Analysis II

Tutorium – Bonusaufgaben

Themen dieser Einheit

- Taylorreihen durch Komposition
- Topologische Begriffe in metrischen Räumen
- Normen und Normäquivalenz im $\mathbb{R}^2$

Sommersemester 2026 · Ludwig-Maximilians-Universität München

Hinweis

Diese Aufgaben sind **nicht abzugeben**. Sie dienen der Vertiefung und werden im Tutorium in den verbleibenden ca. **30 Minuten** selbständig bearbeitet. Euer Tutor steht für kurze Rückmeldungen zur Verfügung.

Aufgabe 1 Taylorreihe durch Komposition [mittel]

Bestimme die Taylorreihe von

$$f(x) = \ln(1 + x^2), \quad x \in (-1, 1),$$

an der Stelle $x_0 = 0$, indem du die bekannte Taylorreihe von $\ln(1 + t)$ um $t_0 = 0$ verwendest (**keine direkte Berechnung von Ableitungen!**).

(i) Gib die Taylorreihe von $\ln(1 + t)$ um $t_0 = 0$ an und nenne ihren Konvergenzradius.

(ii) Leite daraus die Taylorreihe von $f(x) = \ln(1 + x^2)$ her.

(iii) Untersuche die Konvergenz der Taylorreihe an den Randpunkten $x = 1$ und $x = -1$.

Lösung zu Aufgabe 1 Taylorreihe durch Komposition

(i) Taylorreihe von $\ln(1 + t)$

Die Taylorreihe von $\ln(1 + t)$ um $t_0 = 0$ erhält man über die allgemeine k-te Ableitung. Für $k \geq 1$ gilt:

$$\frac{d^k}{dt^k} \ln(1 + t) \;=\; \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(1 + t)^k},$$

sodass $\left[\frac{d^k}{dt^k} \ln(1 + t)\right]_{t=0} = (-1)^{k-1}(k-1)!$. Einsetzen in die Taylorformel liefert:

$$\ln(1 + t) \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} t^k \;=\; t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + \cdots$$

Konvergenzradius: Mit dem Quotienten- oder Cauchy-Hadamard-Kriterium:

$$R \;=\; \lim_{k\to\infty} \frac{|a_k|}{|a_{k+1}|} \;=\; \lim_{k\to\infty} \frac{k+1}{k} \;=\; 1.$$

Die Reihe konvergiert also für $|t| < 1$, d. h. auf $(-1, 1)$.

(ii) Taylorreihe von $f(x) = \ln(1 + x^2)$

Idee: Wir substituieren $t = x^2$ in der bekannten Reihe.

Für $|x| < 1$ gilt $|x^2| = x^2 < 1$, also liegt $t = x^2$ im Konvergenzbereich der Reihe. Daher:

$$\ln(1 + x^2) \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} (x^2)^k \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^{2k}.$$

Ausgeschrieben:

$$\ln(1 + x^2) \;=\; x^2 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3} - \frac{x^8}{4} + \cdots$$

Dies ist die gesuchte Taylorreihe von f um $x_0 = 0$.

Warum darf man einfach substituieren? Eine Potenzreihe $\sum a_k t^k$ mit Konvergenzradius R konvergiert für alle t mit $|t| < R$. Setzen wir $t = x^2$, so ist die Bedingung $|x^2| < 1$ äquivalent zu $|x| < 1$. Im Inneren des Konvergenzbereichs darf man also ohne Weiteres substituieren.

(iii) Konvergenz an den Randpunkten $x = \pm 1$

An $x = 1$ und $x = -1$ nimmt die Taylorreihe wegen $(\pm 1)^{2k} = 1$ denselben Wert an:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} (\pm 1)^{2k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$$

Dies ist die **alternierende harmonische Reihe**. Nach dem **Leibniz-Kriterium** konvergiert sie, da die Glieder $\frac{1}{k}$ monoton fallen und gegen 0 streben. Ihr Wert ist bekanntermaßen $\ln 2$.

Vergleich mit dem Funktionswert: Es gilt $f(\pm 1) = \ln(1 + 1) = \ln 2$. Die Taylorreihe konvergiert an beiden Randpunkten also gegen den wahren Funktionswert – die Reihe stellt f auf dem abgeschlossenen Intervall $[-1, 1]$ dar.

