



LUDWIG-  
MAXIMILIANS-  
UNIVERSITÄT  
MÜNCHEN

MATHEMATISCHES INSTITUT



Mathematisches Institut  
Prof. Dr. P. Müller  
Dr. S. Morozov

Klausur  
Samstag, den 18. Juli 2015

## Analysis II

### Klausur

Nachname: \_\_\_\_\_ Vorname: \_\_\_\_\_

Matrikelnr.: \_\_\_\_\_ Fachsemester: \_\_\_\_\_

Studiengang: \_\_\_\_\_

*Ich stimme der Veröffentlichung des Ergebnisses dieser Klausur unter Angabe meiner Matrikelnummer zu. (Wenn nicht zutrifft, bitte ausstreichen!)*

Bitte **schalten Sie Ihr Mobiltelefon aus** und legen es nicht auf den Tisch; legen Sie bitte Ihren Lichtbild- und Studenausweis sichtbar auf den Tisch.

Bitte überprüfen Sie, ob Sie **fünf Aufgaben** erhalten haben. Jede Aufgabe ist **6 Punkte** wert.

Schreiben Sie bitte nicht in den Farben rot oder grün. Schreiben Sie **auf jedes Blatt** Ihren **Nachnamen und Vornamen**.

Lösen Sie bitte jede Aufgabe auf dem dafür vorgesehenen Blatt. Falls der Platz nicht ausreicht, verwenden Sie bitte die leeren Seiten am Ende und vermerken dies auf dem Blatt der entsprechenden Aufgabe.

Bitte achten Sie darauf, dass Sie zu jeder Aufgabe nur eine Lösung abgeben; streichen Sie deutlich durch, was nicht gewertet werden soll.

Sie haben **120 Minuten** Zeit, um die Klausur zu bearbeiten.

## *Viel Erfolg!*

1	2	3	4	5	Σ

Name: \_\_\_\_\_

**Aufgabe 1. (6 Punkte)**

Seien  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine differenzierbare Funktion und  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Beweise, dass die Funktion

$$z : \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad z(x, y) := x^\alpha f(y/x^2),$$

die partielle Differentialgleichung

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + 2y \frac{\partial z}{\partial y} = \alpha z$$

löst.

$$(\partial_x z)_{(x,y)} = \alpha x^{\alpha-1} f\left(\frac{y}{x^2}\right) + x^\alpha f'\left(\frac{y}{x^2}\right) \cdot \frac{-2y}{x^3}$$

$$(\partial_y z)_{(x,y)} = x^\alpha f'\left(\frac{y}{x^2}\right) \cdot \frac{1}{x^2}$$

$$\Rightarrow x (\partial_x z)_{(x,y)} + 2y (\partial_y z)_{(x,y)} = \alpha z(x, y).$$

Name: \_\_\_\_\_

**Aufgabe 2. (6 Punkte)**

Bestimme, für welche Werte des Parameters  $a \in \mathbb{R}$  das uneigentliche Integral

$$\int_0^{\infty} e^{ax} \sin x \, dx$$

existiert, und berechne in diesen Fällen dessen Wert.

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{ax} \sin x \, dx &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R \operatorname{Im} (e^{(a+i)x}) \, dx = \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \operatorname{Im} \left. \frac{e^{(a+i)x}}{a+i} \right|_0^R = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{a^2+1} \cdot \operatorname{Im} \left( (a-i) e^{(a+i)x} \right) \Big|_0^R = \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{a^2+1} \operatorname{Im} \left( (a-i) e^{ax} (\cos x + i \sin x) \right) \Big|_0^R = \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{e^{ax}}{a^2+1} (a \sin x - \cos x) \Big|_0^R = \frac{1}{a^2+1} \lim_{R \rightarrow \infty} (e^{aR} (a \sin R - \cos R) + 1). \end{aligned}$$

Für  $a \geq 0$  der Limes existiert nicht  $\Rightarrow$  das Integral existiert nicht.

Für  $a < 0$ ,  $\lim_{R \rightarrow \infty} e^{aR} (a \sin R - \cos R) = 0 \Rightarrow \int_0^{\infty} e^{ax} \sin x \, dx = \frac{1}{a^2+1}.$

Name: \_\_\_\_\_

**Aufgabe 3.** (6 Punkte)

Bestimme das Taylor-Polynom  $T_3$  (d.h., bis einschließlich Termen 3. Ordnung) der Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) := \sin(\sin x)$  um  $x = 0$  und beweise, dass

$$f(x) - T_3(x) = O(x^5)$$

für kleine  $|x|$  gilt.

Für kleine  $|x|$ ,

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + O(x^5)$$

$$\Rightarrow f(x) = \sin(\sin x) = \sin\left(x - \frac{x^3}{6} + O(x^5)\right) =$$

$$= x - \frac{x^3}{6} + O(x^5) - \frac{1}{6}\left(x - \frac{x^3}{6} + O(x^5)\right)^3 + O\left(\left(x - \frac{x^3}{6} + O(x^5)\right)^5\right) =$$

$$= x - \frac{x^3}{3} + O(x^5).$$

Name: \_\_\_\_\_

**Aufgabe 4. (6 Punkte)**

Beweise oder widerlege, dass der metrische Raum  $(\mathbb{R}, d)$  mit der Metrik

$$d(x, y) := \frac{|x - y|}{1 + |x - y|}, \quad x, y \in \mathbb{R},$$

- (a) vollständig;
- (b) beschränkt;
- (c) kompakt

ist.

