Für die Funktion $f(x) = x^3$ auf \mathbb{R} gilt $f'(0) = 0$ und $f''(0) = 0$, jedoch ist $x = 0$ kein lokales Extremum von f .

- (n) Stetig differenzierbare Submersionen sind offene Abbildungen.

Wahr. Wurde in der Vorlesung bewiesen.

- (o) Urbilder kritischer Werte von stetig differenzierbaren Abbildungen $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ sind Untermannigfaltigkeiten.

Falsch. Dies gilt für reguläre Werte, jedoch nicht für kritische. Die Funktion $f(x, y) = xy$ auf \mathbb{R}^2 hat $(0, 0)$ als kritischen Punkt und damit 0 als kritischen Wert. Das Urbild von 0 ist die Vereinigung der beiden Koordinatenachsen. Diese ist in $(0, 0)$ nicht lokal homöomorph zu \mathbb{R} , also keine Untermannigfaltigkeit.

2. (Punkte 6+4+4=14)

Es sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion.

- (i) Definieren Sie die Eigenschaften „differenzierbar“ für f .

Siehe Vorlesung.

- (ii) Definieren Sie die Eigenschaften „partiell differenzierbar“ für f .

Siehe Vorlesung.

- (iii) Beweisen Sie, dass die Differenzierbarkeit von f die partielle Differenzierbarkeit von f impliziert.

Siehe Vorlesung.

3. (Punkte 2+4=6)

Die Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ sei stetig, nicht konstant und nehme den Wert 0 an. Zeigen Sie:

(i) Die Niveaumenge $N(0) := f^{-1}(0) \subset \mathbb{R}^n$ ist abgeschlossen.

Punkte in \mathbb{R} sind abgeschlossen +1. Weil f stetig +1 ist, folgt die Behauptung.

(ii) $N(0)$ ist nicht offen.

Eine nichtleere offene und abgeschlossene Teilmenge von \mathbb{R}^n stimmt mit \mathbb{R}^n überein, denn \mathbb{R}^n ist zusammenhängend +2. Weil f nicht konstant ist, kann $N(0)$ also nicht offen sein +2.

4. (Punkte 2+4=6)

Sei $W \subset \mathbb{R}^n$ eine Teilmenge, so dass jede stetige Funktion $f : W \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt ist. Zeigen Sie, dass W kompakt ist.

Es ist zu zeigen, dass W abgeschlossen und beschränkt ist.

Die Funktion $f = \|\cdot\|$ ist stetig. Also ist sie nach Voraussetzung beschränkt auf W , dh W ist beschränkt +2.

Sei $z \in \mathbb{R}^n \setminus W$. Dann ist die Funktion $g(x) = \frac{1}{\|x-z\|}$ auf W definiert und stetig. Also ist sie nach Voraussetzung beschränkt auf W , dh $g|_W \leq C$ +2. Es folgt $W \subset \mathbb{R}^n \setminus B_{\frac{1}{C}}(z)$ bzw. $B_{\frac{1}{C}}(z) \subset \mathbb{R}^n \setminus W$. Also ist $\mathbb{R}^n \setminus W$ offen bzw W abgeschlossen +2.

5. (Punkte 2+2+1+1+2=8)

Es sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x, y) = x^5 + y^4 - 5x - 32y + 2019.$$

Bestimmen Sie alle lokalen und globalen Extrema von f .

Es gilt $df_{(x,y)} = (5(x^4 - 1), 4(y^3 - 8))$ +2. Die kritischen Punkte sind $(1, 2)$ und $(-1, 2)$. Weiter gilt $d^2f_{(x,y)} = \begin{pmatrix} 20x^3 & 0 \\ 0 & 12y^2 \end{pmatrix}$ +2. Wir setzen die kritischen Punkte ein:

$$d^2f_{(1,2)} = \begin{pmatrix} 20 & 0 \\ 0 & 48 \end{pmatrix} \text{ (positiv definit),}$$

$d^2f_{(-1,2)} = \begin{pmatrix} -20 & 0 \\ 0 & 48 \end{pmatrix}$ (indefinit). Es folgt, dass f bei $(1, 2)$ ein lokales Minimum +1 hat und bei $(-1, 2)$ kein lokales Extremum vorliegt +1. Weiter kann f keine globalen Extrema haben, denn $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} f(t, 0) = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} t^5 - 5t + 2019 = \pm\infty$ +2, und folglich nimmt die stetige Funktion f nach dem Zwischenwertsatz alle reellen Werte an.