Aufgabe 2 Topologische Begriffe im $\mathbb{R}^2$ [mittel]

Sei $X = \mathbb{R}^2$ versehen mit der euklidischen Metrik $d(x,y) = \|x-y\|_2$, und sei

$$A \;=\; \left\{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \;:\; x_1^2 + x_2^2 < 1\right\} \;\cup\; \{(1,\,0)\}.$$

Bestimme jeweils **mit vollständiger Begründung**:

(i) Das **Innere** A°.

(ii) Den **Rand** ∂A.

(iii) Den **Abschluss** $\overline{A}$.

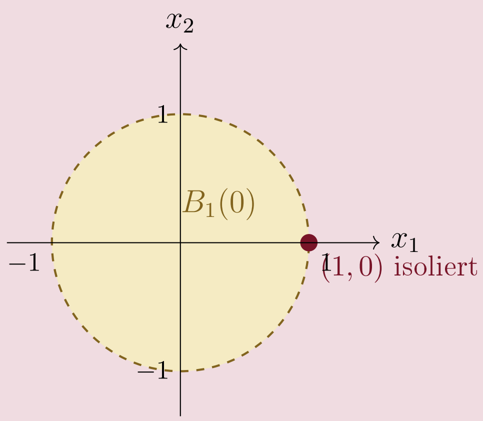
Ist A **offen**? Ist A **abgeschlossen**? Begründe.

Lösung zu Aufgabe 2 Topologische Begriffe im $\mathbb{R}^2$

Wir erinnern an die Definitionen (vgl. Skript Def. 13.14):

- **Innerer Punkt:** $a \in A^\circ \iff \exists\, \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(a) \subset A$.
- **Randpunkt:** $a \in \partial A \iff \forall\, \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(a) \cap A \neq \emptyset$ und $B_\varepsilon(a) \cap A^c \neq \emptyset$.
- **Abschluss:** $\overline{A} = A \cup \partial A$.

Zur Orientierung skizzieren wir die Menge A – die offene Einheitsscheibe zusammen mit dem isolierten Punkt $(1,0)$ auf dem Rand:



(i) Inneres A°

Behauptung: $A^\circ = B_1(0) = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\|_2 < 1\}$.

Punkte der offenen Einheitsscheibe sind innere Punkte. Sei $a \in B_1(0)$, also $\|a\|_2 < 1$. Wähle $\varepsilon := 1 - \|a\|_2 > 0$. Für jedes $z \in B_\varepsilon(a)$ gilt mit der Dreiecksungleichung:

$$\|z\|_2 \;\le\; \|z-a\|_2 + \|a\|_2 \;<\; \varepsilon + \|a\|_2 \;=\; 1,$$

also $z \in B_1(0) \subset A$, d. h. $B_\varepsilon(a) \subset A$. Damit ist a ein innerer Punkt von A.

Der isolierte Punkt $(1,0)$ *ist kein innerer Punkt.* Für jedes $\varepsilon > 0$ enthält $B_\varepsilon\big((1,0)\big)$ den Punkt $(1+\frac{\varepsilon}{2}, 0)$, welcher weder in $B_1(0)$ liegt noch gleich $(1,0)$ ist. Damit gilt $B_\varepsilon\big((1,0)\big) \not\subset A$, also $(1,0) \notin A^\circ$.

$$\boxed{A^\circ \;=\; B_1(0) \;=\; \big\{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\|_2 < 1\big\}.}$$

(ii) Rand ∂A

Behauptung: $\partial A = S^1 = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\|_2 = 1\}$ (der Einheitskreis).

Jeder Punkt des Einheitskreises ist Randpunkt. Sei $a \in S^1$, also $\|a\|_2 = 1$. Für jedes $\varepsilon > 0$ enthält $B_\varepsilon(a)$ sowohl Punkte mit $\|\cdot\|_2 < 1$ (in $B_1(0) \subset A$) als auch Punkte mit $\|\cdot\|_2 > 1$ (in A^c). Also ist $a \in \partial A$.

Da $(1,0) \in S^1$, ist er durch das obige Argument ebenfalls Randpunkt – auch ohne Betrachtung als isolierter Punkt ergibt sich dieselbe Aussage.

