



LUDWIG-  
MAXIMILIANS-  
UNIVERSITÄT  
MÜNCHEN

MATHEMATISCHES INSTITUT



Prof. Dr. Lars Diening  
Robert Graf, Maximilian Wank

Sommersemester 2014  
15.09.2014

# Topologie und Differentialrechnung mehrerer Variablen

## Nachholklausur

Nachname: \_\_\_\_\_ Vorname: \_\_\_\_\_

Matrikelnr.: \_\_\_\_\_ Fachsemester: \_\_\_\_\_

Abschluss: Bachelor, PO  2007  2010  2011      Master, PO  2010  2011

Lehramt Gymnasium:                       modularisiert       nicht modularisiert

Diplom       Anderes: \_\_\_\_\_

Hauptfach:  Mathematik  Wirtschaftsm.  Inf.  Phys.  Stat.  \_\_\_\_\_

Nebenfach:  Mathematik  Wirtschaftsm.  Inf.  Phys.  Stat.  \_\_\_\_\_

Anrechnung der Credit Points für das  Hauptfach  Nebenfach (Bachelor / Master)

Bitte schalten Sie Ihr Mobiltelefon aus und legen es nicht auf den Tisch. Es ist erlaubt, eine selbst erstellte, beidseitig per Hand beschriebene A4-Seite in der Klausur zu benutzen sowie einen nicht-graphischen Taschenrechner. Lösen Sie bitte jede Aufgabe auf dem dafür vorgesehenen Blatt. Falls der Platz nicht ausreicht, vermerken Sie dies am unteren Ende des Angabenblattes der entsprechenden Aufgabe und schreiben den Rest auf die Rückseite oder auf eine von uns ausgehändigte leere Seite. Sie haben **105 Minuten** Zeit, um die Klausur zu bearbeiten.

Da wir keine Aushänge mit Namen oder Matrikelnummern machen dürfen, notieren Sie sich bitte die nebenstehende Zahl, unter der wir Ihr Klausurergebnis veröffentlichen werden.

<b>Aufgabe</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>6</b>	<b>7</b>
<b>max. Punkte</b>	<b>3</b>	<b>4,5</b>	<b>2,5</b>	<b>3,5</b>	<b>2,5</b>	<b>3</b>	<b>3,5</b>
<b>Punkte</b>							

<b>Σ Gesamt (max. 22,5)</b>	
---------------------------------	--

**Viel Erfolg !**

Name: \_\_\_\_\_

### Aufgabe 1

3 Punkte

Sei  $f \in C^1([0, 1])$ . Beweisen Sie, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f(x) \sin(nx) dx = 0.$$

*Achtung:* Die Funktionenfolge  $\sin(nx)$  konvergiert nicht punktweise.

### Lösung zu Aufgabe 1

Da  $f \in C^1([a, b])$  ist  $\|f\|_\infty, \|f'\|_\infty < \infty$ . Außerdem gilt für alle  $y \in \mathbb{R}$  die Abschätzung  $|\cos(y)| \leq 1$ . Damit lässt sich nach partieller Integration direkt

$$\begin{aligned} \left| \int_0^1 f(x) \sin(nx) dx \right| &= \left| \left[ -f(x) \frac{\cos(nx)}{n} \right]_0^1 + \int_0^1 f'(x) \frac{\cos(nx)}{n} dx \right| \\ &\leq \left| \left[ -f(x) \frac{\cos(nx)}{n} \right]_0^1 \right| + \left| \int_0^1 f'(x) \frac{\cos(nx)}{n} dx \right| \\ &=: I + II \end{aligned}$$

abschätzen. Die Summanden konvergieren gegen 0, da

$$\begin{aligned} 0 \leq I &\leq \frac{1}{n} |-f(1) \cos n + f(0)| \rightarrow 0 \text{ und} \\ 0 \leq II &\leq \frac{1}{n} \|f'\|_\infty \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Name: \_\_\_\_\_

## Aufgabe 2

4,5 Punkte

Gegeben sei

$$f : (-\pi, \pi)^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto \sin(x) \sin(y).$$

Geben Sie alle lokalen Extrema der Funktion auf  $(-\pi, \pi)^2$  an. (Es ist nicht nötig den Rand zu untersuchen.)

### Lösung zu Aufgabe 2

Da die Funktion überall differenzierbar ist, ist

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} \cos(x) \sin(y) \\ \sin(x) \cos(y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

eine notwendige Voraussetzung sowohl für lokale Extrema. Um die kritischen Punkte zu finden machen wir eine Fallunterscheidung.

$\cos(x) = 0$ : Daraus folgt direkt, dass  $x = \pm \frac{\pi}{2}$ . Damit ist aber  $\sin(x) \neq 0$ , um die zweite Komponente der Gradientengleichung zu erfüllen muss dann  $\cos(y) = 0$ , also  $y = \pm \frac{\pi}{2}$  gelten.