6. (Punkte 2+4+4+2=12)

Die Abbildung $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ sei $\frac{1}{2}$ -Lipschitz. Die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sei rekursiv definiert durch $x_0 := 0$ und $x_n := F(x_{n-1})$ für $n \geq 1$. Zeigen Sie:

(i) Die Abbildung F hat höchstens einen Fixpunkt.

Es seien x und x' Fixpunkte von F . Dann gilt $\|x - x'\| = \|F(x) - F(x')\| \leq \frac{1}{2}\|x - x'\|$ und damit $x = x'$ +2.

(ii) Für $n \geq 1$ gilt $\|x_n\| \leq \left(\sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{2^i}\right) \cdot \|x_1\|$.

Aus der Lipschitz-Eigenschaft folgt induktiv

$$\|x_{k+1} - x_k\| \leq \frac{1}{2^k} \cdot \|x_1 - x_0\| = \frac{1}{2^k} \cdot \|x_1\|$$

für $k \in \mathbb{N}_0$. Mit der Dreiecksungleichung erhält man

$$\|x_n\| = \|x_n - x_0\| \leq \sum_{i=0}^{n-1} \|x_{i+1} - x_i\| \leq \left(\sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{2^i}\right) \cdot \|x_1\| \quad + \mathbf{4}.$$

(iii) Die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist eine Cauchy-Folge.

Es seien $n, m \in \mathbb{N}$. Wie in (ii) liefert die Lipschitz-Eigenschaft induktiv

$$\|x_{n+k+1} - x_{n+k}\| \leq \frac{1}{2^k} \cdot \|x_{n+1} - x_n\|$$

für $k \in \mathbb{N}_0$ und mit der Dreiecksungleichung zusammen mit der Abschätzung in (ii) folgt

$$\|x_{n+m} - x_n\| \leq \sum_{i=0}^{m-1} \|x_{n+i+1} - x_{n+i}\| \leq \underbrace{\left(\sum_{i=0}^{m-1} \frac{1}{2^i}\right)}_{< 2} \cdot \underbrace{\|x_{n+1} - x_n\|}_{\leq \frac{1}{2^n} \cdot \|x_1\|} \leq \frac{1}{2^{n-1}} \cdot \|x_1\|.$$

Wegen $\frac{1}{2^n} \rightarrow 0$ folgt die Behauptung **+4**.

(iv) Die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert gegen einen Fixpunkt von F .

Es sei x_∞ der Grenzwert der Cauchy-Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Dann gilt wegen der Stetigkeit von F :

$$F(x_\infty) = F\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} F(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = x_\infty,$$

dh x_∞ ist Fixpunkt von F **+2**.

7. (Punkte 2+2+2=6)

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar, so dass $\nabla f(x) = 0$ für alle $x \in U$. Zeigen Sie, dass f lokal konstant ist.

Weil U offen ist, finden wir zu $x \in U$ einen Radius $r > 0$, so dass $B_r(x) \subset U$ **+2**. Wir betrachten die Einschränkung von f auf den konvexen **+2** Ball $B_r(x)$. Wegen $\nabla f \equiv 0$ folgt mit dem Schrankensatz, dass $f|_{B_r(x)}$ konstant ist **+2**.

8. (Punkte 2+2+2+2+2=10)

Zeigen Sie, dass das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x^2 y + e^u v - 2y v^2 &= 2 \\ 2x + y u^2 + e^v &= 5 \end{aligned}$$

in einer Umgebung des Punktes $(1, 2)$ implizit eine \mathcal{C}^∞ -Abbildung

$$(x, y) \mapsto (u(x, y), v(x, y))$$

mit $u(1, 2) = 1$ und $v(1, 2) = 0$ definiert. Berechnen Sie ihr Differential in $(1, 2)$.

Wir betrachten die Abbildung $F : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2; (x, y, u, v) \mapsto \begin{pmatrix} x^2y + e^u v - 2yv^2 \\ 2x + yu^2 + e^v \end{pmatrix}$

und schreiben $\mathbb{R}^4 = X \oplus Y$, wobei X durch die x - und y -Achsen und Y durch die u - und v -Achsen aufgespannt wird. Es gilt $F(1, 2, 1, 0) = (2, 5)$. Wir suchen eine Umgebung $U \subset X$ von $(1, 2)$ und eine C^∞ -Abbildung $G : U \rightarrow Y; (x, y) \mapsto (u(x, y), v(x, y))$ mit $G(1, 2) = (1, 0)$, so dass das Urbild $F^{-1}(2, 5)$ lokal nahe $(1, 2, 1, 0)$ durch den Graphen von G beschrieben wird. Dafür nutzen wir den Satz über implizite Funktionen.