(a) Sei  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Cauchy-Folge in  $(\mathbb{R}, d) \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}$

$$\forall n, m \geq N \quad \frac{|x_n - x_m|}{1 + |x_n - x_m|} < \varepsilon \Rightarrow |x_n - x_m| < \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon} \Rightarrow (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ ist}$$

eine CF in  $(\mathbb{R}, |\cdot|)$   $\Rightarrow \exists x \in \mathbb{R} : |x_n - x| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow$   
 $(\mathbb{R}, |\cdot|)$  vollst.

$\Rightarrow d(x_n, x) \leq |x_n - x| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(\mathbb{R}, d)} x \Rightarrow (\mathbb{R}, d)$  ist  
vollständig.

(b)  $\text{diam}(\mathbb{R}, d) = \sup_{x, y \in \mathbb{R}} \frac{|x - y|}{1 + |x - y|} = \sup_{a \geq 0} \frac{a}{1 + a} \stackrel{!}{=} 1$  (da  $\leq 1$ )  
 $=: f(a)$

$f'(a) = \frac{1 + a - a}{(1 + a)^2} = \frac{1}{(1 + a)^2} > 0 \quad \forall a \in \mathbb{R}_{\geq 0} \Rightarrow (\mathbb{R}, d)$  ist beschränkt.

(c) Betrachte die Folge  $x_n := n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ . Für jede Teilfolge davon gilt  $d(x_{n_k}, x_{n_l}) = f(|n_k - n_l|) \geq f(1) = \frac{1}{2} \quad \forall k \neq l$

$\Rightarrow$  Keine Teilfolge von  $(n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist eine Cauchy-Folge  $\Rightarrow$

$\Rightarrow (\mathbb{R}, d)$  ist nicht folgenkompakt  $\Rightarrow (\mathbb{R}, d)$  ist nicht kompakt.  
 $(\mathbb{R}, d)$  ist ein metr. Raum

**Aufgabe 5. (6 Punkte)**Seien  $\alpha > 1$  und  $s > 0$  reelle Zahlen.

- (a) Finde alle lokalen Extrema der Funktion  $f: \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x, y) := x^\alpha + y^\alpha$ , unter der Nebenbedingung  $h(x, y) := x + y - s = 0$ .
- (b) Beweise, dass  $(s/2, s/2)$  ein globales Minimum von  $f$  unter der Nebenbedingung  $h = 0$  ist. <sup>bei Vorliegen</sup>
- (c) Folgere die Ungleichung

$$\frac{x^\alpha + y^\alpha}{2} \geq \left(\frac{x+y}{2}\right)^\alpha$$

für alle  $x, y \in \mathbb{R}_{>0}$ .

(a) Für  $\lambda \in \mathbb{R}$  sei  $g_\lambda: \mathbb{R}_{>0}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g_\lambda(x, y) := f(x, y) - \lambda h(x, y)$ .

Wäre  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}_{>0}^2$  ein lokales Extremum  $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} \partial_x g_\lambda(x_0, y_0) = \alpha x_0^{\alpha-1} - \lambda = 0 \\ \partial_y g_\lambda(x_0, y_0) = \alpha y_0^{\alpha-1} - \lambda = 0 \end{cases} \Rightarrow \lambda = \alpha x_0^{\alpha-1}, \quad x_0 = y_0 = \left(\frac{\lambda}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}$$

Wähle  $\lambda$  so, dass  $h(x_0, y_0) = 0 \Rightarrow x_0 = y_0 = \frac{s}{2}$  ist der einzige Kandidat.

Hesse-Matrix in  $(\frac{s}{2}, \frac{s}{2})$ :  $(D^2 g_\lambda)\left(\frac{s}{2}, \frac{s}{2}\right) = \begin{pmatrix} \alpha(\alpha-1)\left(\frac{s}{2}\right)^{\alpha-2} & 0 \\ 0 & \alpha(\alpha-1)\left(\frac{s}{2}\right)^{\alpha-2} \end{pmatrix} \begin{matrix} > 0 \\ > 0 \\ > 0 \end{matrix}$

$\Rightarrow (\frac{s}{2}, \frac{s}{2})$  ist ein lokales Minimum.

(b)  $h(x, y) = 0 \Rightarrow y = s - x \Rightarrow f(x, y) = \varphi(x) := x^\alpha + (s-x)^\alpha$ ,  $x \in ]0, s[$ .  
 $y > 0 \Rightarrow x < s$

$$\varphi'(x) = \alpha(x^{\alpha-1} - (s-x)^{\alpha-1}) \Rightarrow \varphi'(x) > 0 \quad \forall x > \frac{s}{2}; \quad \varphi'(x) < 0 \quad \forall x < \frac{s}{2};$$

$\varphi'(\frac{s}{2}) = 0 \Rightarrow \varphi$  erreicht das globale Minimum in  $\frac{s}{2} \Rightarrow (\frac{s}{2}, \frac{s}{2})$  ist der Minimalpunkt von  $f$  unter der NB  $h=0$ .

(c) Für  $x=0$  oder  $y=0$  gilt die Ungleichung, wegen  $\alpha > 1$ .

$$\text{Sonst sei } s := x+y \xrightarrow{(b)} x^\alpha + y^\alpha \geq \left(\frac{s}{2}\right)^\alpha + \left(\frac{s}{2}\right)^\alpha = 2 \left(\frac{x+y}{2}\right)^\alpha \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^\alpha + y^\alpha}{2} \geq \left(\frac{x+y}{2}\right)^\alpha$$