$\cos(x) \neq 0$ : Um der ersten Komponente der Gradientengleichung zu genügen muss wegen der Voraussetzung der Fallunterscheidung nun  $\sin(y) = 0$ , also  $y = 0$  gelten. Damit ist  $\cos(y) \neq 0$ . Um die zweite Zeile der Gradientengleichung zu erfüllen muss nun  $\sin(x) = 0$ , also  $x = 0$  gelten. Insgesamt ergibt sich die Menge der kritischen Punkte  $M_f$  als

$$M_f = \{(0, 0), (\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}), (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}), (\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}), (-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2})\}.$$

Wir bestimmen die Hesse-Matrix von  $f$  in  $(x, y)$  durch differenzieren als

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} -\sin(x) \sin(y) & \cos(x) \cos(y) \\ \cos(x) \cos(y) & -\sin(x) \sin(y) \end{pmatrix}.$$

Die Hessematrix

$$H_f(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ist wegen  $\langle H_f(0, 0)z, z \rangle = 2z_1z_2$  indefinit. Also ist  $(0, 0)$  ein Sattelpunkt. Es gilt

$$H_f(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) = H_f(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} < 0,$$

also sind lokale Maxima bei  $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  und  $(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2})$ . Es gilt

$$H_f(\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}) = H_f(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} > 0,$$

also sind lokale Minima bei  $(\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2})$  und  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ .

□ Ankreuzen, falls Rest der Lösung auf Rückseite oder zusätzlichem Blatt.

Name: \_\_\_\_\_

### Aufgabe 3

2,5 Punkte

Zeigen Sie, dass es genau ein  $x_0 \in [0, \infty)$  gibt, welches die Gleichung  $x = \ln(x^2 + 36)$  erfüllt. Benutzen Sie den Banach'schen Fixpunktsatz.

### Lösung zu Aufgabe 3

Wir definieren  $f(x) := \ln(x^2 + 36)$ . Das Intervall  $[0, \infty)$  ist abgeschlossen und offenbar gilt  $f([0, \infty)) \subset [0, \infty)$ . Um den Banachschen Fixpunktsatz anwenden zu können bleibt also nur noch zu zeigen, dass  $f$  eine Kontraktion auf  $[0, \infty)$  ist. Man berechnet

$$|f'(x)| = \left| \frac{1}{x^2+36} \cdot 2x \right| = \frac{1}{x^2+36} \cdot 2x.$$

Damit gilt

$$\begin{aligned} \frac{2x}{x^2 + 36} \leq L &\iff \frac{2}{L}x \leq x^2 + 36 \iff 0 \leq x^2 - \frac{2}{L}x + \frac{1}{L^2} + 36 - \frac{1}{L^2} \\ &\iff 0 \leq \left(x - \frac{1}{L}\right)^2 + \left(6 - \frac{1}{L}\right)\left(6 + \frac{1}{L}\right). \end{aligned}$$

Dies gilt beispielsweise mit  $L = \frac{1}{6}$  für alle  $x \in [0, \infty)$  und ergibt  $\|f'\|_\infty \leq \frac{1}{6}$ . Insbesondere ist damit  $f$  eine Kontraktion. Damit ist sowohl Existenz als auch Eindeutigkeit eines  $x_0 \in [0, \infty)$ , welches obige Gleichung löst, aus der Anwendung des Banachschen Fixpunktsatzes folgt.

Ankreuzen, falls Rest der Lösung auf Rückseite oder zusätzlichem Blatt.

Name: \_\_\_\_\_

#### Aufgabe 4

2,5+1 Punkte

Gegeben sei das Vektorfeld

$$v : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} e^z \\ 2y \cos(y^2) \\ e^z \end{pmatrix}.$$

- (a) Sei  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  und  $\Gamma$  die Strecke von  $(0, 0, 0)^T$  nach  $(x, y, z)^T$ . Berechnen Sie  $\int_{\Gamma} v \cdot ds$  direkt mit der Definition des Wegintegrals.
- (b) Geben Sie die Menge aller Stammfunktionen von  $v$  an (mit Begründung).

#### Lösung zu Aufgabe 4

- (a) Sei  $\alpha(t) := t(x, y, z)$ . Dann ist für  $z \neq 0$

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} v \cdot ds &= \int_0^1 \langle v(\alpha(t)), \alpha'(t) \rangle dt \\ &= \int_0^1 x e^{tz} + y 2ty \cos(t^2 y^2) + z e^{tz} dt \\ &= (x + z) \int_0^1 e^{tz} dt + \int_0^1 2y^2 t \cos(t^2 y^2) dt \\ &= (x + z) \left[ \frac{1}{z} e^{tz} \right]_0^1 + \int_0^{y^2} \cos(s) ds \\ &= (x + z) \frac{e^z - 1}{z} + \sin(y^2) \end{aligned}$$

Für  $z = 0$  haben wir

$$\int_{\Gamma} v \cdot ds = x + \sin(y^2).$$

- (b) Es gibt keine Stammfunktion, da  $v \in C^1$  aber  $\operatorname{rot} v \neq 0$ , da

$$\operatorname{rot} v(x, y, z) = \begin{pmatrix} \partial_y v_3 - \partial_z v_2 \\ \partial_z v_1 - \partial_x v_3 \\ \partial_x v_2 - \partial_y v_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ e^z \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Es gilt aber stets  $\operatorname{rot} \nabla f = 0$  (Übungsaufgabe).