Für das partielle Differential in Y -Richtung gilt

$$d_Y F_{(x,y,u,v)} = \begin{pmatrix} e^u v & e^u - 4yv \\ 2yu & e^v \end{pmatrix} + \mathbf{2} \text{ und somit } d_Y F_{(1,2,1,0)} = \begin{pmatrix} 0 & e \\ 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Weil $d_Y F_{(1,2,1,0)}$ invertierbar ist ($\det = -4e \neq 0$) $+ \mathbf{2}$, liefert der Satz über implizite Funktionen die Existenz der gesuchten C^∞ -Abbildung G . Für das Differential von G in $z = (1, 2) \in X$ gilt

$$dG_z = -(d_Y F_{(z,G(z))})^{-1} \circ d_X F_{(z,G(z))}.$$

Wir berechnen

$$d_X F_{(x,y,u,v)} = \begin{pmatrix} 2xy & x^2 - 2v^2 \\ 2 & u^2 \end{pmatrix} + \mathbf{2} \text{ und somit } d_X F_{(1,2,1,0)} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Außerdem benötigen wir

$$(d_Y F_{(1,2,1,0)})^{-1} = \frac{-1}{4e} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -e \\ -4 & 0 \end{pmatrix} + \mathbf{2}$$

Es folgt

$$dG_{(1,2)} = \frac{1}{4e} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -e \\ -4 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4e} \cdot \begin{pmatrix} 4 - 2e & 1 - e \\ -16 & -4 \end{pmatrix} + \mathbf{2}$$

9. (Punkte 4+4+4+2=14)

Die Abbildung $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ sei stetig differenzierbar und es gelte

$$\|F(x) - F(y)\| \geq \|x - y\|$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie:

(i) F hat invertierbare Differentiale.

Für $p, v \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$\|dF_p(v)\| = \left\| \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} F(p + tv) \right\| = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\|F(p + tv) - F(p)\|}{|t|} \geq \|v\|.$$

Also hat F injektive und damit invertierbare Differentiale. $+4$

(ii) F ist ein Diffeomorphismus auf eine offene Teilmenge $V \subset \mathbb{R}^n$.

Wegen Teilaufgabe (i) impliziert der Umkehrsatz $+ \mathbf{2}$, dass F ein lokaler Diffeomorphismus ist. Lokale Diffeomorphismen sind offene Abbildungen, also ist das Bild $V := F(\mathbb{R}^n) \subset \mathbb{R}^n$ offen.

Außerdem ist F injektiv, denn aus $F(x) = F(y)$ folgt

$$\|x - y\| \leq \|F(x) - F(y)\| = 0$$

und damit $x = y$. Also ist $F : \mathbb{R}^n \rightarrow V$ bijektiv. Weil F lokaler Diffeomorphismus ist, ist die Umkehrabbildung $F^{-1} : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ differenzierbar, folglich $F : \mathbb{R}^n \rightarrow V$ ein Diffeomorphismus. **+2.**

(iii) V ist abgeschlossen.

Ist $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in V , so ist $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $x_n = F^{-1}(y_n)$ eine Cauchy-Folge in \mathbb{R}^n , denn

$$\|x_n - x_m\| \leq \|y_n - y_m\|$$

für $m, n \in \mathbb{N}$ **+2.**

Es sei $x_\infty \in \overline{V}$ der Grenzwert von $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Dann gilt wegen der Stetigkeit von F (als stetig differenzierbarer Abbildung)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} F(x_n) = F(x_\infty) \in V.$$

Weil jeder Punkt im Abschluß \overline{V} der Grenzwert einer Cauchy-Folge in V ist, folgt $\overline{V} \subset V$, dh V ist abgeschlossen **+2.**

(iv) F ist ein Diffeomorphismus.

V ist nichtleer, offen nach (ii) und abgeschlossen nach (iii). Weil \mathbb{R}^n zusammenhängend ist, folgt $V = \mathbb{R}^n$ **+2.**