Keine anderen Randpunkte. Für $\|a\|_2 < 1$: dann $a \in A^\circ$, also $a \notin \partial A$. Für $\|a\|_2 > 1$ (und $a \neq (1,0)$): es existiert $\varepsilon := \|a\|_2 - 1 > 0$ mit $B_\varepsilon(a) \cap A = \emptyset$, also $a \notin \partial A$.

$$\boxed{\partial A \;=\; S^1 \;=\; \big\{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\|_2 = 1\big\}.}$$

(iii) Abschluss $\overline{A}$

Nach Definition $\overline{A} = A \cup \partial A$. Da $(1,0) \in S^1$, gilt:

$$\overline{A} \;=\; B_1(0) \cup \{(1,0)\} \cup S^1 \;=\; B_1(0) \cup S^1 \;=\; \overline{B_1(0)}.$$

$$\boxed{\overline{A} \;=\; \overline{B_1(0)} \;=\; \big\{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\|_2 \leq 1\big\}.}$$

Offenheit und Abgeschlossenheit:

Nicht offen: $(1,0) \in A$, aber $(1,0) \notin A^\circ$ (gezeigt in (i)). Da $A \neq A^\circ$, ist A nicht offen.

Nicht abgeschlossen: $\overline{A} = \overline{B_1(0)} \supsetneq A$, denn z. B. $(-1,0) \in \overline{A}$, aber $(-1,0) \notin A$. Da $A \neq \overline{A}$, ist A nicht abgeschlossen.

Aufgabe 3 Normen und Topologie im $\mathbb{R}^2$ [schwer]

Auf $\mathbb{R}^2$ betrachten wir die ℓ^1-Norm und die ℓ^∞-Norm:

$$\|x\|_1 = |x_1| + |x_2|, \qquad \|x\|_\infty = \max\big(|x_1|, |x_2|\big).$$

(i) **Skizziere** die offenen Einheitskugeln

$$B_1^{(1)}(0) = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\|_1 < 1\} \quad \text{und} \quad B_1^{(\infty)}(0) = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\|_\infty < 1\}$$

im selben Koordinatensystem.

(ii) Zeige, dass die Menge $U = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\|_1 < 1\}$ bezüglich der ℓ^∞-Norm **offen** ist.

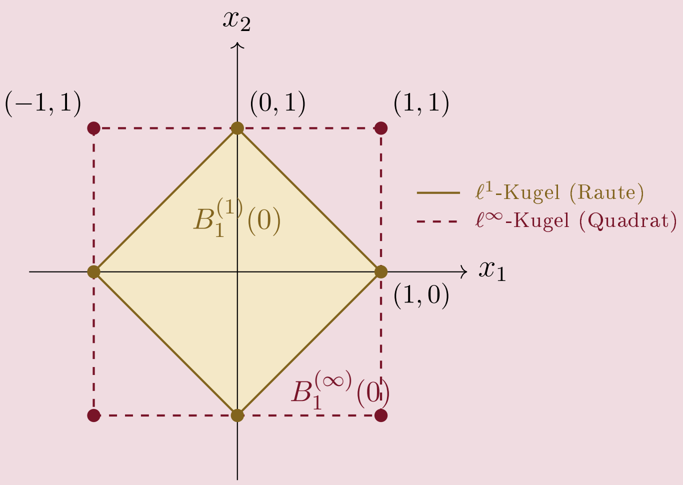
(iii) Zeige die Normäquivalenz:

$$\|x\|_\infty \;\le\; \|x\|_1 \;\le\; 2\,\|x\|_\infty \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^2,$$

und folgere daraus, dass die von $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_\infty$ erzeugten Topologien auf $\mathbb{R}^2$ **übereinstimmen**.

Lösung zu Aufgabe 3 Normen und Topologie im $\mathbb{R}^2$

(i) Skizze der Einheitskugeln



Die ℓ^1-Einheitskugel ist eine **Raute**, die ℓ^∞-Einheitskugel ein **achsenparalleles Quadrat**. Es gilt $B_1^{(1)}(0) \subsetneq B_1^{(\infty)}(0)$.

(ii) $U = B_1^{(1)}(0)$ **ist offen bezüglich** $\|\cdot\|_\infty$

Idee: Zu jedem Punkt in U finden wir eine ℓ^∞-Kugel, die ganz in U liegt.

