



Mathematisches Institut  
Prof. Dr. P. Müller

2. Klausur  
Donnerstag, 4. August 2011

## Analysis 2

(*Topologie und Differentialrechnung mehrerer Variablen*)

2. Klausur

Nachname: \_\_\_\_\_ Vorname: \_\_\_\_\_

Matrikelnr.: \_\_\_\_\_ Fachsemester: \_\_\_\_\_

Studiengang: \_\_\_\_\_ Nebenfach: \_\_\_\_\_

- Ich stimme der Veröffentlichung des Ergebnisses dieser Klausur unter Angabe meiner Matrikelnummer zu.

Bitte **schalten Sie Ihr Mobiltelefon aus** und legen es nicht auf den Tisch; legen Sie bitte Ihren Lichtbild- und Studenausweis sichtbar auf den Tisch.

Bitte überprüfen Sie, ob Sie **sechs Aufgaben** erhalten haben.

Schreiben Sie bitte weder mit Bleistift noch in den Farben rot oder grün. Schreiben Sie auf **jedes Blatt** Ihren **Nachnamen und Vornamen**.

Lösen Sie bitte jede Aufgabe auf dem dafür vorgesehenen Blatt. Falls der Platz nicht ausreicht, verwenden Sie bitte die leeren Seiten am Ende und vermerken dies auf dem Angabenblatt der entsprechenden Aufgabe.

Alle Lösungen oder Antworten müssen hinreichend detailliert begründet sein.

Bitte achten Sie darauf, dass Sie zu jeder Aufgabe nur eine Lösung abgeben; streichen Sie deutlich durch, was nicht gewertet werden soll.

Sie haben **120 Minuten** Zeit, um die Klausur zu bearbeiten.

*Viel Erfolg!*

1	2	3	4	5	6	$\Sigma$

**Aufgabe 1.** (6 Punkte)

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

$$(a) \int_0^{\sqrt{\pi}} x \cos(x^2) dx; \quad (b) \int_1^e x \ln x dx$$

**Aufgabe 2.** (6 Punkte)

Man untersuche, welche der folgenden Strukturen  $(X, \mathcal{T})$  topologische Räume sind:

- (a)  $X = \mathbb{R}$  und  $\mathcal{T} = \{\emptyset\} \cup \{G \subseteq \mathbb{R} : G \text{ ist überabzählbar}\}$ ;
- (b)  $X = \mathbb{R}$  und  $\mathcal{T} = \{\emptyset\} \cup \{G \subseteq \mathbb{R} : X \setminus G \text{ ist endlich}\}$ .

Man beachte die Konvention: Die leere Menge  $\emptyset$  ist eine endliche Menge.

**Aufgabe 3.** (6 Punkte)

Sei  $X := C([-1, 1])$  der Banach-Raum der stetigen, auf dem Intervall  $[-1, 1]$  definierten reellwertigen Funktionen, versehen mit der Supremumsnorm. Man zeige, dass es genau ein  $f \in X$  gibt, so dass

$$f(x) = \frac{1}{2} \ln(1 + f(x)^2) + \sin(\ln(x + 2))$$

für alle  $x \in [-1, 1]$  erfüllt ist.

**Aufgabe 4.** (6 Punkte)

Man finde die Stellen lokaler Extrema der Funktion  $f: \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}$ , definiert durch  $f(x, y) := \ln(xy)$ , unter der Nebenbedingung  $g(x, y) := x^2 + y^2 - 2 = 0$ .

**Aufgabe 5.** (6 Punkte)

Es sei  $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  stetig im Punkt 0. Zeigen Sie:  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , definiert durch  $f(x) := \gamma(\|x\|_2)x$ , ist differenzierbar in  $x = 0$ .

Berechnen Sie außerdem die Divergenz  $\langle \nabla, f \rangle(0)$ .

**Warnung:** Sie können nicht erwarten, dass  $f$  in 0 *stetig* partiell differenzierbar ist.

**Aufgabe 6.** (6 Punkte)

Es sei  $(M, d)$  ein kompakter metrischer Raum. Zeigen Sie:  $M$  ist beschränkt, d.h. es gibt  $c \geq 0$  so dass  $d(x, y) \leq c$  für alle  $x, y \in M$  ist.