Alternativbeweis: Das erhaltene Integral als mögliche Stammfunktion  $f$  nehmen. Dann Gradient berechnen. Wegen  $\nabla f \neq v$  gibt es keine Stammfunktion (sonst wäre  $f$  eine Stammfunktion).

Name: \_\_\_\_\_

### Aufgabe 5

2,5 Punkte

Zeigen Sie, dass es eine Umgebung  $U$  von  $0 \in \mathbb{R}$  und eine  $C^1$ -Funktion  $g : U \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $g(0) = 0$  gibt so, dass für alle  $x \in U$  die Gleichung

$$x^5 + xg(x) + e^{g(x)} = 1$$

erfüllt ist. Geben Sie  $g'(0)$  an.

### Lösung zu Aufgabe 5

Wir definieren die Funktion

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto x^5 + xy + e^y - 1. \end{aligned}$$

Wir suchen  $g$  mit  $f(x, g(x)) = 0$ . Es gilt  $D_y f(x, y) = x + e^y$ , also offenbar  $D_y f(0, 0) = 1 \neq 0$  weshalb  $D_y f(0, 0)$  invertierbar ist. Offensichtlich ist  $f \in C^1$ . Daher existiert nach dem Satz über implizite Funktionen eine Umgebung  $U$  von  $0 \in \mathbb{R}$  und eine Funktion  $g : U \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $g(0) = 0$ .

Der Satz über implizite Funktionen gibt auch eine Formel für die Ableitung von  $g$ , nämlich

$$g'(x) = -(D_y f(x, g(x)))^{-1} D_x f(x, g(x)).$$

Da  $D_x f(x, g(x)) = 5x^4 + g(x)$  gilt  $D_x f(0, g(0)) = g(0) = 0$  ist auch  $g'(0) = 0$ .

Name: \_\_\_\_\_

### Aufgabe 6

2+1 Punkte

Gegeben sei die Kurve

$$\alpha : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \alpha(t) := (\cos t, \sin t, t).$$

- (a) Bestimmen Sie die Länge der Kurve und parametrisieren Sie die Kurve nach der Bogenlänge.
- (b) Berechnen Sie die Krümmung der Kurve im Punkt  $\alpha(\pi) = (-1, 0, \pi)$ .

### Lösung zu Aufgabe 6

Zu (a): Für  $t \in [0, 2\pi]$  ist

$$\begin{aligned}\alpha'(t) &= (-\sin t, \cos t, 1), \\ |\alpha'(t)| &= \sqrt{2}.\end{aligned}$$

Damit ist die Länge gleich  $\int_0^{2\pi} |\alpha'(t)| dt = \sqrt{2} 2\pi$ .

Die Parametrisierung nach Bogenlänge  $s = \text{Var}(\alpha, [0, t]) = \sqrt{2} t$  ist

$$\beta : [0, 2\sqrt{2}\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \beta(s) := \alpha(s/\sqrt{2}).$$

Zu (b): Für  $t \in [0, 2\pi]$  ist

$$\alpha''(t) = (-\cos t, -\sin t, 0),$$

also gilt für  $s \in [0, 2\sqrt{2}\pi]$

$$\begin{aligned}\beta''(s) &= \frac{1}{2} \alpha''(s/\sqrt{2}) \\ |\beta''(s)| &= \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Die Kurve hat somit die konstante Krümmung  $1/2$ .

Name: \_\_\_\_\_

### Aufgabe 7

3,5 Punkte

Sei  $(X, \mathcal{T})$  ein kompakter topologischer Raum und sei  $K_1, K_2, \dots$  eine Folge nicht-leerer abgeschlossener Mengen in  $X$ , wobei  $K_{n+1} \subset K_n$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  gelte. Zeigen Sie, dass dann  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n$  nicht-leer ist.

### Lösung zu Aufgabe 7

Angenommen es gilt  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n = \emptyset$ . Für  $n \in \mathbb{N}$  sei  $U_n := X \setminus K_n$ . Dann ist  $U_n$  offen und gemäß unserer Annahme gilt

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (X \setminus K_n) = X \setminus \bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n = X,$$

d.h.  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n$  ist eine offene Überdeckung von  $X$ . Da  $X$  kompakt ist, existiert ein  $N \in \mathbb{N}$ , so dass bereits

$$\bigcup_{n=1}^N U_n = X$$

gilt. Komplementbildung ergibt

$$\emptyset = X^c = \bigcap_{n=1}^N U_n^c = \bigcap_{n=1}^N K_n.$$

Da  $K_1, K_2, \dots$  absteigend ist, folgt hieraus

$$\emptyset = \bigcap_{i=1}^N K_n = K_N.$$

Dies ist aber ein Widerspruch zur Voraussetzung, dass  $K_N$  nicht-leer ist.