Sei $a \in U$ beliebig, also $\|a\|_1 < 1$. Wähle

$$\varepsilon \;:=\; \frac{1 - \|a\|_1}{2} \;>\; 0.$$

Sei $z \in B_\varepsilon^{(\infty)}(a)$, d. h. $\|z-a\|_\infty < \varepsilon$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \|z\|_1 &= |z_1| + |z_2| \\ &\le |z_1 - a_1| + |a_1| + |z_2 - a_2| + |a_2| \quad \text{(Dreiecksungleichung)} \\ &= \|z-a\|_1 + \|a\|_1 . \end{aligned}$$

Wir schätzen $\|z-a\|_1$ durch die ℓ^∞-Norm ab:

$$\|z-a\|_1 = |z_1-a_1|+|z_2-a_2| \le 2\max\big(|z_1-a_1|, |z_2-a_2|\big) = 2\|z-a\|_\infty < 2\varepsilon = 1-\|a\|_1 .$$

Damit folgt:

$$\|z\|_1 < (1-\|a\|_1) + \|a\|_1 = 1,$$

also $z \in U$. Wir haben gezeigt: $B_\varepsilon^{(\infty)}(a) \subset U$. Da $a \in U$ beliebig war, ist U bezüglich $\|\cdot\|_\infty$ **offen**. □

(iii) Normäquivalenz und Gleichheit der Topologien

Beweis der Ungleichungen für $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$:

Linke Ungleichung $\|x\|_\infty \le \|x\|_1$*:*

$$\|x\|_\infty = \max(|x_1|, |x_2|) \le |x_1| + |x_2| = \|x\|_1 . \checkmark$$

Das Maximum ist stets kleiner oder gleich der Summe beider Terme.

Rechte Ungleichung $\|x\|_1 \le 2\,\|x\|_\infty$*:*

$$\|x\|_1 = |x_1| + |x_2| \le \max(|x_1|, |x_2|) + \max(|x_1|, |x_2|) = 2\,\|x\|_\infty . \checkmark$$

Jeder der beiden Summanden ist durch das Maximum beschränkt.

Zusammengefasst gilt für alle $x \in \mathbb{R}^2$:

$$\boxed{\|x\|_\infty \le \|x\|_1 \le 2\,\|x\|_\infty .}$$

Gleichheit der Topologien. Seien $\mathcal{T}_1$ und $\mathcal{T}_\infty$ die von $\|\cdot\|_1$ bzw. $\|\cdot\|_\infty$ erzeugte Topologie. Wir zeigen $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_\infty$ und $\mathcal{T}_\infty \subset \mathcal{T}_1$.

$\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_\infty$*:* Sei $V \in \mathcal{T}_1$ und $a \in V$. Dann existiert $r > 0$ mit $B_r^{(1)}(a) \subset V$. Wegen $\|x\|_\infty \le \|x\|_1$ gilt $\|z-a\|_\infty \le \|z-a\|_1$, also $B_r^{(\infty)}(a) \subset B_r^{(1)}(a) \subset V$. Damit ist a innerer Punkt von V bezüglich $\|\cdot\|_\infty$, also $V \in \mathcal{T}_\infty$.

$\mathcal{T}_\infty \subset \mathcal{T}_1$*:* Sei $V \in \mathcal{T}_\infty$ und $a \in V$. Dann existiert $r > 0$ mit $B_r^{(\infty)}(a) \subset V$. Wegen $\|x\|_1 \le 2\,\|x\|_\infty$ gilt $\|z-a\|_1 \le 2\,\|z-a\|_\infty$, also $B_{r/2}^{(1)}(a) \subset B_r^{(\infty)}(a) \subset V$. Damit ist a innerer Punkt von V bezüglich $\|\cdot\|_1$, also $V \in \mathcal{T}_1$.

Fazit: $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_\infty$. Die Normen $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_\infty$ erzeugen auf $\mathbb{R}^2$ **dieselbe Topologie**.

Allgemeines Prinzip (zur Vertiefung)

Auf $\mathbb{R}^n$ sind **je zwei Normen äquivalent**: es existieren stets $c_1, c_2 > 0$ mit $c_1\,\|x\|_\alpha \le \|x\|_\beta \le c_2\,\|x\|_\alpha$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$. Äquivalente Normen erzeugen stets dieselbe Topologie. In unendlichdimensionalen Räumen gilt dies **nicht** mehr.